

Leitura e escrita em Cálculo

Reading and writing in Calculus

MARIA CLARA REZENDE FROTA¹

Resumo

Este artigo investiga as competências de leitura e escrita em Matemática, na perspectiva do letramento em Cálculo. Um quadro teórico é proposto no sentido de caracterizar a leitura do texto matemático e é utilizado no desenho e análise do estudo empírico desenvolvido. Dados foram coletados em duas situações de teste, aplicadas a 35 estudantes de engenharia, que resolveram questões abordando o conteúdo de integrais duplas. As questões são entendidas como o texto matemático escrito pelo professor e que pressupõe um leitor capaz de ler e responder ao texto. Nesse processo, o leitor torna-se autor de um novo texto. Resultados apontam potencialidades do sistema de categorização proposto como um instrumento de pesquisa e de ensino de Cálculo.

Palavras-chave: ensino de Calculo; competências de leitura e escrita em Matemática; letramento em Cálculo.

Abstractt

This paper investigates mathematics reading and writing competencies, from the perspective of Calculus literacy. A theoretical framework is proposed trying to characterize mathematics reading, in order to design and to analyze the empirical study developed. Data were collected in two moments, enrolling 35 undergraduate engineering students solving questions about double integrals. Questions are considered as a mathematics text written by the teacher. That text supposes a reader with competency to read and to give a response to the text. In that process the reader becomes itself a writer of a new math text. Results pointed out that the categorization system proposed presents possibilities as an instrument of the research and the teaching of Calculus.

Keywords: Calculus teaching; competencies of reading and writing in Mathematics; Calculus literacy.

Introdução

A aprendizagem de Matemática pode ser pensada a partir das perspectivas de recepção e produção do texto matemático. Por texto matemático, entende-se o texto gestual, oral ou escrito, compreendendo as diversas formas de representação do pensamento matemático, através da linguagem corrente, de tabelas e gráficos, da linguagem formal simbólica, utilizando expressões, equações e fórmulas.

¹ Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais- mclarafrota@gmail.com

O presente artigo objetiva caracterizar os processos da leitura e da escrita em Cálculo, a partir do texto matemático que se faz presente no cotidiano da sala de aula.

A recepção e a produção do texto matemático dizem respeito a letramentos matemáticos. Por letramento, entende-se a capacidade de ler, interpretar e comunicar ideias de modo oral ou escrito: “*Resultado da ação de ensinar e aprender as práticas sociais de leitura e escrita. O estado ou condição que adquire um grupo social ou um indivíduo como consequência de ter-se apropriado da escrita e de suas práticas sociais*” (SOARES, 2000, p.39). O letramento transcende a alfabetização e pressupõe um uso social da leitura e da escrita, uma prática que conduz a respostas às demandas sociais de leitura e escrita (SOARES, 2000).

Ter letramento matemático significa ter desenvolvido letramentos múltiplos, no que diz respeito às várias linguagens matemáticas, usadas nos contextos da Aritmética, da Álgebra, da Geometria, da Estatística, entre outros. Esses múltiplos letramentos podem ser pensados segundo níveis de complexidade diferentes dependentes do contexto, assumindo assim, uma configuração situada no tempo e no espaço.

Letramentos matemáticos na educação superior compreendem o domínio de conceitos matemáticos amplos, sobre dependências, relações entre variáveis, estimativas, entre outros, e de conteúdos específicos, de acordo com o currículo dos vários cursos. Incluem as diversas formas de comunicação do pensamento matemático, entre elas, o uso de uma linguagem própria, a modelagem, os procedimentos e habilidades de resolução de problemas. Ter letramentos matemáticos é ter desenvolvido competências de utilizar a Matemática em contextos que vão além da Matemática, para lidar com questões científicas de vários domínios e questões do cotidiano.

De um modo geral, admite-se que o aluno ao ingressar na universidade já tenha desenvolvido uma série de competências de ler e escrever Matemática, competências essas apontadas como relevantes segundo as orientações curriculares de vários países.²

A pesquisa em Educação Matemática, no entanto, tem revelado que não necessariamente o aluno universitário já tenha incorporado as habilidades de recepção e produção do texto matemático. Em uma pesquisa conduzida com alunos de um curso de licenciatura, FROTA (2002) evidenciou que o texto didático era pouco utilizado no

curso de graduação pelos professores que ministravam disciplinas de Álgebra, Cálculo e Geometria, entre outras. Esses alunos, atuando como estagiários em escolas da Educação Básica, puderam também verificar que o livro didático era utilizado, por vezes, apenas para que os estudantes tivessem acesso a uma lista de exercícios (FROTA, 2002). Resultados de pesquisa evidenciam uma maior ênfase na comunicação oral de ideias matemáticas, sem uma devida atenção à escrita matemática, em cursos de licenciatura, conforme destacam Freitas e Fiorentini (2008). Há um apelo à oralidade que pode favorecer sistematizações lógicas, mas “*pouco contribui para a exploração e problematização dos conceitos que estão sendo ensinados e aprendidos*” (p.139).

A falta de prontidão para a leitura do texto de Matemática, evidenciada entre alunos universitários, pode ter suas raízes na formação recebida na Educação Básica. Em pesquisa conduzida com professores de Matemática das redes municipal e estadual de São Paulo, Oliveira e Pires (2010) procuraram estabelecer o perfil de leitor e as concepções sobre competências de leitura e práticas de leitura desenvolvidas por esses professores. Os resultados apontaram que o livro didático é pouco explorado em sala de aula e que as práticas de leitura nem sempre se fazem presentes em sala, limitando-se, quando existem, ao uso do texto para o trabalho com tratamento de informações.

As considerações feitas anteriormente indicam a necessidade de incrementar a pesquisa, no sentido de compreender a leitura e a escrita em Matemática na universidade, como práticas sociais, que habilitam o aluno a ler, interpretar e transformar a informação, adquirindo letramentos matemáticos.

