Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta?

Cileda de Queiroz e Silva Coutinho – PUC/SP
cileda@pucsp.br

Resumo
O ensino de probabilidades é o objeto deste artigo. Queremos aqui discutir o papel da história desse conceito na escolha de contextos para apresentação dos primeiros conceitos probabilísticos no Ensino Fundamental. Vamos discutir a limitação a situações de eqüiprobabilidade que foi proposta nos Parâmetros Curriculares Nacionais e que é seguida pela maior parte dos livros didáticos que encontramos disponíveis para o professor. A noção de acaso é bastante complexa e recebeu diversas interpretações ao longo da história das ciências e da filosofia, uma vez que se vincula a nossa própria interpretação de mundo. Limitaremos-nos neste texto a descrever a apreensão do acaso em relação ao contexto no qual está inserido. E neste pano de fundo (o do estudo dos contextos nos quais o acaso pode ser identificado) que se propõe o trabalho com probabilidade, considerando os resultados possíveis de manipulações de um gerador de acaso, como os jogos de azar (manipulação de moedas, dados, etc). Consideramos também os fenômenos sensíveis que traduzem o efeito macroscópico das causas ínfimas, tal como o contexto das previsões meteorológicas.

Palavras-chave: Percepção do Acaso, Ensino de Probabilidades, História da probabilidade.

Introdução

O ensino de probabilidades é o objeto deste artigo. Queremos aqui discutir o papel da história desse conceito na escolha de contextos para apresentação dos primeiros conceitos probabilísticos no Ensino Fundamental. Vamos discutir a limitação a situações de eqüiprobabilidade que foi proposta nos Parâmetros Curriculares Nacionais e que é seguida pela maior parte dos livros didáticos que encontramos disponíveis para o professor.

Essa discussão tem sua motivação no estudo feito em Coutinho (2001) sobre as condições didáticas para um primeiro contato com conceitos probabilistas, que resultou na proposição de atividades elaboradas em uma metodologia de engenharia didática. Estas atividades mostravam que um processo experimental que envolvesse observação, descrição, reconhecimento da configuração de uma urna de Bernoulli e a conseqüente determinação da composição adequada nessa urna (a proporção entre bolas brancas e pretas, representando sucesso e fracasso, respectivamente) poderiam ser considerados como ferramenta eficaz para a atribuição de significado do conceito de probabilidade. Naquele trabalho foi proposta uma situação probabilista em contexto geométrico e os resultados nos procedimentos e mobilização de conceitos dos alunos foram bastante satisfatórios. O estudo histórico-epistemológico que foi feito dentro da fase de estudos preliminares da engenharia didática, permitiu levantar as variáveis didáticas pertinentes para as atividades que se pretendia construir, assim como permitiu estudar os contextos que favoreciam a compreensão desse conceito. Apresentaremos nesse texto parte desse estudo, visando propiciar ao professor uma diversidade de contextos possíveis e de apreensões probabilísticas para o trabalho com a *idéia de acaso* e *as noções de probabilidade e de modelo probabilista*, sob o ponto de vista de sua gênese histórica. Em resumo, neste artigo pretendemos:

- Destacar algumas apreensões do acaso que se apresentam na História e que podem ainda existir no pensamento contemporâneo.
- Identificar a dualidade no funcionamento da noção de probabilidade, entre conceito teórico quantificando a incerteza e ferramenta de interpretação de situações experimentais nas quais existe a intervenção do acaso.

A contextualização do acaso

A noção de acaso é bastante complexa e recebeu diversas interpretações ao longo da história das ciências e da filosofia, uma vez que se vincula a nossa própria interpretação de mundo. Limitaremos-nos neste texto a descrever a apreensão do acaso em relação ao contexto no qual está inserido. Assim, se a realidade traduz a percepção do real pelo sujeito, estudaremos as situações da realidade nas quais o acaso pode intervir (contextualização do acaso).

