Universidad de los Andes
Colombia
Facultad de Educación

Comunicaciones de innovación curricular en Educación Matemática

http://ued.uniandes.edu.co
@uedUniandes

Universidad de los Andes Colombia | Facultad de Educación

LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL CON EL USO DE INFINITESIMALES

KEMEL GEORGE

2022

Universidad de los Andes Colombia | Facultad de Educación

PRESENTACIÓN

- Nos proponemos reemplazar la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial e integral tradicional. Se trata de un modelo lógico matemático alternativo -todavía no confirmado en el aula de clases- cuyo objetivo es la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial e integral mediante el uso de infinitesimales. Presentaremos una nueva base teórica y metodológica original, que es la del **cálculo como sumas y restas numéricas**, (sólo que a escala infinitesimal), ya que así fue creado e inventado por Leibniz, uno de sus padres fundadores.

- A continuación, presentamos de manera muy resumida el modelo. Las Coordinadoras de la Facultad de Educación de la Universidad de los Andes tienen la ponencia escrita, para ustedes, donde se presenta ampliamente la propuesta, que pueden acceder, acompañada de bibliografía.

-

Universidad de los Andes Colombia | Facultad de Educación

CÁLCULO EXPRESS

- Los *elementos del cálculo* son cinco: la variable, la diferencial, la integral, la función y la derivada.
- No son conceptos separados entre sí, como componentes, sino que están íntimamente vinculados, debido a que cada uno de ellos contiene a los demás elementos, y uno de ellos, los contiene a todos. Nos referimos a la *variable* como elemento primigenio.
- El movimiento ascendente de los elementos es el siguiente: iniciamos con el elemento *variable*, como sucesión de valores numéricos; de las diferencias entre valores consecutivos de la variable se obtiene el elemento *diferencial*; de las sumas de los valores de la variable se obtiene el elemento *integral* como operación inversa; de las relaciones mutuas entre variables se obtiene el elemento *función;* y del cociente de diferenciales se llega al último elemento, *la derivada*.
- El lector sentirá incredulidad al afirmarle que, con estos sencillos conceptos, podemos edificar el cálculo diferencial e integral en el en el aula de clases.

Universidad de los Andes Colombia | Facultad de Educación

LA VARIABLE

La variable es la piedra angular del modelo, por cuanto es el elemento primario del cual se derivan los otros elementos. Estas son las variables:

$$u = u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_N \ , \ v = v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_N$$

Cada término de la sucesión tiene un valor que es **finito**, o **muy grande** o **infinitesimal**. Si los valores de cada término son cero, la variable se llama cero. La igualdad de variables $u = v$ es la igualdad entre los valores, en los términos correspondientes. Las variables se suman, multiplican y dividen, término a término. Con estas operaciones algebraicas obvias, son variables, $u+v$, $u \cdot v$, $\frac{u}{v}$, siempre que en el denominador ningún término sea cero.

Ejemplos de variable

Ejemplos de variables. Se fija $0<N$ muy grande,

$$u=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{N}\right\}$$

$$v=\ 1,2,3,\cdots,N\ \ ,$$

$$w=\ 2N,2N-1,2N-2,\cdots,2N-k,\cdots,N\ \ ,\ 0\leq k\leq N$$

$$x=\ 0,\alpha,2\alpha,3\alpha,\cdots,k\alpha,\cdots,1\ \ ,\ \alpha=\frac{1}{N},\ 0\leq k\leq N.$$

Universidad de los Andes
Colombia

Facultad de Educación

LA DIFERENCIAL

La diferencial es esta variable:

$$du = u_1 - u_0, u_2 - u_1, u_3 - u_2, \ldots, u_N - u_{N-1}, 0$$

Si la diferencial es cero, la variable se llama *constante*. Si la diferencial es constante, la variable se llama *independiente*. Si todos los términos de la diferencial son infinitesimales, la variable se llama *continua*. Un ejemplo de variable que ya vimos, es el siguiente: se toma un entero muy grande N y se obtiene el infinitesimal $\alpha = \dfrac{1}{N}$; se considera el conjunto de sus múltiplos $n\alpha$; obtenemos la variable $x = \{n\alpha \mid 0 \le n \le N\}$. Ella es una variable independiente porque $du = \alpha$ y continua porque α es infinitesimal.