Embora não se faça sempre presente na sala de aula, o texto didático de Cálculo é um dos agentes que pode contribuir de forma relevante nesse processo. O texto didático de Cálculo incorpora alterações, algumas provavelmente ditadas pelo movimento da Educação Matemática, outras pelo próprio desenvolvimento das tecnologias computacionais e de editoração, que permitem, por exemplo, o uso e abuso da linguagem gráfica. Textos didáticos como os de Stewart (2009), Anton, Bivens e Davis (2007) e Finney, Weir e Giordano (2002) enfatizam a leitura e a escrita, incentivando a utilização de diferentes formas de representação de ideias matemáticas. Uma análise da estruturação das seções de exercícios propostos permite constatar que o aluno é

² Ver, por exemplo, as Diretrizes Curriculares dos Cursos de Matemática (Brasil); os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs, Brasil); os *standards* do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, USA); as recomendações da Associação dos Professores de Matemática (APM, Portugal).

chamado a trabalhar com exercícios de compreensão, com questões que focalizam conceitos e exercícios nomeados como escrever para compreender. O texto didático de Cálculo, na forma em que hoje se apresenta, procura estabelecer um maior diálogo com o leitor, assumindo a forma de uma aula escrita, incorporando ao texto escrito, características do texto oral da sala de aula.

Se, por vezes, o livro texto não frequenta a aula de Cálculo, o texto matemático escrito está sempre presente, pelo menos na forma de exercícios propostos pelo professor, pressupondo um tipo específico de leitor.

1. Ler e escrever em Cálculo

O ato de ler exige interação do leitor com o texto, de tal forma que ele passe de leitor a autor, reescrevendo o texto (FROTA, 2011). Lemos de maneiras diferentes em momentos diferentes, incorporando no ato de ler a nossa história de vida, os hábitos adquiridos, as experiências vividas, os conhecimentos que adquirimos previamente. Fulgêncio e Liberato (1992) discutem as dificuldades de leitura de um texto, salientando, entre outros pontos, que ler vai além de processar uma informação tornada visível no texto, demandando lançar mão de informações não visuais, ou seja, de conhecimentos anteriores sobre o assunto. Dessa forma, segundo as autoras, a leitura é o resultado de interações entre o que o leitor já conhece (informação não visual) e o que o leitor retira do texto (informação visual).

Bruner (1973) enfatiza as características da aprendizagem como processo e ação para construir novas ideias e conceitos a partir do conhecimento atual e anterior. A ação projetada consiste em selecionar e transformar a informação, construindo hipóteses e tomando decisões. Experiências são organizadas a partir de estruturas cognitivas podendo alavancar o processo que Bruner chama de “ir além da informação fornecida”.

Ao proporem um quadro teórico para analisar os fatores que influenciam as formas de leitura do livro texto de Matemática pelo aluno, Weinberg e Wiesner (2011) fazem uma adaptação das ideias da teoria da leitura orientada para o leitor (“*reader-oriented theory*”). Ao escrever um texto didático de Cálculo o autor projeta um modelo de leitor, o leitor pretendido, ou implicado (“*intended reader*”); o texto escrito por sua vez demanda um tipo de leitor, o leitor ideal (“*implied reader*”), do qual são demandados comportamentos e o domínio de um conjunto de códigos e competências. O leitor que

efetivamente vai ler o texto didático, o leitor real (“*empirical reader*”), tem competências e conhecimentos que não coincidem necessariamente com as competências pretendidas pelo autor, ou com as do leitor ideal.

Uma discussão extensiva sobre o conceito de competências, que foi aos poucos se inserindo no discurso educacional, a partir dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1999), vai além do exequível neste artigo. O construto é complexo, podendo ser definido a partir de diferentes tradições teóricas, segundo um estudo amplo desenvolvido por Weinert (1999).

Interessa-me pensar a leitura e a escrita em Matemática, no contexto do ensino de Cálculo. Nesse contexto, faço a opção por adotar uma conceituação de competência como competência em ação, uma das sete acepções teóricas propostas por Wienert (1999), “*que inclui todos aqueles pré-requisitos cognitivos motivacionais e sociais necessários e/ou disponíveis para aprendizagem e ação bem sucedidas*” (p.11). Segundo o autor, o conceito de competência como ação combina aspectos cognitivos e motivacionais, que dizem respeito a metas, demandas e tarefas de um contexto particular de ação, entendida aqui como a ação de ler e escrever em Cálculo.

O professor, ao conduzir um curso de Cálculo, lida com leitores, no caso, os alunos, dos quais espera determinado tipo de respostas e o domínio de códigos e competências. Assim, através de textos distintos apresentados aos alunos, o professor infere e idealiza um leitor competente para:

- ler a informação na linguagem veiculada, natural ou simbólica, na forma de tabelas ou gráficos, reconhecendo códigos, expressões, notações próprias das várias formas de representação em Matemática;
- ler dentro da informação, operando com a essa informação, seja por meio de conversão da forma de registro, seja através de transformações dentro de um mesmo tipo de registro³ (DUVAL, 2003) e acionando conhecimentos anteriores de forma a relacioná-los com a nova informação;
- ler além da informação, realizando novas operações mais complexas de conversão da forma de registro, para otimizar soluções, para interpretar a informação dentro do próprio contexto da Matemática e, além desse contexto, em conexão com outras ciências e situações aplicadas.

Essas competências caracterizam o que chamo de leitura compreensiva do texto matemático e ao mesmo tempo podem ser interpretadas como categorias para a análise

³ Duval (2003) discute a importância dos vários registros de representação semiótica no processo de aprender Matemática, enfatizando a preponderância da operação de conversão de um tipo de registro de representação a outro.

da leitura do texto matemático.

O exemplo apresentado no Quadro 1 aborda o conteúdo de integrais duplas, que foi objeto do estudo empírico aqui relatado, tendo sido retirado de um trabalho prático proposto para alunos de engenharia de um curso de Cálculo. O exemplo é discutido, objetivando compreender o processo de ler um texto na forma de um exercício proposto, identificando cada uma das tarefas envolvidas e classificando-as de acordo com os três tipos de competências apresentados.

$$\text{Seja } I = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3} dx dy$$

- a) Esboçar o gráfico da região de integração.
- b) Inverter a ordem de integração e calcular o valor da integral.
- c) Dar uma interpretação ao resultado obtido na letra (a).