Queremos explicitar a distinção entre as situações que podem ser reproduzidas ao menos mentalmente (e que, em conseqüência, podem ser modeladas), e as situações contingentes (não reprodutíveis). Vejamos um exemplo de uma situação reprodutível. A ação de lançar uma moeda para jogar "cara e coroa". **A reprodução das condições de observação de seu desenrolar e seus resultados possíveis são passíveis de uma projeção, de uma planificação,** porque podemos **ao menos imaginar** que o lançamento desta moeda se faz sempre em condições análogas, produzindo os mesmos resultados possíveis, cara ou coroa.

Observemos que no curso da História esta percepção da reprodutibilidade não esteve sempre presente e que a intervenção do acaso foi também percebida como sendo a origem de fatos contingentes e servia a práticas de predição do futuro, entre outras.

Lazer ou crenças: os primeiros contextos

Os povos que viviam na Mesopotâmia ou no Egito Antigo associavam a idéia do acaso às *intervenções divinas ou sobrenaturais*. Referimo-nos aqui às práticas de consulta de presságios ou às predições das pitonisas a fim de prever o futuro e interpretar a vontade dos deuses. Este tipo de relação com o acaso, associando-o com a *crença em intervenções divinas*, será uma constante no comportamento humano ao longo do tempo. Podemos, ainda atualmente, identificá-la em certas culturas, em certos ritos (prática de vidência, etc). Os textos históricos mostram que jogos de azar, como os jogos de astrágalos[1] ou os jogos com dados fabricados em barro cozido, entre outros, eram utilizados com objetivos de lazer, porém integrando uma dimensão mística ou psicológica do acaso.

Estes jogos eram praticados desde a Antiguidade. As ferramentas matemáticas necessárias ao desenvolvimento deste ramo do conhecimento, tais como o raciocínio combinatório e o cálculo de proporções, já eram conhecidos há muitos séculos. No entanto, é surpreendente observar que encontraremos os primeiros estudos de combinatória aplicada à análise destes jogos somente no séc. XVI, principalmente com G. Cardano e, no início do séc. XVII, com Galileu. Segundo J. F. Pichard esta lacuna pode ser explicada da seguinte forma:

> "(…) Uma primeira razão é que um tratado científico sobre os jogos de azar não seria, provavelmente, sério, pois os jogos eram coisas fúteis aos olhos dos sábios. Uma outra razão, certamente mais importante, é que o resultado de um sorteio "ao acaso" é a expressão da vontade divina, e como tal, não deveria ser calculada, pois não devemos desafiar Deus (ou o Diabo) (…)" (Pichard, 1997, p. 107, tradução nossa[2]).

Assim, é somente após o séc. XVI que o cálculo sobre o acaso passa por uma evolução que se tornou possível pelo desenvolvimento da análise combinatória: o acaso *intervindo na utilização simples de geradores de acaso, em um contexto lúdico*. Citemos, por exemplo, a manipulação de moedas, dados, cartas de baralho, roletas, entre outros geradores de acaso conhecidos e utilizados até hoje no quotidiano das pessoas.

Girolamo Cardano[3] (1501 – 1576) foi matemático, médico e jogador. Sua obra *Líber De Ludo Aleae*, foi escrita no séc. XVI e publicada somente em 1665, bem após sua morte. Esta obra buscava permitir a tomada de boas decisões nos problemas de jogos de azar encontrados naquela época.

---

[1] Astrágalos é um osso localizado no pé, do lado posterior do tarso. Na antiguidade jogava-se com esse osso retirado de animais. Foram especialmente utilizados como dados (na falta destes), sobretudo em jogos de azar, porque cada osso tem quatro faces irregulares: o lado plano, o côncavo, o convexo e o sinuoso, que possibilitavam quatro posições diferentes. A cada face do fragmento ósseo era atribuído um valor fixo: 3 pontos ao lado côncavo, 4 pontos para o convexo e 1-6 para as restantes faces laterais. Os astrágalos eram atirados sobre uma superfície plana, ganhando o que acertasse com a face escolhida ou então empregues como peças dum jogo de arremesso (tipo malha), como o jogo infantil das 'pedrinhas'– praticado ainda há poucas décadas atrás. http://arqueoblogo.blogspot.com/2004_05_01_arqueoblogo_archive.html, acessado em 03/09/2004.

