

## La comprensión y reflexión de los procesos, técnicas y rutas de demostración geométrica que emergen en las prácticas de estudiantes para profesor

Camilo Arévalo\*  
Oscar González\*\*

### RESUMEN

Algunos trabajos investigativos constatan el fracaso respecto a la capacidad de los alumnos para formular una demostración (Gaud y Guichard, 1984). Un estudio realizado por Senk (1985) en EE. UU. dio como resultado que de 2.699 graduandos, el 85% no domina la formulación de una demostración. Ante esta problemática se plantea una propuesta, que pretende que tres estudiantes para profesor de matemáticas se involucren con un problema que exija la demostración geométrica, y a partir de esto se reconozca la importancia de reflexionar y comprender sobre la estructura y los métodos que se abarcan a la hora de abordar una demostración en geo-

metría. En este proceso de auto-reconocimiento y auto-reflexión de los procesos y métodos generados con el trabajo en la demostración geométrica, se pone en manifiesto que las prácticas educativas dan evidencia de que otro de los grandes aspectos que complejiza este problema de la enseñanza de la demostración geométrica está relacionado con la presentación de las afirmaciones que estructuran una demostración, ya que en la mayoría de casos, ni el docente ni sus educandos problematizan lo que parecería ser tan evidente.

**Palabras clave:** estrategias, método, demostración, geometría, resolución de problemas.

\* Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. Dirección electrónica: kmilo741@hotmail.com

\*\* Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. Dirección electrónica: tujavi10@hotmail.com

## ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN

En el texto *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas* de Nicolás Balacheff (1982) el autor afirma que no por el hecho de que la demostración sea en sí misma un contenido de enseñanza, esta puede dejar de ser tratada como un tema específico y esencial dentro de la enseñanza de las matemáticas. Para que la demostración pueda ser enseñada dentro de las aulas escolares, ha de someterse a transposiciones didácticas, a fin de hacer comprensibles los procesos, relaciones y nociones que esta comprende. Es lógico pensar que la demostración adquiere distintos significados dependiendo del contexto en el que se enseñe; sin embargo, estudios realizados por el mismo autor muestran cómo los textos implementados para la enseñanza de la demostración se enmarcan bajo características propias de la actividad científica, haciendo que la demostración sea vista exclusivamente con un uso práctico, e ignorando el compromiso social que esta implica.

- Pregunta de investigación: ¿Cómo se genera la estructuración de una demostración en geometría en tres estudiantes para profesor dentro de un proceso de resolución de problemas?
- Objetivo: describir, evidenciar y reflexionar sobre algunos procesos, esquemas y rutas de demostración geométrica que emergen en la práctica de resolución de problemas en tres estudiantes para profesor.

## MARCO TEÓRICO

A partir de la importancia que en la actualidad ha alcanzado la educación matemática, por la preocupación y mirada a las dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los objetos matemáticos (Hanna, 1996), en esta oportunidad se proyectará un trabajo hacia la demostración geométrica que presenta dificultades en la enseñanza de la Educación Básica debido no solo a la poca intensidad horaria que se establece en la educación, sino también a la poca importancia que le dan los maestros de matemáticas; como lo menciona Gil Pérez (1998), "*La geometría no ha logrado aún recuperar el lugar que le corresponde. Es proceso de transformación lento, de formación y capacitación para los nuevos docentes, que son productos de un modelo diferente de enseñar*".

La *demostración* es una prueba formal y dominante, ya que es una serie de enunciados organizados y validados desde un conjunto de reglas que le dan la esencia de veracidad. Se caracteriza por su forma estructurada de

gran rigor y formalidad. "una demostración se convierte en tal, después del acto social de 'aceptar que lo es'. (Manin, citado por Hanna, 1983, p. 71). La demostración en matemáticas se fundamenta sobre un cuerpo de conocimientos fuertemente institucionalizado, sobre un conjunto de definiciones, de teoremas y de reglas de deducción, cuya validez es aceptada socialmente.

Ángel Gutiérrez (2001) propone una clasificación que suple los vacíos de las teorías de los autores Balacheff (1986); su clasificación se caracteriza y se enfoca en el análisis de los vacíos conceptuales que generan los estudiantes al interpretar la geometría. Esta clasificación busca enmarcar a los estudiantes en las etapas que propone el autor, basándose en los análisis e interpretaciones pertinentes. Su clasificación la fundamenta en dos grandes grupos: *demostraciones empíricas* en las que el elemento de verificación son los ejemplos y las *demostraciones deductivas*, que se basan en el análisis y razonamiento de propiedades e ideas lógicas de abstracción formal. Esta será la clasificación con la que caracterizaremos nuestro trabajo, porque expone las etapas desde la misma demostración geométrica y los procesos que se desencadenan, llevando a garantizar el trabajo que estamos realizando. Finalmente, la propuesta de Ángel Gutiérrez frente a los procesos de prueba en la demostración geométrica y la propuesta de Mason frente al proceso de resolución de problemas serán el enfoque de este trabajo, donde la propuesta de Mason servirá como enlace metodológico a la propuesta de Gutiérrez. Se establecerán unas categorías de demostración geométricas enmarcadas en una metodología de resolución de problemas; este será el producto final del presente trabajo.