QUADRO 1. Questão de Trabalho prático – 2011

A leitura compreensiva do texto da questão requer um tipo específico de leitor. Para responder ao que é demandado na letra (a), o aluno precisa primeiramente ler a integral, o que consiste em: identificar o integrando; identificar a ordem de integração; identificar os intervalos de variação de x e de y . A seguir, é necessário ler dentro da integral, para interpretar os intervalos de variação de x e de y como definidores da região plana de integração D , expressa como sendo o conjunto de pontos do plano, tais que $\sqrt{y} \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$. Para fazer o esboço do gráfico da região de integração é necessária uma leitura da informação $D = \{(x, y); \sqrt{y} \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$, identificando as três curvas que delimitam a região do plano, como sendo o arco da parábola $y=x^2$ no primeiro quadrante, a reta $x=1$ e o eixo das abscissas. Lendo além da informação, o aluno vislumbra a possibilidade de expressar a região de integração de outra maneira, como sendo o conjunto de pontos do plano, tais que $0 \leq y \leq x^2$ e $0 \leq x \leq 1$. Essa operação pressupõe do leitor ir além da informação, acionando conhecimentos prévios no contexto da própria Matemática, sobre regiões do plano classificadas ao mesmo tempo como x -simples e y -simples, para verificar a possibilidade de inversão da ordem de integração. A integral dada na ordem $dx dy$, em que a região de integração foi considerada como x -simples, pode ser expressa na ordem $dy dx$, uma vez que a região de integração é também y -simples. Feita, então, a inversão, o aluno obtém a integral expressa na nova forma $I = \int_0^1 \int_0^{x^2} e^{x^3} dy dx$. O leitor é

chamado então, a uma leitura dentro da integral, utilizando conhecimentos anteriores sobre as técnicas de integração, para agora calcular o valor da integral. Finalmente, para responder ao item (c) da questão, o leitor precisa ir além da informação, de forma a estabelecer conexões dentro da própria Matemática, por exemplo, para interpretar a integral como representando o volume do sólido de altura $z = e^{x^3}$ cuja projeção no plano xy é a região D tal que $\sqrt{y} \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$. Indo além da informação e saindo do domínio da Matemática, o aluno pode ainda interpretar a integral como representando a massa de uma placa delgada na forma da região plana, tal que $\sqrt{y} \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$, sendo a densidade dada por $f(x, y) = e^{x^3}$.

O detalhamento feito, na discussão do exemplo apresentado, objetiva ilustrar e destacar a complexidade exigida na recepção e produção do texto de Cálculo. O aluno leitor recebe a informação textual e integra um conjunto de códigos e competências para responder ao texto, produzindo um novo texto matemático.

As competências de leitura apontadas parecem estar subjacentes às categorias propostas por Curcio (1987). A pesquisadora classificou os níveis de compreensão e interpretação de gráficos, em três categorias: ler os dados; ler dentro dos dados; ler além dos dados. A primeira categoria – ler os dados – envolve a leitura dos dados na forma em que são apresentados, demandando habilidades mais elementares de, por exemplo, localizar valores, sem realizar interpretações. A segunda categoria – ler dentro dos dados – demanda habilidades de operar quantitativamente com os dados, o que pressupõe acionar conhecimentos adquiridos anteriormente. A terceira categoria – ler além dos dados – depende de inferências e previsões que demandam do leitor conhecimentos teóricos mais aprofundados, indo além da informação disponibilizada.

O sistema de categorização aqui apresentado é construído a partir de tipos de tarefas apontados por FROTA (2011), relacionados à escrita matemática de estudantes de Cálculo: utilização da linguagem matemática natural e a linguagem simbólica para descrever objetos matemáticos (descrição); representação gráfica de idéias (esboço); atribuição de sentido às integrais representadas algebricamente (interpretação).

No sistema de categorização de tarefas, a descrição de um objeto matemático, o esboço do gráfico e a interpretação desse objeto constituem competências de leitura da informação, leitura dentro da informação e leitura além da informação. A categorização é dependente do contexto, e, portanto situada, caracterizando competências de leitura

como competências em ação.

A leitura do texto de Cálculo pode demandar de um determinado leitor, em determinado momento, uma leitura além da informação para estabelecer conexões dentro da própria Matemática, por exemplo, de forma a interpretar a integral dupla apresentada, como representando o volume de determinado sólido, cuja altura é dada pela função integranda e cuja projeção no plano xy é fornecida pelos limites de integração. O mesmo texto, retomado posteriormente pelo mesmo leitor, pode demandar apenas uma leitura da integral e dentro da integral, uma vez que, neste segundo momento, o leitor já teria agregado ao seu repertório de conhecimentos sobre o assunto, por exemplo, a inferência sobre a possibilidade de interpretação do resultado da integral como volume, a partir das condicionantes dessa interpretação, independentemente da resolução da integral em si.

As categorias apresentadas, estabelecidas a partir de um diálogo entre o leitor implicado e o leitor ideal, objetivam compreender o processo de leitura do texto de Cálculo, sob a ótica do professor. Ao propor um exercício, o professor desempenha o papel de autor do texto que visa um leitor pretendido, mas que enquanto professor, precisa levar em conta as competências que o texto exige do leitor real.

Por sua vez, ao resolver a questão proposta, o aluno interage com o texto e se transforma em autor de um novo texto resposta. Essa escrita é uma “*escrita que envolve articulação e explicação das idéias matemáticas com o propósito de entendê-las de forma mais aprofundada*” (PORTER e MASINGILA, 2000, p.166). Essas autoras investigaram os efeitos da metodologia de *escrever para aprender Matemática*⁴, relacionados ao desenvolvimento do conhecimento conceitual e do conhecimento procedimental em Cálculo. Porter e Masingila (2000) trabalharam com dois grupos, em um curso de Introdução ao Cálculo, utilizando abordagens diferenciadas. Um dos grupos utilizou a metodologia *escrever para aprender Matemática*, discutindo e registrando por escrito os conceitos e procedimentos adotados na resolução de problemas e o outro grupo discutiu as questões, mas não efetuou registros escritos de forma sistematizada. As análises estatísticas conduzidas não apontaram diferenças significativas entre os dois grupos. Analisando o resultado, as autoras levantam a hipótese de que o mais importante no processo de aprendizagem pode ser o ato de articular e discutir as idéias matemáticas de forma oral ou escrita, e não o ato de

registrar por escrito, sugerindo a necessidade do desenvolvimento de novos estudos para investigar em profundidade acerca da veracidade ou não da conjectura feita.