[2] Todas as citações apresentadas no texto são de nossa tradução.

[3] As ilustrações referentes aos personagens citados no texto foram extraídas do site http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/, acessado em 03/09/2004.

Esta nova apreensão do acaso, em situações de enumeração de possibilidades que podem ocorrer, marca o início das concepções probabilistas: ela se encontra explicitada na correspondência entre Pascal e Fermat, que data de 1654, mostrando que o acaso é "geometrizável"[4]. Podemos dizer que com isso, Pascal e Fermat levavam em conta as regularidades macroscópicas observadas em jogos de azar (fenômeno reprodutível que tem intervenção do acaso) para a busca de um modelo matemático que as explicasse. Essa busca de regularidades é identificada por Bru (1981). Para esse autor, a correspondência entre Pascal e Fermat já mostra uma pesquisa de regularidades por um raciocínio simétrico no tempo: o jogo, se renovando identicamente no tempo e de forma regular, dá ritmo ao acaso.

O determinismo e a racionalização do acaso

O enfoque determinista apresenta um outro contexto para a interpretação do acaso. Citemos Jacob Bernoulli (1654 – 1705), matemático suíço de uma grande família de matemáticos, como um dos primeiros a confrontar a noção de probabilidade com um pensamento determinista em sua obra *Ars Conjectandi* (1713). É um passo importante na direção da racionalização do acaso. Encontramos no início da quarta parte um trecho que mostra bem este ponto de vista adotado por Bernoulli:

> "Tudo o que, sob o sol, se beneficia de ser ou de tornar-se, passado, presente ou futuro, possui sempre em si e objetivamente uma certeza total. É evidente do presente e do passado: o que é ou foi não pode não ser ou ter sido. Sobre o futuro nada a discutir; contudo não é pela necessidade de qualquer destino que não pode tornar-se, mas em razão seja da ciência seja da predeterminação divina; porque se não acontecesse com certeza tudo o que é futuro, não vemos como o Criador supremo poderia conservar inteira a glória de sua omniscência e de sua onipotência".(Bernoulli, 1713, p. 14).

Neste mesmo espírito, mas explicitado muito mais radicalmente do que no texto de Jacob Bernoulli, encontramos o ponto de vista de Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827), matemático francês. Podemos apresentar o determinismo laplaciano citando este parágrafo do início da obra *Essai Philosophique sur les Probabilités* (1814), que é uma introdução à sua teoria analítica, quando ele fala das leis da natureza. Ele começa pela afirmação que "*o acaso não é nada além da expressão da nossa ignorância",* e invoca o princípio leibniziano da *razão suficiente*:

> (…) Na ignorância das relações que lhes une ao sistema inteiro do universo, o fizemos depender das causas finais, ou do acaso, segundo o que lhes acontece e se sucedem com

[4] A expressão "a geometria do acaso" proposta por Pascal em sua carta endereçada à Academia Parisiense significa que podemos raciocinar, especular e fazer cálculos com o acaso, tal como se fazia com a Geometria. Hoje seria dito "a matemática do acaso".

> regularidade, ou sem ordem aparente; mas estas causas imaginárias foram sucessivamente afastadas com os limites de nossos conhecimentos, e desaparecem inteiramente diante da vã filosofia, que vê nelas apenas a expressão da ignorância na qual somos as verdadeiras causas. Os acontecimentos atuais têm com os precedentes uma fraca ligação fundamentada sobre o princípio evidente, que uma coisa não pode começar a ser, sem uma causa que a produza. Este axioma, conhecido sob o nome de "princípio da razão suficiente", se estende às ações mesmo que julguemos indiferentes (...) Devemos então visar o estado presente do universo como o efeito de seu estado anterior, e como a causa daquele que vai seguir. (Laplace, 1814, p. 32).

