

# Dos rombos y un destino (jornada de reflexión)

por

RICARDO ALONSO LIARTE Y DANIEL SIERRA RUIZ

(IES Salvador Victoria, Monreal del Campo; CPI El Espartidero, Zaragoza)

En julio de 2015 estuvimos en un taller en las JAEM de Cartagena, que impartía la gente del MMACA (Museo de Matemáticas de Cataluña) y que se llamaba *Si Penrose lo supiera*. El taller giraba en torno a los *rombos de Penrose* (figura 1). Con estos rombos, decían, podemos hacer mosaicos aperiódicos. Así que partiendo de esa sesión *montamos* un taller para el programa *Conexión Matemática*; pensamos que se puede utilizar en diferentes niveles y para trabajar distintos conceptos. En las actas de la 17 JAEM está el resumen del taller del MMACA (Brasó y otros, 2013) y en el artículo «Pentaplexity» (Penrose, 1979) se puede seguir el desarrollo de Penrose, por lo que aquellas personas interesadas en beber de las fuentes pueden pasar directamente al apartado de las referencias bibliográficas y obviar a estos humildes y simples copistas.

Nuestra primera idea fue contar cómo hacemos el taller en un artículo, pero hemos optado por desarrollarlo en tres. Entendemos que el material da suficiente *juego* como para utilizarlo en diferentes sesiones de clase más allá de un solo taller y para cubrir más conceptos de los que trabajamos en él. Por otra parte, su puesta en práctica nos ha provocado alguna reflexión que hemos querido compartir. En este primer artículo, nos vamos a centrar en las dos primeras actividades que solemos plantear salpicado de algunos comentarios sobre nuestra práctica docente.

Para empezar, hay una cosa que no nos deja de resultar curiosa al respecto de las actividades que suele plantear el MMACA en congresos y cursos de formación sobre enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Suelen tener una gran afluencia de público, de matemáticos, profesores y no, que no dudan en ponerse a *jugar* con los diferentes materiales. Hemos puesto jugar en cursiva, porque estamos seguros de que estas personas piensan que están *haciendo matemáticas* como así muestra la *seriedad* con que lo afrontan. Sin embargo, muy poca gente usa este tipo de actividades en el aula, normalmente, a pesar de que hay bibliografía que lo apoya (ASBL Entr'Aide y otros, 2017). Dicho sea de paso, desde el programa *Conexión Matemática* se ha tratado (se sigue tratando y se seguirá si nos dejan) de impulsar esta manera de *aprender* matemáticas. Si preguntáramos a alguno de estos profesores que muestran interés en los materiales del MMACA, pero luego no los implementan en el aula, seguro que refiere el currículo. Vamos a empezar con el taller, que pronto vuelve a salir el currículo y tampoco es cuestión de meternos en camisa de once varas.

Lo primero que se plantea en el taller es calcular los ángulos de los rombos... Bueno, no, en realidad, lo primero que hacemos es preguntar qué figuras geométricas son. Con el rombo 1 casi ninguno duda; sobre todo si no lo mostramos en la posición que se ve en la figura 1, sino en la que ofrecen habitualmente los libros de texto. Pero con el otro, empieza la diversión. Romboide es lo mejor que se puede oír. En fin, retomemos el asunto del cálculo de los ángulos. Los rombos están hechos de un material similar a la goma-eva\* (figura 2), así que la medida directa con un transportador no funciona. Realmente, el objetivo es que encuentren la solución por la vía manipulativa, geométrica, así que en cada mesa de cuatro o seis echamos un montón de estos rombos y les dejamos *jugar*. Nosotros, nos pasamos por las mesas y vamos haciendo preguntas más que contestar a las suyas (Calvo, 2019).