O ato de articular as ideias a partir da forma oral de expressão é, a meu ver, relevante, enquanto uma experiência de leitura coletiva e compartilhada, a ser vivenciada na sala de aula de Matemática. Entretanto, é preciso ir além do texto oral e apropriar-se da escrita enquanto instrumento de reflexão e de aprendizagem. A escrita exige reflexão sobre as experiências matemáticas, de forma crítica, podendo desencadear processos cognitivos e metacognitivos (POWELL e BAIRRAL, 2006). A escrita em Cálculo pode beneficiar aluno e professor, mediando um processo reflexivo na construção de conhecimentos (ASPINWALL e MILLER, 2001; COOLEY, 2001). Escrever para aprender Cálculo pode viabilizar um conhecimento sobre o próprio conhecimento e um autocontrole da aprendizagem (FLAVELL, 1979).

O sistema de categorias de leitura do texto matemático, como um sistema de competências em ação de ler e escrever em Matemática, pode ser útil para a proposição e análise de questões de Cálculo, consideradas como um tipo de texto que vai ser lido pelo aluno e respondido na forma de um novo texto. O estudo empírico aqui relatado objetiva investigar algumas potencialidades do sistema de categorização proposto, enquanto instrumento de pesquisa e instrumento de ensino.

2. O contexto de pesquisa e ensino

O estudo empírico envolveu estudantes de engenharia de uma instituição particular de ensino de Minas Gerais, cursando uma disciplina que aborda o estudo de integrais de funções de várias variáveis, integrais de linha e integrais de superfície.

A disciplina é planejada de forma que os alunos desenvolvam um conjunto de atividades que possam favorecer hábitos de estudo e o autocontrole do processo de aprendizagem. As atividades compreendem: a revisão das principais curvas planas em coordenadas cartesianas, nas suas formas de representação algébrica e gráfica, para que os alunos possam identificar regiões do plano delimitadas por essas curvas; o estudo das curvas e suas equações polares; a identificação das principais superfícies, suas equações e gráficos. Os estudantes podem, ainda, participar voluntariamente de oficinas de Cálculo, trabalhando em grupos, na resolução das tarefas de revisão propostas, na leitura do texto

⁴ Do inglês “Writing to learn mathematics”(WTLM).

didático e na resolução dos exercícios recomendados.

O sistema de avaliação da disciplina prevê a realização de trabalhos e provas. Os dados coletados para o presente artigo compreenderam duas situações de teste, envolvendo o conteúdo de integral de funções de mais de uma variável real. Na primeira situação de teste (ST1), os alunos resolveram em duplas, um trabalho composto de quatro questões, dentre as quais deveriam escolher três para resolver. Na segunda situação de teste (ST2), os alunos foram avaliados individualmente, por meio de uma prova composta de cinco questões, dentre as quais deveriam resolver quatro. Do total de 45 alunos da turma, participaram das duas situações de teste, 35 estudantes. A questão objeto de análise neste artigo foi proposta com pequenas modificações nas duas situações de teste, mantendo-se a mesma estrutura básica conforme apresentado no Quadro 2, de forma a viabilizar a comparação de resultados.

<p>Questão 1 – ST1</p> <p>a) Expressar usando coordenadas polares e calcular $I = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$</p> <p>b) Descrever o sólido cujo volume pode ser expresso pela integral da letra (a).</p> <p>c) Dar duas outras interpretações possíveis ao resultado obtido em (a).</p>
<p>Questão 2 – ST2</p> <p>Seja $I = \int_{-4}^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$</p> <p>a) Expressar a integral I em coordenadas polares e calcular o seu valor.</p> <p>b) Descrever e esboçar o gráfico do sólido cujo volume pode ser expresso pela integral I.</p> <p>c) Dar duas outras interpretações ao resultado da integral da letra (a).⁵</p>

Quadro 2. Questões das situações de teste ST1 e ST2 - 2011

Na primeira situação de teste (ST1), os alunos trabalharam em duplas, tendo acesso ao livro texto e à calculadora, bem como a suas anotações de sala. Na segunda situação de teste (ST2), os alunos trabalharam individualmente, podendo ter acesso a um resumo, que cada estudante deveria confeccionar previamente, como forma de se preparar para a prova.

Os textos escritos coletados nas duas situações de teste foram analisados a partir do sistema de categorias apresentado, buscando identificar as competências de leitura e da escrita em Cálculo dos estudantes.

⁵ Para a segunda situação de teste (ST2) foram utilizadas duas questões com o mesmo enunciado, variando

3. Características de leitura e escrita dos estudantes

Uma análise global dos dados coletados possibilitou identificar aspectos da leitura e da escrita em Cálculo dos alunos a partir das categorias: ler a informação, ler dentro da informação e ler além da informação.

Cada uma das questões, nas duas situações de teste, foi elaborada e analisada a partir das tarefas envolvidas na sua resolução, classificadas de acordo as categorias de leitura. Assim, considerando a questão do trabalho prático (ST1), as três primeiras tarefas envolvem a leitura da integral: identificar o integrando (T1); identificar a ordem de integração (T2), identificar a variação de x e y (T3). As operações de identificar os limites de acordo com a ordem de integração (T4) e identificar a região de integração (T5), esboçando o seu gráfico (T6) exigem uma leitura dentro da integral. Expressar em coordenadas polares a região de integração (T7) e expressar em coordenadas polares a integral (T8) são duas tarefas que demandam uma leitura além da informação, buscando no contexto da própria Matemática a equivalência da representação cartesiana da região do plano como $D = \{(x, y); -4 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{16 - x^2}\}$ e da representação polar dessa região como $D = \{(r, \theta); 0 \leq r \leq 4, 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Resolver a nova integral obtida na região (T9) é uma tarefa que consiste em ler dentro da integral, operando com as informações disponíveis, acionando conhecimentos prévios para a escolha da técnica de integração adequada.

