Aposición y remoción

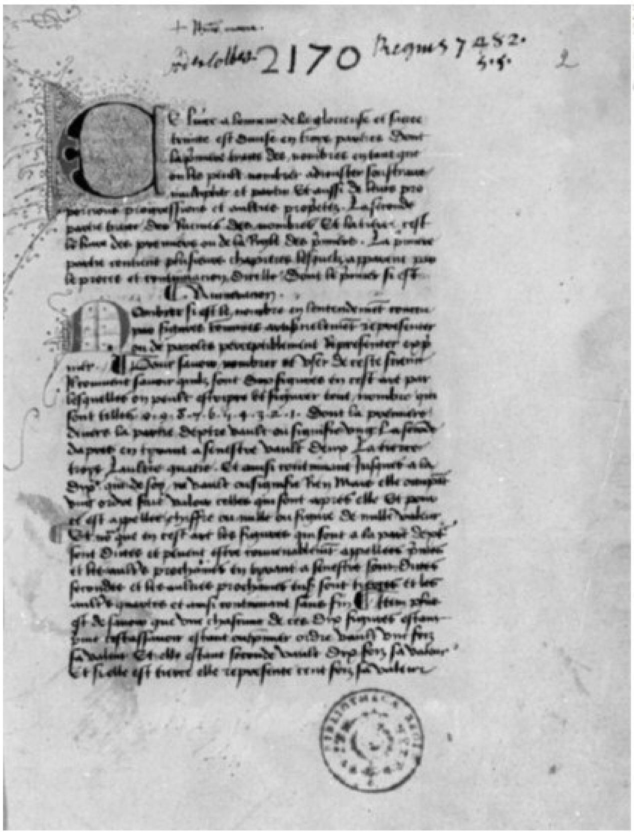
por

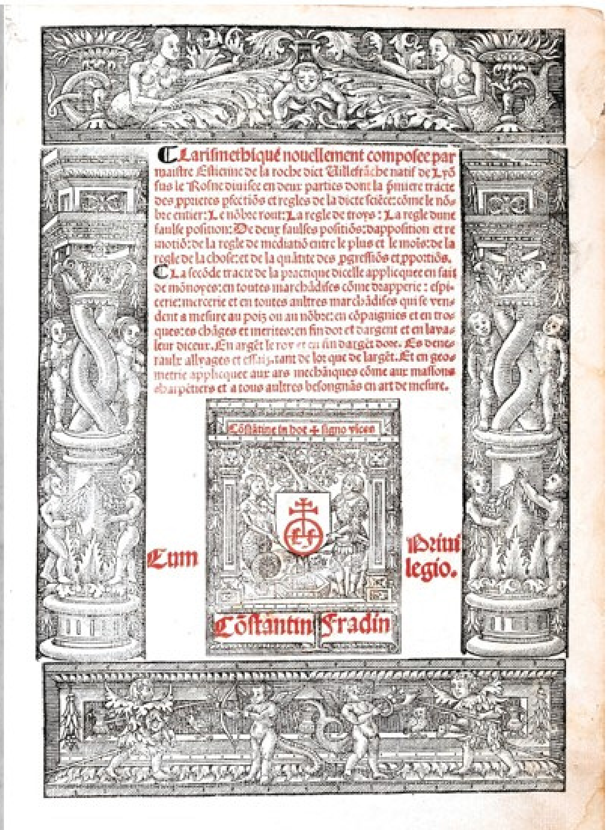
Antonio M. Oller Marcén

(Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza)

Durante muchos siglos, los textos orientados a la enseñanza o a la transmisión de contenidos matemáticos dedicaban un gran esfuerzo a presentar múltiples y diversas reglas que se utilizaban para resolver familias de problemas más o menos amplias. Algunas, como la *regla de tres*, se siguen (desafortunadamente) enseñando hoy en día. Otras, aunque ya prácticamente abandonadas en el ámbito escolar, tenían nombres que aún pueden resultar familiares (como la *regla de falsa posición*, por ejemplo). Muchas fueron progresivamente abandonadas y olvidadas, en gran medida como consecuencia de la generalización de la enseñanza del álgebra como técnica de resolución de problemas.

Un ejemplo de estas últimas es la denominada *regla de aposición y remoción*. Esta regla es, muy posiblemente, de origen oriental y fue recogida tanto en obras de autores árabes medievales como en aritméticas europeas de los siglos XV y XVI. Así, podemos encontrarla descrita de manera bastante sistemática en la *Triparty en la science des nombres* del francés Nicolas Chuquet. Esta obra, escrita en 1484, solo circuló en forma de manuscrito y fue plagiada en su mayor parte por el también francés Estienne de La Roche en su libro *Larismethique nouvellement composee* publicado en 1520.





Larismethiqué nouuellement composee par maistre Estienne de la roche dict Villefrāche natif de Lyō sus le Rosne diuisee en deux parties dont la pmiere tracte des pprietes pfectiōs et regles de la dicte sciēce: cōme le nōbre entier: Le nōbre rout: La regle de troys: La regle dune faulse position: De deux faulses positiōs: dapposition et remotiō: de la regle de mediatiō entre le plus et le moīs: de la regle de la chose: et de la quātite des pgressiōs et pportiōs.