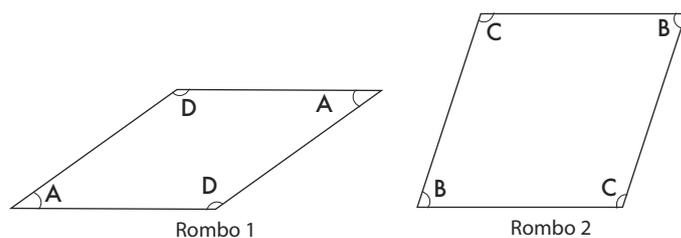


Figura 1. Rombos de Penrose



Figura 2. Un montón de rombos de Penrose

Solemos contar una anécdota sobre este taller. Cierta día lo hicimos primero en un colegio, en 4.º de primaria y un par de horas más tarde en un instituto, en 4.º de ESO. Cuando a los de primaria les preguntamos cuánto medirían los ángulos, no se *cortaron* en conjeturar; por supuesto, las primeras respuestas fueron algo *disparatadas*, si se permite la palabra. Pero, a puro de manipular los rombos, acabaron resolviéndolo más o menos en todos los grupos. Podéis suponer qué pasó en 4.º de ESO cuando les preguntamos cuánto medían los ángulos: «bufff, yo paso», «eso es imposible de calcular», «me he dejado el transportador en casa»... A puro de *pelear* con ellos logramos que se pusieran a manipular los rombos y acabaron hallando los ángulos. A partir de aquí solíamos hacer una reflexión, pero hace un tiempo tuvimos la ocasión de ponerlo en práctica en 1.º de Bachillerato... Con ellos fue imposible conseguir que *jugaran* y apenas una persona calculó los ángulos. Lo que hicieron fue dibujar en un papel los rombos y liarse a echar cuentas. De hecho, acabaron pidiendo volver a la materia del curso. La pregunta es evidente, ¿qué estamos haciendo para que piensen que las matemáticas no requieren del uso de la imaginación ni de la curiosidad? Una gran cantidad de profesores de matemáticas (aquí deberíamos citar un estudio estadístico), suelen asegurar que su pasión por las matemáticas empezó cuando alguien les dejó un libro de Martin Gardner. La actitud que tomamos ante los materiales del MMACA apuntan en la misma dirección.

En ocasiones tendemos a pensar que esto de los *retos* matemáticos, lo de Gardner, lo de pensar..., en general no está al alcance de todos. Por eso hay que hacer un currículo más *asequible* a todos. No vamos a molestarnos en rebatirlo si ya lo hizo el *Grupo Cero* ¡en el año 1997!:

Esto conduce a un tipo de enseñanza que, en lugar de favorecer el entendimiento, se reduce a la práctica monótona y poco estimulante destinados a responder a las preguntas de los exámenes. De este modo, en las circunstancias actuales, la enseñanza de las matemáticas en la etapa de secundaria está dirigida a los alumnos de 'dorada mediocridad', dejando no sólo al 40 ó 50 por 100 de alumnos de más bajo rendimiento, sino también al 5 ó 10 por 100 de alumnos que pueden tener un rendimiento muy alto en matemáticas y no reciben el impulso necesario, lo que es sin duda un auténtico despilfarro social.

Sin irnos tan lejos, Boaler (2020) asegura:

La manera tradicional de impartir las asignaturas de matemáticas y la cultura del rendimiento que ha penetrado en la trama de la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina perjudican a los estudiantes que obtienen buenas calificaciones en la misma medida que a los que tienen dificultades.

Retomemos el hilo del taller. Prometemos no volver a desvariar tanto.

Estábamos intentando que calculen cuánto miden los cuatro ángulos que hay en los rombos. Se puede utilizar la misma idea con la que les mostramos qué polígonos regulares teselan el plano e intentar conducirles a que construyan *estrellas* (en el tercer artículo desarrollamos la idea de estas *estrellas*) como alguna de las que se ven en la

figura 3. Una vez que dan con el primer ángulo, el asunto se *suaviza* pues pueden encontrar el resto de la misma forma, es decir, completando manualmente ángulos conocidos, o bien observando la relación *numérica* existente entre ellos: partiendo del más pequeño, el siguiente mide el doble, el otro el triple y el más grande el cuádruple. Independientemente de si esto lo ven o no, está bien sacarlo a colación en las conversaciones que tenemos con ellos, pues, por un lado, nos sirve para que conecten geometría con relaciones numéricas, y, por otro, lo pueden utilizar para *resolver* otra de las cuestiones que citaremos más adelante. Ni que decir tiene que esta primera parte da pie a hablar de cuánto es la suma de los ángulos de un cuadrilátero, y, por lo tanto, engarzarlo con una sesión de clase *normal*.