Para resolver a letra (b) é preciso ir além da informação dada, acionando conhecimentos prévios no contexto da própria Matemática, ao realizar as tarefas de interpretar a integral como o volume do sólido de altura $z = x^2 + y^2$, cuja projeção no plano xy é a região $D = \{(x, y); -4 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{16 - x^2}\}$ (T10). Na situação de teste (ST2) era exigida também a representação gráfica do sólido (T11), não exigida na situação de teste ST1.

Finalmente, na letra (c) o aluno precisa ir além da informação, no contexto não mais da Matemática, mas da Física, para executar as duas tarefas de interpretar a integral como sendo, por exemplo, a massa da placa delgada na forma de D , com densidade

apenas a integral proposta
$$I = \int_0^5 \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy .$$

$f(x, y) = x^2 + y^2$ (T12), ou o momento polar de inércia da placa delgada na forma de D com densidade constante, igual a 1 (T13).

Cada tarefa objeto de análise foi classificada de acordo com uma das seguintes categorias ordinais: 1 – quando a tarefa estava totalmente incorreta ou não foi realizada; 2 – se a tarefa estava parcialmente incorreta; 3 – se a tarefa estava parcialmente correta; 4 – quando a tarefa estava totalmente correta. O quadro da Figura 1 exemplifica o processo de correção feito, a partir das tarefas T12 ou T13. As respostas dos alunos foram digitadas, objetivando uma melhor leitura de arquivos armazenados na forma de imagens.

Tarefa	Resposta	Classificação	Justificativa
T12	<i>O primeiro momento em relação xy com densidade igual x^2+y^2 e é limitado no intervalo $-4 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq \sqrt{16-x^2}$ (A19)</i>	1	A interpretação é incorreta, considerando tratar-se de uma integral dupla.
T12	<i>A integral pode representar a massa. (A14)</i>	2	Não foi descrita a placa e não foi identificada a função densidade.
T13	<i>O momento polar de inércia de D $0 \leq y \leq \sqrt{16-x^2}$ e $-4 \leq x \leq 4$ (A29)</i>	3	Não é informada que a densidade, no caso, é igual a 1.
T13	<i>Momento polar em relação à origem da placa de densidade na forma de D, $0 \leq y \leq \sqrt{16-x^2}$, $-4 \leq x \leq 4$, cuja densidade é igual a 1. (A30)</i>	4	A interpretação é correta e todos os elementos descritores são nomeados.

QUADRO 3. Exemplificação do valor atribuído às tarefas T12 ou T13 na situação de teste ST2

Para cada turma, foram calculadas as médias para cada uma das categorias, nas duas situações de teste. O gráfico da Figura 1 apresenta a média da turma, nas duas ocasiões de coleta de dados, designadas como ST1 e ST2, para cada uma das três categorias de análise da escrita e leitura dos alunos: ler a informação, no caso a integral (LI), ler dentro da informação (LDI) e ler além da informação (LAI). As barras de erro destacadas representam os intervalos de confiança de 95% das respectivas médias.

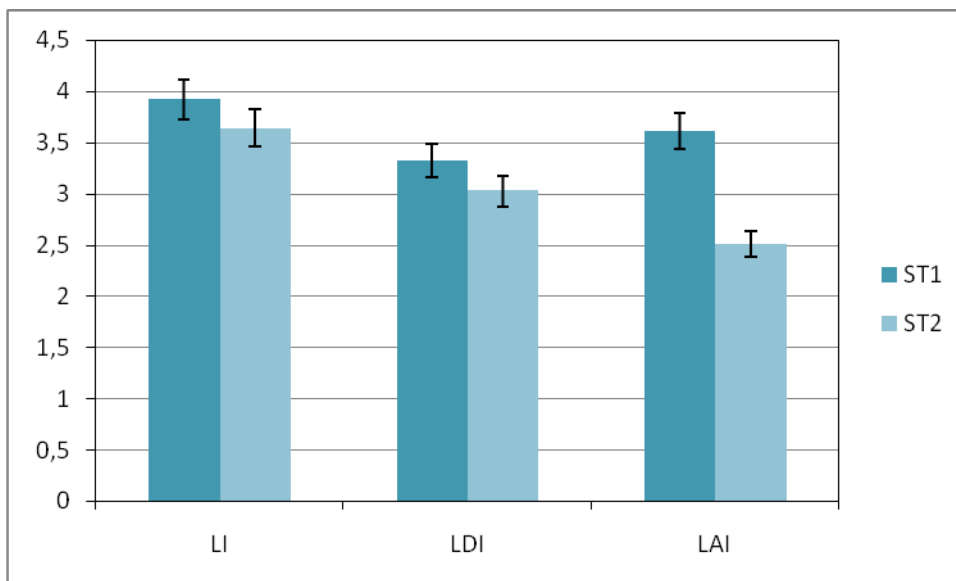


FIGURA 1: Categorias de leitura nas situações de teste ST1 e ST2

FONTE: Elaborada pela autora

Esse fato é ilustrativo de que os alunos assimilaram os processos envolvidos na leitura do tipo LI e do tipo LDI, mostrando-se capazes de desenvolver as tarefas correspondentes a essas categorias, não apenas a partir de um trabalho em dupla e com possibilidade ampliada dos materiais de consulta (ST1), mas trabalhando individualmente, com acesso apenas a um resumo elaborado previamente (ST2).

Com relação às tarefas que exigiam ler além da integral registra-se, no entanto, um decréscimo estatisticamente significativo da média da turma da primeira para a segunda situação de teste, o que é ilustrativo do fato que a maior dificuldade encontrada pelos alunos, ao trabalharem individualmente (ST2), está na interpretação da integral no contexto da própria Matemática ou no contexto da Física.

Os resultados evidenciados a partir da análise do gráfico da Figura 1 motivaram o estudo de cada uma das tarefas que envolvia a leitura além da informação (LAI).

O gráfico da Figura 2 apresenta a média da turma, nas duas ocasiões de coleta de dados, para cada uma das seis tarefas relacionadas à categoria LAI. A tarefa T11, que solicitava um esboço do gráfico do sólido cujo volume pode ser representado pela integral dada, só fez parte do conjunto de tarefas da segunda situação de teste, motivo pelo qual aparece apenas uma barra relacionada a essa tarefa.