La secōde tracte de la practique dicelle applicquee en fait de mōnoyes: en toutes marchādises cōme draipperie: espicerie: mercerie et en toutes aultres marchādises qui se vendent a mesure au poix ou au nōbre: en cōpaignies et en trocques: es chāges et merites: en fin dor et dargent et en la valeur dicelui. En argēt le roy et en fin dargēt dor. Es deniers faulx allyages et essaiz, tant de lor que de largēt. Et en geometrie applicquee aux ars mechāniques cōme aux massons charpētiers et a tous aultres besongnās en art de mesure.

Cōstātine in hoc + signo vices

Cum Priuilegio.

Cōstantin Fradin

En la parte izquierda de la imagen se muestra la primera página de un manuscrito de la obra de Chuquet. A la derecha, la portada de la primera edición del libro publicado por de La Roche. Ambos documentos pueden encontrarse en la red.

Volviendo a la regla de aposición y remoción que nos ocupa, esta se diseñó para resolver problemas que, en términos modernos, pueden modelizarse mediante un sistema de ecuaciones como el siguiente:

$$\begin{cases} x+y+z=M \\ ax+by+cz=N \end{cases}$$

Se trata de problemas indeterminados que incluso pueden no tener solución, una característica no muy común en problemas antiguos. Además cabe señalar que, por los contextos en los que se suelen presentar, se buscan soluciones formadas por enteros positivos. En muchas ocasiones, aunque no siempre, se tenía la condición de que $M=N$.

Puede resultar llamativo que matemáticos en la antigüedad consideraran que la resolución de ese tipo de problemas tan particular mereciera una atención especial y que incluso dieran un nombre propio a la técnica utilizada. Esto se debe, posiblemente, a que existe una familia de problemas muy antigua que se puede modelizar, precisamente, mediante el sistema anterior y cuya aparición en textos de matemáticas fue habitual durante más de un milenio. Se trata de los denominados *problemas de los 100 pájaros*.

El ejemplo más antiguo que se conoce de estos problemas, y que explica el nombre con el que se han acabado conociendo, aparece en un texto chino del siglo V, el *Zhang Qiujian Suanjing*. Dice así:

> Un gallo por 5 quian, una gallina por 3 quian y 3 polluelos por 1 quian. Si con 100 quian queremos comprar 100 aves, ¿cuántos gallos, gallinas y polluelos compraremos?

Varios ejemplos de problemas similares se pueden encontrar en textos indios y árabes y, de hecho, para el siglo VIII ya aparece en documentos europeos occidentales. Por ejemplo, en las *Propositiones ad Acuendos Juvenes* del monje Alcuino de York se proponen hasta ocho ejemplos de este tipo de problemas en contextos ligeramente diferentes. Recogemos aquí dos de ellos:

> Cierto hombre quiso comprar en oriente 100 animales de diversas clases por 100 sueldos, para lo que ordenó a un sirviente que por un camello se pagaran 5 sueldos, 1 por un asno y que 20 ovejas se compraran por 1 sueldo. Diga, quien quiera, ¿cuántos camellos, asnos y ovejas se obtuvieron a cambio de los 100 sueldos.

> Cierto paterfamilias disponía de 30 sirvientes entre los que ordenó repartir 30 modios de maíz del siguiente modo: que los hombres recibieran 3 modios, las mujeres 2 y los niños medio modio. Resuelva, quien pueda, ¿cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños había?

Algo posterior en el tiempo, el egipcio Abu Kamil (s. IX-X) escribió su *Kitāb al-ṭair* (*Libro de los Pájaros*) en el que aborda varios de estos problemas. En su obra, por ejemplo, plantea y resuelve el siguiente problema:

> Con 100 dirhams comprar 100 pájaros de 4 tipos: gansos a 4 dirhams la unidad, pollos a 1 dirham cada uno, palomas a 1 dirham la pareja y estorninos a 1 dirham la decena.

Aunque en este problema hay cuatro incógnitas, la idea es la misma, y tiene 98 soluciones diferentes (invitamos al lector a que las calcule). De hecho, el propio Abu Kamil afirma haber resuelto un problema similar con 2 676 soluciones distintas.

Más ejemplos de problemas análogos se pueden encontrar en el *Liber Abaci* (siglo XIII) y en obras posteriores, sobre todo francesas y españolas. En aquellos textos que carecen de contenidos algebraicos es usual que la resolución del problema sea descriptiva indicando, sin mayor explicación, una secuencia de operaciones con los datos concretos del problema que conduce a la solución. No obstante, el proceso que se propone es siempre el mismo con independencia de los datos del problema, del autor o del idioma.