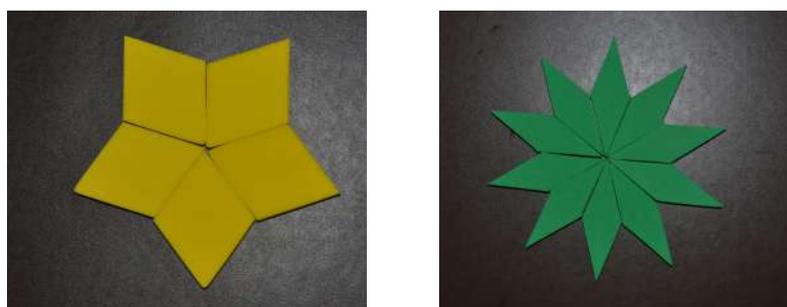


Figura 3. Dos de las posibles *estrellas*

A continuación, les pedimos que digan cuál de los dos rombos tiene mayor perímetro y cuál mayor área. Automáticamente sacan la regla y empiezan a medir. La dificultad de medir en ese material, hace que el perímetro les salga distinto de un rombo a otro cuando, en realidad, son iguales. No obstante, si les pides que comparen la longitud de ambos lados enseguida caen en la cuenta. Lo del área sí que les resulta más complicado. Al ser rombos, miden las diagonales, pero, a continuación, chocan con el hecho de que no se acuerdan de la fórmula del rombo (en cualquier curso). Les insistimos en que lo único que nos interesa saber es cuál de los dos tienen una mayor área. Empiezan a *conjeturar* y suelen acertar, claro, pero cuando les pedimos una *demostración* la misión se convierte en imposible. Casi ninguno cae en la cuenta de que viendo los rombos como paralelogramos y sabes que la fórmula es base por altura, es muy sencillo darse cuenta, *demostrar*, que el área del rombo 2 es mayor.

Todo esto nos invita a nuevas reflexiones. La primera tiene que ver con esa afición a utilizar las fórmulas prevaleciendo sobre la interpretación geométrica. No cabe duda que eso se lo estamos haciendo interiorizar a puro de *práctica*. Albertí (2018) se cuestiona este mismo asunto refiriéndose al caso concreto del teorema de Pitágoras:

[...] el teorema de Pitágoras había perdido peso e incluso había sido despojado de su carácter eminentemente geométrico para convertirse en algebraico. Diría incluso que el teorema en sí había desaparecido ya.

Esto de *algebrizar* la geometría es más evidente en 2.º de bachillerato (donde la geometría se reduce a cálculos algebraicos), pero es algo que se va acentuando a medida que se *avanza* en el sistema educativo. Y tiene mucho que ver con el hecho de que no sean capaces de *interpretar* que el rombo es un paralelogramo. Sí, hasta puede ser que se aprendan la *clasificación* de las figuras planas, pero no van a ser capaces de aplicarlo cuando tienen un rombo en la mano. Porque normalmente no *tocan* un rombo (ni ninguna otra figura geométrica, que en el caso de los poliedros tiene su aquel). El reto que os proponemos es que encontréis un ejercicio de libro de texto en el que no se use la fórmula de las diagonales cuando se habla del área de un rombo.

Dicho sea de paso, ¿tienen claro qué significa *medir* un área? Pues no, claro. Con un poco de suerte aciertan con la fórmula. Así que se puede aprovechar esta cuestión de la comparación de las áreas de los rombos para atrás y *recordar* que podemos interpretar la multiplicación con el cálculo del área de un rectángulo, de ahí deducir la de un paralelogramo... De esta forma, además de dar respuesta a la cuestión planteada, tenemos la oportunidad de profundizar en un concepto importante partiendo de una actividad de carácter manipulativo.

Como hemos dicho, inicialmente solo pretendemos que digan cuál de los dos rombos tiene mayor área. Pero, si queremos, tenemos la opción de calcular ambas áreas y compararlas. El material es malo para hacer medidas

exactas, ellos no suelen ser muy *finos* y las reglas que manejan dejan que desear, por lo que las medidas que obtengan no van a coincidir con las de sus compañeros. Así que es un buen momento para realizar un pequeño estudio estadístico y ver si la media *converge* al valor real (ambas áreas están en proporción áurea, pero de eso hablaremos en el siguiente artículo). Se trata, en definitiva, de romper los estancos en los que estamos convirtiendo a nuestra asignatura. Tenemos la gran ventaja de que en matemáticas hay muchas conexiones entre diferentes conceptos y no aprovecharlo es perder la oportunidad de que nuestros alumnos puedan apreciar más la materia.