Para el fin que implica este trabajo es importante reconocer la diferencia entre algunas palabras que en ocasiones suelen confundirse o concebirse como lo mismo: Lo que se considera como **explicación** desde la perspectiva de Piaget (1970), se dice que, "en el terreno de las ciencias deductivas", es en primer lugar despejar las "razones" para "responder a la pregunta del porqué". Una prueba se da cuando una explicación es reconocida y aceptada por un grupo o comunidad. La **demostración** es una prueba formal y dominante, ya que es una serie de enunciados organizados y validados desde un conjunto de reglas que le dan la esencia de veracidad. Se caracteriza por su forma estructurada de gran rigor y formalidad. "una demostración se convierte en tal, después del acto social de "aceptar que lo es". (Manin, citado por Hanna, 1983, p. 71).

### 3. METODOLOGÍA

La metodología será la enmarcada en el tipo de estudio de caso y seguirá las siguientes fases de trabajo:

- I. Planteamiento y asignación del problema: A cargo del profesor
- II. Resolución del problema: A cargo de los estudiantes para profesor
- III. Método de resolución del problema: A partir de las fases de resolución de problemas descritas por Mason-Burton-Stacey (1989)
- IV. Análisis y categorización de los resultados: Desde la propuesta de Ángel Gutiérrez (2001) que suple los vacíos de las teorías de autores como Balacheff (1986) y Harel y Sowder (1999); su clasificación se caracteriza y se enfoca en el análisis de los vacíos conceptuales que generan los estudiantes al interpretar la geometría.

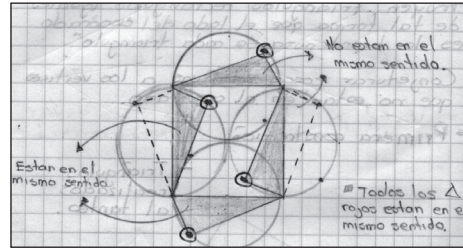
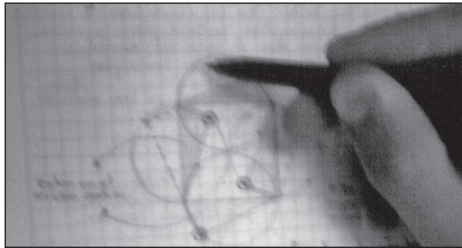
#### 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Se basa principalmente en el estudio detallado del proceso de resolución de la situación problema conllevado por los tres estudiantes para profesor. Para leer correctamente este capítulo, se decide separarlo por fases, así:

- I. Primera exploración del problema
- II. Abordando el problema desde los acuerdos
- III. Construyendo el problema con ayuda de Geogebra
- IV. Definiendo la colinealidad como el objeto matemático primordial en la demostración.
- V. Empezando a construir y demostrar conjeturas

El problema asignado fue "*Sobre los lados de un cuadrado se construyen cuatro triángulos rectángulos iguales, de tal forma que cada lado del cuadrado es la hipotenusa de cada triángulo*". Los estudiantes evidencian que la situación problema que se les propone les permite desarrollar de manera autónoma procesos de exploración tales como la formulación de hipótesis, su validación grupal y según sea el caso su reformulación, haciendo de la situación una forma en la que se dinamicen los conceptos inmersos en ella y se relacionen las conceptualizaciones particulares con las formas universales socialmente construidas.

En las conversaciones de los resolutores se menciona explícitamente la importancia que tiene el planteamiento de preguntas. Brousseau (1986) compara este hecho con el de solucionar el problema y les da el mismo estatus de importancia. Se evidencia cómo los estudiantes, a partir de preguntas y



“Las imágenes y los conceptos interactúan en la actividad cognitiva del sujeto cooperando en algunos casos o en conflicto en otras situaciones”.

Fishbein (1993)

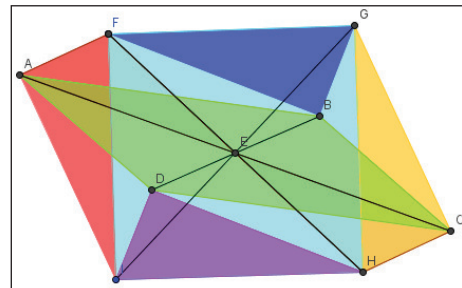
exploraciones, logran abordar el problema desde las representaciones gráficas con miras a esclarecer los conceptos inmersos en la situación y plantearse su problema de demostración. En esta parte del momento de exploración, surge en los estudiantes la necesidad de un esquema que les dé más información de la situación, por lo que proponen el cambio de representación, de lo dicho en la situación a una construcción. En esta parte de interacción grupal se evidencia la necesidad por cambiar de representación, un dibujo, construcción o esquema que les permita evidenciar lo que la situación les propone y les dé una visión para encaminar su trabajo resolutor.