Ainda em um contexto do determinismo laplaciano encontramos a obra de Antoine Augustin Cournot (1801-1877), matemático francês, para quem o acaso é o encontro de duas séries causais independentes e todos os eventos ou fenômenos têm uma causa. Então cada evento é a causa de um outro em uma espécie de cadeia determinada.

Ainda segundo Cournot, um evento é considerado como resultado do acaso se não há nenhuma relação razoável entre as causas que conduzem a um estado final ou a outro. Isto é, para ser devido ao acaso, o evento não deve ser em nada predeterminado ou favorecido. Podemos perceber que Cournot assimila assim o acaso à eqüiprobabilidade (ou à igualdade das chances, segundo a terminologia da época).

> Para Cournot, a elaboração do conceito de acaso não deriva de uma análise empírica que tira da observação do real os elementos necessários a sua construção. Esta elaboração mobiliza uma atitude dedutiva que forja o conceito de acaso a partir da combinação de dois princípios racionais, que são o princípio da causalidade e o princípio da independência das séries causais. (Martin, 1996, p. 110).

Destacamos que uma distinção necessária para a análise desse tipo de contexto no qual estudamos a intervenção do acaso é aquela que explicita as diferenças entre as noções de causa e de razão. Segundo a análise de T. Martin (1996) sobre a obra de Cournot, as causas têm uma função produtora, enquanto que as razões têm uma função explicativa. Isto nos leva a destacar que, nestas condições, a contingência é a ausência de toda razão (Lestienne, 1993).

Entre as causas produtoras de um fato, Martin evidencia a distinção feita por Cournot entre as causas regulares (os invariantes) e as causas acidentais (que determinam a singularidade). Para Cournot, as causas regulares são idênticas para todas as realizações enquanto que as causas acidentais são as que variam a cada realização do experimento. Em outras palavras, as causas permanentes determinam a freqüência do evento enquanto que as causas acidentais determinam sua singularidade.

Tomemos o exemplo de um sorteio da Loto. As causas regulares são a estrutura da urna, a estrutura e o tamanho das bolas que estão nessa urna e, finalmente, o mecanismo físico da seleção de uma bola. Podemos identificar como causa acidental, entre outras, o número de rotações desta urna antes de cada sorteio. Sob o ponto de vista de Cournot, podemos admitir que o acaso pode ser apresentado como o resultado de uma combinação entra causas regulares e causas acidentais.

Assistimos no início do séc. XX a uma evolução devida a uma mudança qualitativa em relação às interpretações precedentes do acaso. As idéias de Jules Henri Poincaré (1854 – 1912), matemático francês, trazem uma contribuição muito importante para essa ampliação. O extrato abaixo, parte do primeiro capítulo de sua obra *Cálculo de Probabilidades* (1912), explicita bem esta nova etapa em direção a uma racionalização do acaso:

> É necessário que o acaso seja outra coisa que não o nome que damos à nossa ignorância, que entre os fenômenos dos quais ignoramos as causas, devemos distinguir os fenômenos fortuitos, sobre os quais o cálculo de probabilidades nos informará provisoriamente, daqueles que não são fortuitos e sobre os quais nada podemos dizer, enquanto não determinarmos as leis que o regem. (Poincaré, 1912, p. 3).

Nessa obra, Poincaré apresenta o acaso como uma manifestação macroscópica de uma causa muito pequena que nos escapa. O exemplo que ele fornece para ilustrar esta interpretação é o do equilíbrio instável de um cone perfeito, que repousa sobre sua ponta e que, no entanto, vai cair sem que possamos prever para que lado:

> Se um cone repousa sobre sua ponta, sabemos bem que ele vai cair, mas não sabemos para que lado; nos parece que o acaso sozinho vai decidir. Se o cone fosse perfeitamente simétrico, se seu eixo estivesse perfeitamente vertical, se não estivesse submetido a nenhuma outra força além do peso, ele não cairia de forma alguma. Mas a menor falha de simetria vai fazê-lo tender levemente para um lado ou para outro, e desde que ele o faça, pouco que seja, ele cairá para este lado. Se mesmo a simetria é perfeita, uma trepidação muito leve, um sopro de ar poderá fazê-lo se inclinar alguns segundos de arco; isto será suficiente para determinar sua queda e mesmo o sentido desta queda que será aquele da inclinação inicial.
> Uma causa muito pequena que nos escapa, determina um efeito considerável que não podemos não ver, e então diremos que este efeito é devido ao acaso. (Poincaré, 1912, p. 4).