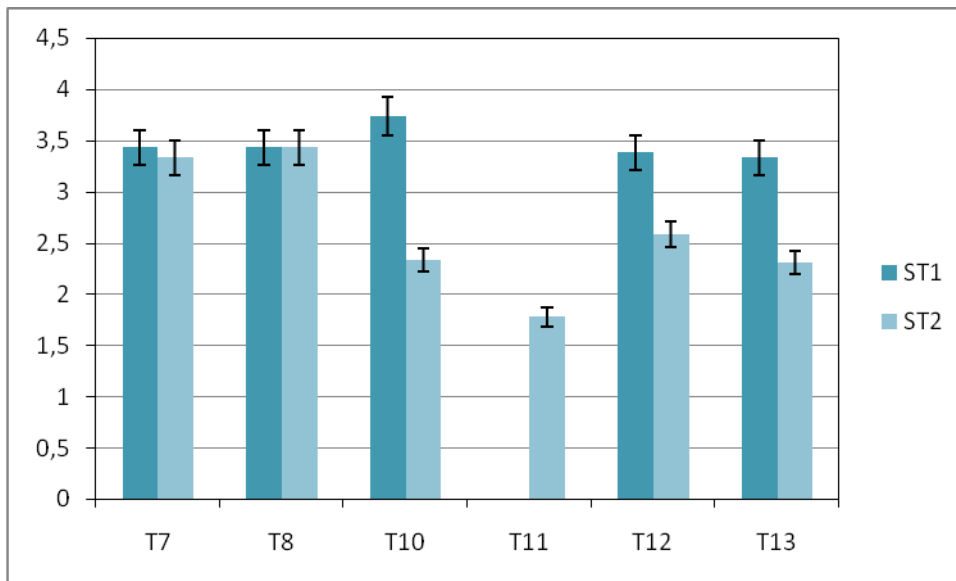


FIGURA 2: Tarefas de leitura além da informação (LAI) nas situações de teste ST1 e ST2
FONTE: Elaborado pela autora

Uma leitura dos dados do gráfico da Figura 2 permite verificar que a maior média da turma na primeira situação de teste, foi na resolução da tarefa T10, que exigia descrever

o sólido cujo volume podia ser representado pela integral $I = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$.

Este resultado contrasta com o resultado da segunda situação de teste, em que a média da turma na tarefa T10 é a segunda menor, em comparação com as médias de todas as tarefas da categoria LAI.

A tarefa T11 da segunda situação de teste foi aquela para a qual a média da turma foi menor, comparativamente às médias das demais tarefas. A tarefa T11 exigia ir além da informação dada, identificando as superfícies que delimitam o sólido, dadas na sua representação algébrica, para então proceder a uma conversão de registro a fim de representar graficamente o sólido, cujo volume era modelado pela integral. A dificuldade na execução da tarefa parece derivar da dificuldade de estudantes de Cálculo no traçado de gráficos de curvas e superfícies (NASSER, 2009). Na realidade, parece haver dificuldades de ordens distintas. A primeira refere-se à dificuldade de associar uma representação algébrica à superfície. Tal dificuldade não parece decorrer apenas da falta de conhecimento declarativo ou procedimental, mas de uma capacidade de abstração, de atribuir significados às expressões matemáticas (PINTO, 2009). A segunda dificuldade é a exigência de visualizar, no sentido de criar uma imagem do sólido, envolvendo o desenvolvimento da competência visual-espacial. Os dois tipos de dificuldades foram evidenciados no trabalho desenvolvido.

A Figura 4 apresenta o esboço feito pelo aluno A19, ilustrando suas dificuldades em reconhecer a superfície de equação algébrica $z=x^2+y^2$ como um parabolóide de revolução, ignorando que o traço da superfície no plano xz seria uma parábola e não duas retas. Apesar da incorreção na identificação da superfície, o aluno foi capaz de imaginar o sólido, como lateralmente limitado pelo cilindro, reconhecendo sua projeção no plano xy como sendo um semi-disco, embora não tivesse indicado o raio, cometendo ainda um erro na nomeação dos eixos.

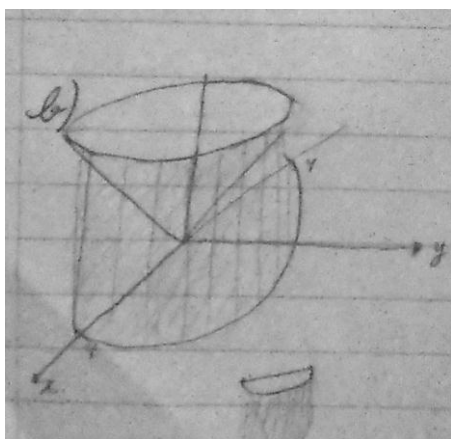


FIGURA 3: Esboço do sólido – Aluno A19 (ST2)

As tarefas T12 e T13 que exigiam interpretações da integral no contexto da Física também foram mais acertadas na primeira situação de teste, de acordo com a leitura gráfica das médias da turma nas duas situações. As tarefas podiam ser realizadas sem o cálculo do valor da integral, dependendo apenas uma leitura compreensiva da fórmula

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dA$$

no contexto da Física. Esse tipo de leitura não exigia a memorização

de fórmulas, considerando que muitas das fórmulas estavam disponíveis nos resumos elaborados. Alguns alunos afirmaram, simplesmente, que a integral poderia ser “o momento de inércia em relação à origem” (Aluno 13), sem especificar o corpo e a função densidade. Na forma apresentada, a resposta, que foi classificada como parcialmente incorreta, revela dificuldades de uma leitura compreensiva em Cálculo, embora leituras dessa natureza tenham sido incentivadas pela professora da turma ao longo do curso.

De modo geral, as respostas dos estudantes à questão proposta apresentaram falta de

rigor no uso da linguagem matemática formal. Esse resultado, evidenciado em algumas das respostas do Quadro 1, mostra que essa linguagem não tem sido apropriada por esses alunos, mesmo após dois semestres de curso, envolvendo estudos do Cálculo de funções de uma variável real.

A Figura 5 apresenta o texto escrito pelo aluno A36 em resposta à questão da segunda situação de teste.