Es importante decir que en este caso la representación gráfica puede o no ser favorable en un trabajo resolutor, ya que el detenerse mucho en la etapa de percepción de las construcciones puede limitar a los estudiantes en etapas más desarrolladas de la demostración, en el sentido de limitarse solamente a hablar de aspectos físicos o perceptivos de las representaciones gráficas, haciendo difícil el razonamiento y análisis de sus propiedades. Tal como lo afirma *María Dal Maso (2005)* “Es interesante analizar cómo las representaciones gráficas de objetos y conceptos geométricos producen muchas veces dificultades durante la resolución de problemas y en la demostración en geometría”.

Sin embargo, se evidencia que los estudiantes evocan la construcción de la situación para tener una visión más determinada del problema y con el fin de delimitar la situación a un problema específico a abordar. En este sentido la representación gráfica fue de ayuda porque les permitió evidenciar ciertos atributos de la construcción así como hacerse una idea de los posibles caminos que podrían establecer. De igual manera, en lo que corresponde a la demostración y sobre todo en la geometría, siempre se ha utilizado el dibujo (construcción) como carácter significativo de lo que es la geometría. Para su enseñanza siempre han sido básicos los objetos teóricos relacionándolos con

las representaciones geométricas, para llevar a que los estudiantes reconozcan el objeto matemático como una representación geométrica, y evidencien propiedades y características a través de su simple visualización. Entonces los estudiantes realizan la construcción con el objetivo de ser ayudas visuales para establecer hipótesis, conjeturas o deducciones lógicas de una demostración. (Chevallard y Tonelle, 1982 p 4, citado en Balacheff, 1982)

El trabajo resolutor de los estudiantes empieza a formalizarse cuando empiezan a establecer relaciones entre las construcciones que realizan y lo que les propone el problema; es aquí donde se generan discusiones frente a la manera de abordarlo y se construyen conjeturas para empezar a demostrar. En este proceso de interacción y de discusión de representaciones surge la importancia de recordar las experiencias de los estudiantes frente a problemas trabajados anteriormente que fuesen muy similares a este; hacen una retrospectiva de su trabajo como estudiantes para determinar la manera en que deben proceder para realizar una construcción exacta que represente la situación planteada y su respectiva demostración. A continuación se presenta una de las conjeturas obtenidas por el grupo y su respectiva demostración.



En este proceso de interacción y de discusión de representaciones surge la importancia de recordar las experiencias de los estudiantes frente a problemas trabajados anteriormente que fuesen muy similares a este; hacen una retrospectiva de su trabajo como estudiantes para determinar la manera en que deben proceder para realizar una construcción exacta que represente la situación planteada y su respectiva demostración. A continuación se presenta una de las conjeturas obtenidas por el grupo y su respectiva demostración.

**Conjetura 1** "Si los cuatro triángulos están en el mismo sentido, dos de ellos opuestos y dentro del cuadrado, al unir los vértices entonces se obtendrá un paralelogramo".

Finalmente, mediante una organización de pasos lógicos, cada uno de ellos justificado de manera detallada, los EPP logran construir una demostración válida por lo menos para el grupo, pues consideran que en ella se evidencia formalidad, justificación de cada paso y un orden lógico. Como vemos, únicamente se hace necesaria la construcción representativa de la demostración, ya no como soporte indispensable sino como ayuda para construir la demostración; no hacen falta recursos ajenos a la misma demostración ni explicaciones detalladas para justificar alguno de los pasos. Por lo tanto, para finalizar esta etapa, los estudiantes se encuentran en la fase de *ataque-demostración formal*, ya que realizan deducciones e implicaciones lógicas y ordenadas basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas aunque aun aludiendo al ejemplo genérico no como objeto indispensable para la demostración sino como ayuda para su comprensión.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Balacheff, N. (1982). *Procesos de prueba en los alumnos de Matemáticas*. Universidad de los Andes. Traducción. Primera Edición: Agosto 2000. Bogotá, Colombia
- Camargo, L. Perry, P. Samper, C. (2006). *Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica*. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá. Colombia.
- Mason, J. Burton, L. y Stacey, K. (1992). *Pensar matemáticamente*. (1ª ed. - 2ª reimpresión, 1992-). Barcelona. MEC-Ed. Labor).
- Araujo, J. Giménez, J. Salas, N. (2006). *Afectos y demostraciones geométricas en la formación inicial docente*. Universidad de Barcelona, Barcelona, España.
- Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. (15ª reimpresión). Serie Matemáticas. (Traducción, Prof. Julián Zugazagoitia). México: Editora Trillas.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1996). Un curso de heurística matemática para la Formación del profesorado. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*. n.8, P.83-90. Abril de 1996.