Neste contexto, para definir o acaso Poincaré evidencia os invariantes a fim de modelar os eventos fortuitos. No sentido utilizado por Cournot, podemos dizer que Poincaré distingue as causas regulares das causas acidentais. Para ele, o acidental não é objeto do cálculo de probabilidades. Assim, para o estudo sobre o equilíbrio de um cone que repousa sobre sua ponta, Poincaré designa como causas regulares sua simetria perfeita, a posição de seu eixo, considerada perfeitamente vertical. As causas acidentais são, para ele, uma trepidação muito leve e/ou um sopro de ar. Ele assimila o acaso, então, às causas que nos escapam, a uma desproporção entre causas ínfimas e seus efeitos macroscópicos. Ele reforça esta noção de fenômeno sensível em relação às condições iniciais retomando principalmente o exemplo da meteorologia, já proposto anteriormente por Jacob Bernoulli no séc. XVII. Segundo a formulação de Poincaré (1912, p.5), "*as grandes perturbações* *se produzem geralmente em regiões nas quais a atmosfera está em equilíbrio instável*". Mas ele considera também como causas acidentais os erros inevitáveis cometidos pelo observador e seus instrumentos: mesmo os menores erros vão acumular seus efeitos "*que nós atribuiremos ao acaso, porque suas causas são muito complicadas e muito numerosas*". (Poincaré, 1912, p. 10).

Temos assim um enfoque do acaso sob um ponto de vista determinista: o resultado de um processo aleatório devido a uma complexidade de causas imperceptíveis, complexidade esta que escapa à compreensão do homem e seus instrumentos. E é neste contexto que consideramos os resultados possíveis de manipulações de um gerador de acaso, como os jogos de azar (manipulação de moedas, dados, etc). Consideramos também os fenômenos sensíveis que traduzem o efeito macroscópico das causas ínfimas, tal como o contexto das previsões meteorológicas que acabamos de descrever.

Probabilidades

O interesse pelos jogos de azar é intrínseco à história da humanidade, supondo uma aposta e a idéia de jogo equilibrado. Encontramos os primeiros traços de manipulação de objetos visando a obtenção de resultados aleatórios desde a antiguidade, nas civilizações que viviam 3500 anos antes da nossa era (Borovcnik e al., 1991, p. 27), (Pichard, 1997, p. 105), (Henry, 1994, p. 15). Citamos, por exemplo, os jogos de astrágalos, utilizados pelos soldados romanos da época como um jogo com apostas sobre as posições possíveis de imobilização após um lançamento. Encontramos também jogos que utilizam dados construídos a partir de um trabalho sobre as partes arredondadas de um astrágalo (já citado nesse texto). Estes dados eram de manipulação difícil quando havia uma aposta em jogo. Segundo Borovcnik e al. (1991, p. 28), a utilização de diferentes tipos de ossos de diferentes tipos de animais tornava "*obscura a regularidade da aparição dos resultados".*

Os jogos de dados em barro cozido, de forma cúbica e homogênea, foram praticados a partir do terceiro milênio antes da nossa era, na Mesopotâmia, no Egito e na Babilônia. Seu uso poderia ter uma finalidade lúdica, mas a manipulação destes objetos poderia também ter um contexto místico, em práticas religiosas.

O uso de dados viciados na época da Roma antiga e a proibição dos jogos em diferentes épocas mostram que a prática do acaso era bastante comum. Esta prática supõe a existência de uma certa noção de eqüiprobabilidade:

> Encontramos dados especialmente preparados para jogos viciados nesta época , de onde a noção complementar de dado honesto, e podemos conjecturar que os jogadores tinham empiricamente percebido a freqüência de aparição das diferentes faces, isto é, uma concepção intuitiva da lei dos grandes números. (Pichard, 1997, p. 106).