Algebra diferencial

A continuación, tres variables y sus respectivas diferenciales

$$u=\{u_n\},\quad v=\{v_n\},\quad w=\{w_n\},\quad du=\{u_{n+1}-u_n\},\quad dv=\{v_{n+1}-v_n\}, dw=\{w_{n+1}-w_n\}$$

Podemos multiplicar y dividir a gusto (los denominadores no deben tener términos que se anulen): $\dfrac{du}{dv},\quad u^2-w\cdot\dfrac{dv}{dw},\quad v\cdot du^3,\quad w\cdot\dfrac{du}{dv}$

Podemos cancelar diferenciales (no hay límites, no han convergencia, no hay sustituciones).

$$\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dw}=\frac{du}{dw}$$

La diferencial del producto

$$u=\{u_n\},\quad v=\{v_n\},\quad 0\le n\le N,\quad du=\{u_{n+1}-u_n\},\quad dv=\{v_{n+1}-v_n\}$$

$$udv = u_n \ \ v_{n+1}-v_n \quad , \quad vdu = v_n \ \ u_{n+1}-u_n$$

$$udv+vdu = u_n v_{n+1} - 2u_n v_n + u_{n+1} v_n$$

De otra parte,

$$dudv = u_{n+1}v_{n+1} - u_{n+1}v_n - u_n v_{n+1} + u_n v_n$$

sumando,

$$udv+vdu+dudv = u_n v_{n+1} - 2u_n v_n + u_{n+1}v_n + u_{n+1}v_{n+1} - u_{n+1}v_n - u_n v_{n+1} + u_n v_n$$

$$= u_{n+1}v_{n+1} - u_n v_n \ \ = d \ \ uv$$

$$d \ \ uv \ \ = udv + vdu + dudv$$

Universidad de los Andes Colombia | Facultad de Educación

LA INTEGRAL

La integral es esta variable:

$$\int u = \{u_0, u_0 + u_1, u_0 + u_1 + u_2, \cdots, u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_N\}$$

Si la suma es un valor finito, la integral existe.

La integral de la diferencial

La originalidad del método leibniziano reside en la comprensión de la integral como el elemento inverso de la diferencial: la diferencial es una sustracción de valores y la integral es la adición de valores.

$$\int v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_N \,.$$

Hagamos ahora $v = du$, donde $du = \{du_n\}$; el cálculo de $\int v$, es el de la integral de una diferencial $\int du$; $v_n = u_{n+1} - u_n$, sumando, $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{N-1} = u_N - u_0$

Por tanto, $\int du = u_N - u_0$.

La diferencial de la integral

Ahora veamos el *proceso inverso.* Para ello, consideramos la integral $\int v$, la cual tiene la diferencial,

$$\left(v_0+v_1+v_2+v_3+\cdots+v_{n+1}\right)-\left(v_0+v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n\right)=v_{n+1}.$$

Así que podemos escribir, $d\int v = v + dv$ por lo que $d\int v$ difiere de v en un infinitesimal.

Obtenemos la versión elemental del teorema fundamental de cálculo:

$\int d\left(v\right) = d\int v = v$.

LA FUNCIÓN

La función es un par de variables u, v distinguidas por la asignación $v_n = f \; u_n$. Esto se escribe,

$$v = f \; u \leftrightarrow v_n = f \; u_n$$

El símbolo f indica la acción, aplicación u operación, que asigna a cada término de la primera variable, el término que corresponde, de la segunda variable. Como $v = f \; u$, el incremento $v + dv = f \; u + du$, luego la diferencial o variación de f es $dv = f \; u + du \; - f \; u$.

Si la variable v es continua, dv es infinitesimal y $\int f \; u \; du$ es integrable.

LA DERIVADA

La derivada es el quinto y último elemento del cálculo. La derivada es la parte real del cociente de Newton (**la variación sobre el incremento**), en caso de que esta sea una cantidad finita:

$$\frac{dv}{du} = \frac{df}{du} = \frac{f(u+du) - f(u)}{du}, \qquad f'(u) = st\left(\frac{df}{du}\right)$$

Esta es la versión fuerte del teorema fundamental del cálculo, que resume los cinco elementos expuestos:

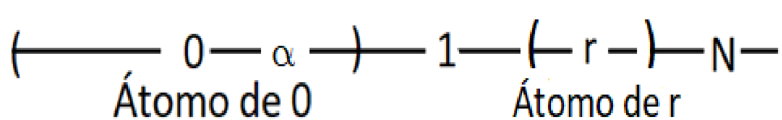
$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f \;\; x \;\; dx = f \;\; x \;\; - f \;\; 0$$

Y eso es todo.