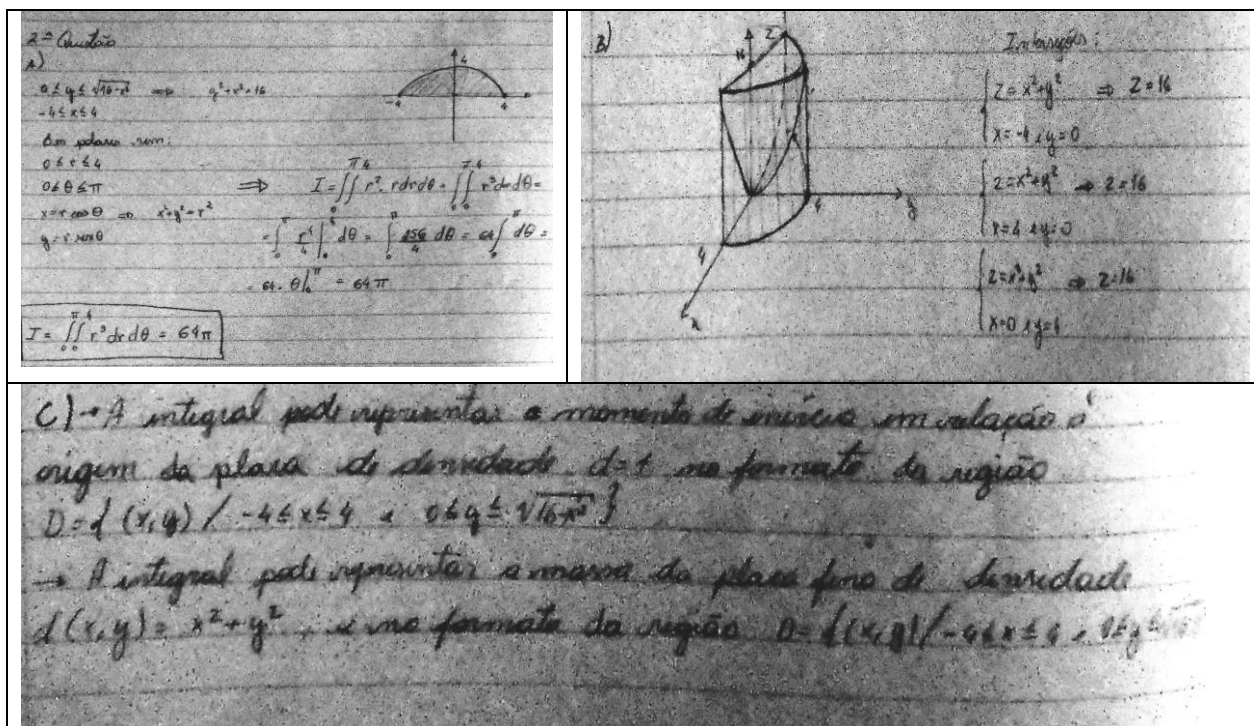


FIGURA 5: Texto resposta do aluno A36 para Questão 2 – ST2

A Figura 5 revela a clareza de linguagem e o rigor matemático, que evidenciam as competências de leitura e escrita do aluno ao lidar com a informação, dentro dela e além da informação, no contexto em estudo. É possível perceber que o aluno não descreveu o sólido, limitando-se a representá-lo na forma gráfica, o que o diferencia de grande parte dos demais alunos, que se limitou a descrever o sólido na forma algébrica.

A variabilidade de respostas nas duas situações de teste é ilustrativa da complexidade do processo de aprendizagem de um conteúdo. Embora na primeira situação de teste se adotasse uma prática de leitura e escrita cooperativa, na composição conjunta de um texto, a incorporação de conceitos é sempre dependente de aspectos pessoais de práticas de leitura e escrita relacionadas, com certeza, à história de aprendizagem de cada aluno.

Considerações finais

Resultados relatados neste artigo integram um projeto amplo de pesquisa que venho desenvolvendo, acerca da recepção e produção do texto de Cálculo. Ao promover a reflexão a partir do texto escrito de uma questão de integral dupla, proposta para estudantes de engenharia, o objetivo foi conhecer em profundidade o processo de leitura e escrita, que compreende ler a informação, ler dentro da informação e além da informação para transformá-la.

O texto que propõe, por exemplo, o cálculo da integral $I = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3} dx dy$ é lido de

maneiras diferentes, por leitores diferentes. Essas leituras diferenciadas são decorrentes de experiências vivenciadas em maior ou menor profundidade. Lemos com que os nossos olhos vêem, incorporando no ato de ler, a nossa história de vida. O professor tem mais conhecimentos, experiências e competências do que o aluno. Assim, ele logo infere sobre a necessidade de inversão da ordem de integração, sobre interpretações variadas que podem ser dadas à integral, no contexto da Matemática ou da Física. Segundo Artzt e Armour-Thomas (1998), o conhecimento do professor pode ser pensado como um sistema integrado de informações *internalizadas* sobre o conteúdo, o aluno e a pedagogia. Para o aluno, o ato de ler e escrever, respondendo ao texto, é um processo que exige além de internalizar informações sobre o conteúdo e sobre si mesmo, o desenvolvimento de competências de leitura e escrita, a partir do repertório de experiências vivenciadas de ler e escrever para aprender Cálculo.

O conhecimento do professor compreende, segundo Shulman (1986), um conhecimento do próprio conteúdo, um conhecimento pedagógico do conteúdo e um conhecimento do currículo. O conhecimento da pesquisa em Educação Matemática pode também ser relevante, não obstante as dificuldades relativas ao fato de que os processos de ensino e aprendizagem dependem parcialmente do entorno cultural e social em que se desenvolvem, conforme pondera Artigue (2003). Para esta pesquisadora, o conhecimento baseado na pesquisa não se transforma facilmente em estratégias educativas efetivas.

As competências de leitura escrita em Cálculo, caracterizadas a partir de um conjunto de tarefas de ler a informação, dentro da informação e além da informação, numa situação de resolução de uma questão de Cálculo, são resultados de pesquisa que podem ter reflexos positivos na sala de aula.

A incorporação da metodologia de ler e escrever para aprender Cálculo demanda do professor pensar e desenhar estratégias de ensino e aprendizagem, que possam incentivar o que foi caracterizado como leitura e escrita compreensiva em Cálculo.