Destacamos assim uma **apreensão perceptiva**[5] **das chances de se obter um certo resultado a partir de um processo aleatório.** Neste caso, diremos que existia um tipo de **avaliação intuitiva das chances de se obter o resultado esperado** quando da prática de um jogo para o qual o desenvolvimento poderia produzir diferentes resultados atribuídos ao acaso.

O enfoque combinatório para o conceito de probabilidade

Uma outra visão em relação a avaliação do « *número de chances* » se instala com o desenvolvimento do cálculo de combinações. Esta avaliação tem como ponto de partida o desdobramento dos resultados possíveis de um jogo e com a hipótese implícita de eqüiprobabilidade dos resultados[6]. Assim assistimos, a partir do séc. XV, ao aparecimento dos primeiros desdobramentos e enumerações de possibilidades (Bru, 1981, p. 143). As questões sobre os jogos e as apostas dos jogadores que não devem investir igualmente, mas em função das respectivas chances de vitória estão na origem de uma nova maneira de avaliar as chances: *o raciocínio combinatório*.

O primeiro documento conhecido que mostra este tipo de raciocínio é um poema chamado "*De Vetula*", escrito por um erudito eclesiástico francês, Richard de Fournival, em 1250. Este poema descreve um cálculo de combinações referentes ao lançamento de três dados. Segundo Bellhouse (2000), a parte deste texto que apresenta uma descrição mais detalhada do raciocínio utilizado encontra-se entre as linhas 405 e 459, segundo a numeração proposta por Klopsch em 1967.

Tomemos um extrato deste poema para ilustrar a forma a qual seu autor utiliza um raciocínio probabilista fundamentado na enumeração dos resultados possíveis para a soma dos pontos obtidos quando lançamos três dados[7].

> Talvez, no entanto, vós afirmaríeis que algumas são melhores
> Que outras que os jogadores jogam, pela razão que,
> Uma vez que um dado tem seis faces resultando seis números simples,
> Sobre três dados existem dezoito,
> Entre os quais somente três podem se apresentar.
> Eles variam de diferentes formas, e entre as quais
> Dezesseis somas compostas são produzidas. Elas não são contudo
> De valores iguais, uma vez que o maior e o menor entre eles
> Acontecem raramente e os intermediários freqüentemente,

[5] Utilizamos a expressão « apreensão perceptiva » no sentido empregado por Duval (1994): "a apreensão perceptiva tem uma função epistemológica de identificação dos objetos em duas ou três dimensões. Isto se faz por tratamentos cognitivos efetuados automaticamente, e portanto inconscientemente" (p. 124).
[6] Princípio da indiferença, enunciado por Laplace.
[7] Tradução literária da tradução inglesa, feita por Klopsch (1967) a partir do texto em latin, citado por Bellhouse (2000).

E as outras mais estas são próximas dos valores centrais,
Melhores elas são e mais freqüentemente acontecem
[…]
Elas variam segundo cinqüenta e seis formas
segundo as configurações da face superior do dado,
E estas configurações segundo duzentas e dezesseis formas de aparecer.
Elas devem ser repartidas entre os números compostos interessando aos jogadores,
Assim que se deve,
Vós conheceis inteiramente o quão grande é seu ganho
Qualquer que possa ser, ou quão grande é sua perda.
(Bellhouse, 2000, pp. 134-135).

Eis como Luca Paccioli, conhecido como Fra Luca di Borgo, apresentou em 1494 o problema típico da repartição das apostas, ou "*como fazer a repartição das apostas*" como exprimem Pascal e Fermat em sua correspondência de 1654:

> Uma brigada joga um jogo de Paume, de tal forma que lhes é requisitado um total de 60 pontos para ganhar. Cada etapa conta 10 pontos. O valor apostado é de 10 ducats. Após um incidente qualquer, os soldados não podem terminar o jogo. Um deles tem 50 pontos e o outro 20. Perguntamos qual parte do valor apostado fica para cada um. (Pacioli, 1494, Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita, apud Henry, 1994, p. 16).