El sistema numérico

Nuestro sistema numérico es bastante más amplio que el campo de los números reales $\mathbb{R}$, por lo que podríamos llamarlo, “la extensión de los números reales”. Se trata, efectivamente, de un campo numérico -que conviene simbolizar por $*\mathbb{R}$, como analogía del símbolo $\mathbb{R}$- linealmente ordenado -con sumas, productos y desigualdades entre sus elementos- quecontiene al familiar campo de los números reales. Lo que lo hace mucho más amplio a $*\mathbb{R}$ que a los números reales $\mathbb{R}$, es que contiene tres tipos de cantidades: los infinitesimales o cantidades muy pequeñas, denotadas por letras como α, β; los números o cantidades cantidades muy grandes, con letras como M, N y los números finitos, que son sumas de números reales e infinitesimales, como $r+\alpha$, $s+\beta$. Como el campo $*\mathbb{R}$ es linealmente ordenado, puede pensarse que está inmerso en la recta geométrica y una figura se vería así:



Como se muestra en la figura anterior, los números muy grandes están, en valor absoluto, a la derecha de todo número real positivo; por lo que se puede definir *muy grande* a un número M tal que $0 < r < |M|$, para todo r real; mientras que los muy pequeños o infinitesimales, en valor absoluto están la izquierda de todo número real positivo; por lo que se puede definir *infinitesimal* a un número α tal que $0 < |\alpha| < r$. Los números finitos son sumas de un número real -*su parte real*- y un infinitesimal. El cero es el único número real que es infinitesimal. Por eso, todos los infinitesimales están a ambos lados del número cero -lo que se llama el átomo de cero $A(\alpha)$- y se escribe $\alpha \approx 0$. Para ubicar todos los números finitos $r+\alpha$ simplemente sumamos a r el átomo de cero, formándose el átomo de r, $A(r)$. se escribe $r \approx r + \alpha$, se dice que r está muy cerca de $r + \alpha$ y que r es su *parte real.*

Aritmética de los infinitesimales

En resumidas cuentas, nuesto sistema numérico tiene tres tipos de números o cantidades: muy grandes, finitas e infinitesimales. Siempre denominaremos *infinitesimales* a las cantidades muy pequeñas, ya que desde Leibniz, grandes matemáticos y científicos, las han usado y se ha construido como concepto. Con la palabra *infinito* no designaremos ningún objeto, ya que es fuente de mucha controversia, desde la fundación de la *teoría de conjuntos* por G. Cantor. El infinito es inspiración, imaginación, metáfora, es lo ilimitado, es todo lo que no podemos contar. Llamamos la atención a los docentes en el uso de este exótico pseudoconcepto, del cual deben desconfiar los estudiantes, porque en el aula de clases, designa por igual, el cardinal del conjunto 'infinito' (Aleph cero, aleph 1,..), tambien significa lo contrario de lo finito, así como el límite de sucesiones divergentes, incluso la división por cero. En este ensayo, hemos dejado de lado la palabra infinito.

Universidad de los Andes Colombia | Facultad de Educación

Abraham Robinson

El fundador de la teoría que dio una base científica, rigurosa, de lo que hoy se denomina *Análisis no Estándar*, es Abraham Robinson, quien inventó el *campo hiperreal* $^*\mathbb{R}$ que aquí ilustramos y así siempre se ha denominado. En la actualidad hay muchas extensiones del campo real $\mathbb{R}$ similares al campo hiperreal (Robinson, Luxemburg y Stroyan), solo que $^*\mathbb{R}$ cumple con el *principio de transferencia*, lo que significa que toda función o relación en $\mathbb{R}$ es una función o relación en $^*\mathbb{R}$ y toda fórmula bien formada que se satisface en un campo, se satisface en el otro campo; en Henle y Kleinberg pueden verse varias de las aplicaciones de este principio. Aunque las referencias históricas despiertan el interés, en el aula de clases es suficiente ejercitar a los estudiantes para que se familiaricen con los infinitesimales. Les repito: la aritmética del campo $^*\mathbb{R}$, además de sorprendernos, es muy sencilla, y no necesitamos más que saber que la suma de infinitesimales es infinitesimal; el producto de un finito por uno muy grande es nuevamente muy grande; mientras que el inverso de un infinitesimal no cero, es un número muy grande y el inverso de un número muy grande es infinitesimal. Entre los números muy grandes hay enteros muy grandes; como los números muy grandes tambien están linealmente ordenados, su aritmética es similar a la de los familiares números reales. No se requiere mucho más que esto para enseñar el cálculo diferencial e integral.

GRACIAS