En el caso del texto escrito por de La Roche, sin embargo, se encuentra una descripción *abstracta* del procedimiento que no se apoya en un ejemplo concreto sino que hace referencia genérica a los valores de a, b, c, M y N que determinan el problema. El lenguaje es retórico y la lectura algo farragosa pero, en términos generales, de La Roche propone el siguiente procedimiento de resolución:

1. Suponemos que $a>b>c$. Así, el autor hace referencia al mayor valor, al menor y al mediano.

2. Se calcula $N' = N - c \cdot M$, y se guarda el resultado.
3. Se calcula $a' = a - c$, $b' = b - c$ y se guardan los resultados.
4. Si a', b' o N' son fraccionarios, se convierten en enteros reescalando adecuadamente.
5. Se descompone $N' = N_1 + N_2$ de forma que N_1 y N_2 sean múltiplos de a' y de b', respectivamente.
6. Se obtiene una solución $x = N_1/a'$, $y = N_2/b'$, $z = N - N_1 - N_2$.

Claramente, la descomposición del paso 5 puede no ser posible o no ser única, por lo que el problema puede no tener solución o tener más de una. El propio de La Roche discute este asunto y llega a decir que «por lo que parece esta regla es ciencia de poca estima».

Resulta evidente que el proceso anterior puede interpretarse fácilmente en términos algebraicos. De hecho, los pasos 2 y 3 son equivalentes a eliminar la variable z de las dos ecuaciones dadas mediante lo que a veces se denomina *método de reducción*. Los pasos 5 y 6 se encaminan a buscar soluciones formadas por enteros positivos de la ecuación resultante del proceso de reducción e implican una búsqueda por tanteo que se puede abordar iterativamente.

Quizás menos evidente, pero posiblemente más interesante, resulta tratar de dar una interpretación aritmética a las operaciones anteriores. Es decir, en el contexto de un problema concreto querríamos asignar significado a las operaciones realizadas y a sus resultados. Para hacerlo, usaremos como ejemplo el problema chino que hemos presentado anteriormente. En ese problema $a = 5$, $b = 3$, $c = 1/3$, $M = N = 100$.

Supongamos que las $M = 100$ aves que compramos fuesen todas polluelos. En tal caso solo nos gastaríamos $c \cdot M = 100/3$ quian y nos quedarían todavía disponibles para gastar $N' = N - c \cdot M = 100 - 100/3 = 200/3$ quian. Esto asigna significado a la operación realizada en el paso 2. Como cada gallo vale 5 quian y cada gallina vale 3 quian, entonces $a' = a - c = 5 - 1/3 = 14/3$ y $b' = b - c = 3 - 1/3 = 8/3$ son el gasto adicional que supone cambiar un polluelo por un gallo o por una gallina, respectivamente. Esta interpretación permite asignar significado a las operaciones del paso 3. El reescalado del paso 4 se justifica simplemente para facilitar las operaciones y poder hablar de divisibilidad. Ahora, el importe todavía disponible N' se debe gastar cambiando polluelos por gallos y gallinas de forma que se gastarán N_1 en gallos y N_2 en gallinas, por ejemplo. Cada vez que se cambia un polluelo por un gallo se gastan a' quian adicionales y si se cambia un polluelo por una gallina se gastan b' quian adicionales. Por tanto, N_1 deber ser un múltiplo de a' y N_2 debe serlo de b'. Esto explica las operaciones del paso 5. Finalmente, el paso 6 resulta evidente.

En la actualidad, ante un enunciado similar a los que hemos presentado, es casi seguro que un resolutor con los conocimientos algebraicos necesarios no debería tener demasiados problemas planteando el sistema de ecuaciones correspondiente. La eliminación de la variable z tampoco supondría demasiada dificultad. La resolución en números enteros positivos de la ecuación en x e y que se obtiene como resultado queda fuera de los contenidos de la secundaria actualmente pero su abordaje por tanteo de forma sistemática puede ser factible.

No obstante, como hemos visto, una resolución puramente aritmética es posible. La interpretación que hemos hecho de las operaciones efectuadas en los pasos 2 a 6 no consiste en una lectura retórica de las manipulaciones algebraicas correspondientes. Al contrario, todas las operaciones y sus resultados tienen un significado claro y concreto dentro del contexto del problema. Evidentemente una resolución que implique estas interpretaciones resulta más compleja que una resolución algebraica, consistente en la mera aplicación de manipulaciones a nivel sintáctico. Pero esta complejidad supone, en correspondencia, una mayor riqueza. De hecho, esta familia de problemas (como otras) ilustra lo que, en nuestra opinión, es a la vez una ventaja y el gran inconveniente del álgebra como método de resolución de problemas: la posibilidad de resolver un problema sin necesidad de entender el sentido ni el significado de las operaciones que se realizan.

Pensamos que trabajar en el aula problemas de este tipo antes de la introducción del lenguaje algebraico, aunque complicado, puede ser muy enriquecedor para los alumnos. De paso, puede permitir motivar en su momento la introducción del lenguaje algebraico y sus operaciones como una herramienta que permita abordar problemas complicados de forma más sencilla, y no como un mero lenguaje formal descontextualizado.