Entre tais estratégias, destaco:

- a elaboração pelo professor de textos que objetivam a revisão de tópicos importantes estudados anteriormente, favorecendo que o aluno aprenda a ler a informação e dentro da informação, operando com a mesma;
- a elaboração pelo aluno de textos-resumo que sintetizam os principais resultados teóricos identificados a partir da leitura dos vários textos presentes na sala de aula de Cálculo, sejam eles o texto didático, o texto oral, o texto proposto pelo professor na lousa, ou o livro texto;
- o desenho de atividades pelo professor que remetem o aluno à leitura e discussão do texto matemático, acerca de um tópico ainda não introduzido na sala de aula, de forma que o aluno possa responder ao novo texto através da leitura da informação, dentro da informação e além dela;
- a discussão e a modelagem de problemas em decorrência de uma leitura além da informação no contexto da própria Matemática ou em contextos de outras ciências aplicadas.

As atividades citadas são algumas das estratégias didáticas que tenho adotado e objetivam o letramento em Cálculo dos alunos na medida em que buscam que o aluno se aproprie da escrita e de suas práticas sociais.

Adotar a perspectiva do letramento em Cálculo e do desenvolvimento de competências da leitura e escrita compreensiva parece-me ser, ao mesmo tempo, uma decisão correta e arriscada. É arriscada porque pode reforçar uma entre duas visões. A primeira que favorece os conhecimentos matemáticos em outras áreas, desprezando o papel de operar dentro da informação dada, que esta competência desempenha. A segunda visão que sobrevaloriza o operar dentro da informação, a ponto de ignorar o desenvolvimento da competência de ir além da informação matemática dada.

Pensar um curso a partir da perspectiva de letramentos matemáticos parece-me ser uma opção correta, na medida em que é possível desenvolver o programa de forma equilibrada e que favoreça o desenvolvimento integrado das três competências em ação, necessárias para a leitura e a escrita compreensiva em Cálculo.

Referências

- ANTON H., BIVENS, I. & DAVIS, S. (2007). *Cálculo*, v. 2. Porto Alegre: Bookman.
- ARTIGUE, M. (2001). What can we learn from Educational Research at the University Level. In: HOLTON, Derek (ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic, p.207-220
- ARTZT A. F.; ARMOUR-THOMAS, E.(1998). Mathematics teaching as problem solving: a framework for studying teacher metacognition underlying instructional practice in mathematics. *Instructional Science*, v. 26, n.1-2, p. 5-25.
- ASPINWAAL, L.; MILLER, L. D. (2001). Diagnosing conflict factors in calculus through student's writings: one teacher's reflections. *Journal of Mathematical Behavior*, v. 20, p.89-107.
- BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. (1999). *Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio*. Brasília: Ministério da Educação.
- BRUNER, J. (1973). *Going beyond the information given: studies in the psychology of knowing*. New York: Norton.
- COOLEY, L. (2002). Writing in calculus and reflective abstraction. *Journal of Mathematical Behavior*, v.21, p.255-282.
- CURCIO, F. R. (1987). Comprehension of Mathematical Relationships Expressed in Graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 18, n. 5, p. 382-393.
- DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *Aprendizagem em Matemática*, Campinas, SP: Papirus, p.11-33.
- FINNEY, R. L.; WEIR, M. D.; GIORDANO, F. R. (2002). *Cálculo de George B. Thomas*, v.2. São Paulo: Addison Wesley.
- FLAVELL, J. H. (1979). Metacognition and Cognitive Monitoring. *American Psychologist*, v. 34, n.10, p. 906-911.
- FREITAS, M. T.; FIORENTINI, D. (2008). Desafios e potencialidades da escrita na formação docente em Matemática. *Revista Brasileira de Educação*, v. 13, n.37,
- FROTA, M. C. R. (2002). Competências de Representação e Comunicação em Matemática: o papel do livro didático. In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICAS DE ENSINO, IX, Goiânia, 2002. *Anais...* Goiânia, Goiás, 2002, p. 1-16.
- FROTA, M. C. R. (2011). Escrever para aprender Cálculo. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIII. *Anais...* Recife, Pernambuco, jul. 2011, p.1-10. Disponível em <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM>. Acesso em 18 de ago. 2011.
- FULGÊNCIO, L.; LIBERATO, Y. *Como Facilitar a Leitura*. São Paulo: Contexto, 1992.
- NASSER, L.(2009). Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de cálculo no traçado de gráficos. In: FROTA, Maria Clara Rezende; NASSER, Lilian (Orgs.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*. Recife: SBEM, p. 43-58.
- OLIVEIRA, E.C.; PIRES, C. C. (2010). Uma reflexão acerca das competências leitoras e das concepções e crenças sobre práticas de leitura nas aulas de Matemática. *Bolema*, v.

23, n 37, p. 931- 953.

PINTO, M. M. F. (2009). Re-visitando uma teoria: o desenvolvimento matemático de estudantes em um primeiro curso de análise real. In: FROTA, Maria Clara Rezende; NASSER, Lilian. (Orgs.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*. Recife: SBEM, p.27-42.

POWELL, A. B.; BAIRRAL, M. (2006). *A escrita e o pensamento matemático: interações e possibilidades*. Campinas: Papirus.

PORTER, M. K.; MASINGILA, J. O. (2000). Examining the effects of writing on conceptual and procedural knowledge in calculus. *Educational Studies in Mathematics*, v.42, n.2, p. 165-177.

SHULMAN, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, v.15, n.2, p. 4-14.

SOARES, M. (2000). *Letramento: um tema em três gêneros*. Belo Horizonte: Autêntica. 2000.

STEWART, J. (2009). *Cálculo*, v.2. São Paulo: Cengage Learning.

WEINBERG, A.; WIESNER, E. (2011). Understanding mathematics textbooks through reader-oriented theory. *Educational Studies in Mathematics*, v. 76, p. 49-63.

WEINERT, F. E. (1999). Concepts of Competence. *DeSeCo Expert Report*. Swiss Federal Statistical Office. Neuchâtel. Disponível em< <http://www.deseco.admin.ch>>. Acesso em 10 ago. 2011.