Así pues, los dos rombos tienen el mismo perímetro y distintas áreas, lo que también se puede aprovechar didácticamente. Sin ir más lejos, podemos relacionarlo con figuras que teniendo la misma área tienen distinto perímetro; por ejemplo, es una buena oportunidad para usar en clase un geoplano (físico o virtual).

Como hemos dicho en varias ocasiones, en nuestra opinión, el material da mucho *juego* (en sentido amplio); en los dos siguientes artículos hablaremos, entre otras cosas, de teselados aperiódicos, proporción áurea, búsquedas sistemáticas, polígonos regulares...

Para acabar, un *¿chascarrillo?* La foto de la figura 4 demuestra que, entre los autores de este texto y Roger Penrose, ganador del Nobel de Física en 2020, solo hay dos grados de separación. En la foto aparece también Cindy Lawrence, directora del Museo de Matemáticas de Nueva York (MoMath), con quien coincidimos en el III Matrix Conference que se celebró en Barcelona en octubre de 2018. Obviamente la cosa no tiene ningún mérito, pero nos apetecía decirlo.

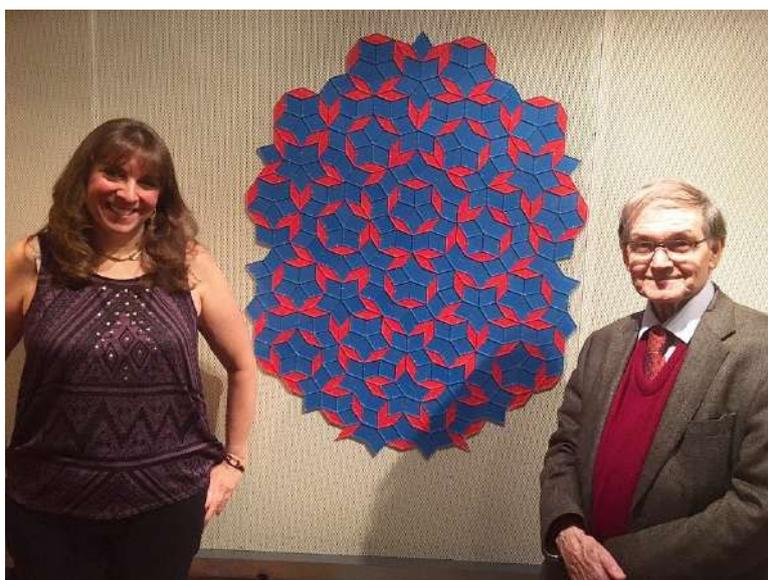


Figura 4. Roger Penrose y Cindy Lawrence en el MoMath

## Referencias bibliográficas

- ALBERTÍ, M. (2018), «El lado y la diagonal de un cuadrado son iguales», *Suma*, n.º 89, 9-15.
- ASBL ENTR'AIDE, LA MAISON DES MATHS FERMAT SCIENCE IL GIARDINO DI ARCHIMEDE IMAGINARY GGBH MMACA - MUSEU DE MATEMÀTIQUES DE CATALUNYA (2017), *Mathspaces. A non-formal approach to mathematical education*, European Commission [Recuperado de < <https://s3.eu-central-1.amazonaws.com/mathspaces/mathspaces-booklet-en.pdf>>].
- BOALER, J. (2020), *Mentalidades matemáticas*, Sirio, Málaga
- BRASO, E., P. FORNALS, G. RAMELLINI y Q. TARRADAS (2013), «¿Si Penrose lo supiera!», *Actas de las XV JAEM*, Cartagena.
- CALVO, C. (2019), «Enseñar Matemáticas: un compromiso con el oficio de preguntar», *Suma*, n.º 92, 9-15.
- PENROSE, R. (1979/80). «Pentaplexity. A Class of Non-Periodic Tilings of the plane», *Math. Intell.*, n.º 2, 32-37.

\* El material que aparece en la fotografía se compró en El cuadrado mágico <<https://www.elcuadradomagico.es/>>. No obstante se puede trabajar con una versión *casera*, imprimiendo y plastificando. Nuestra propia versión casera se puede descargar [aquí](#).