O problema "das partes" ou "da repartição" é considerado como o problema fundador do Cálculo de Probabilidades. Ele é o objeto da célebre correspondência entre Pascal e Fermat, datando de 1654, que marcou o nascimento da "*Geometria do Acaso*". Segundo Montucla (1802), o problema das partes[8] foi proposto a Pascal pelo cavaleiro Meré, que lhe propõe também alguns outros problemas sobre jogos de dados praticados na época. Pascal propõe o mesmo problema para Roberval e para Fermat. Roberval fracassa na pesquisa de uma solução, mas Fermat apresenta uma solução correta utilizando um método diferente daquele proposto por Pascal : ele emprega o método combinatório fazendo combinações de todas as alternativas de ganho ou perda que podem de forma fictícia acontecer ao longo das jogadas seguintes. Loève (1978) resume assim o contexto do nascimento da idéia de probabilidade:

> (...) encontramo-lo num livro de Pacioli de 1494, na Aritmética de Forestani de 1603, e Ore afirma tê-lo encontrado em manuscritos italianos que datam 1380. Todas as soluções que foram dadas eram falsas. Os que tentam resolvê-lo começam por mostrar por que o seu antecessor estava enganado: Cardano para Pacioli, Tartaglia para Cardano,etc. Roberval não somente não pôde resolver, mas atacou com vivacidade a solução - correta - de Pascal. Não estando muito certo de sua resolução, Pascal a submeteu a Fermat. Assim começa a célebre correspondência de 1654. Ela foi publicada apenas em 1679, e apenas parcialmente, porque algumas cartas não haviam sobrevivido. (Loève, 1978, p. 280).

---

[8] Como repartir o valor apostado em um jogo de azar interrompido.

Notemos assim um início de mudança de ponto de vista, de uma avaliação intuitiva e "inocente" das chances que um evento se produza a uma descrição mais teórica dos resultados que podem realizar este evento, ou a sua enumeração. A correspondência entre Pascal e Fermat é a fonte de um grande progresso para a conceituação da Probabilidade. (Borovcnik et al., 1991, p. 30). É o primeiro passo para uma mudança de ponto de vista rumo a uma avaliação das chances no domínio teórico. Mas, sobretudo, são os primeiros encaminhamentos que especulam sobre a seqüência de um processo aleatório, a imaginar "as partidas inacabadas" segundo os termos de Fermat, afim de melhor enumerar "as chances" de cada jogador.

Em sua carta de 29 de julho de 1654, Pascal propõe uma solução ao problema das partidas utilizando um método de recursividade do cálculo da esperança sobre ganhos futuros. Em seguida, ele retoma a solução proposta por Fermat: a enumeração dos casos possíveis e favoráveis, fazendo intervir a hipótese segundo a qual a partida será continuada. Pascal constata que os dois raciocínios conduzem à mesma resposta para determinar a repartição da quantia apostada pelos jogadores. Pascal e Fermat introduzem neste momento a idéia do que deveria se passar se "*existisse a possibilidade da continuação do jogo e se o jogo fosse equilibrado*". (Borovcnik et al., 1991, p. 31).

Pascal, em sua carta endereçada à Academia Parisiense no final de 1654, destacará a importância dessa descoberta da "*Geometria do Acaso*", mas não propõe uma definição explícita de probabilidade.

> Uma nova pesquisa portando sobre uma matéria inteiramente inexplorada, a saber sobre as combinações do acaso nos jogos que lhe são submetidos, o que chamamos em nossa língua francesa "havendo as partidas dos jogos", onde a incerteza da fortuna é tão bem dominada pelo rigor dos cálculos que, dois jogadores, cada um deles vendo-se sempre recompensado pelo que lhe é justo. É necessário procurar cada vez mais vigorosamente pela razão que a experiência não permite informar sobre as possibilidades. De fato, os resultados ambíguos da sorte são, de forma justa, atribuídos muito mais ao acaso da contingência do que a uma necessidade da natureza. Por isso essa questão restou incerta até hoje; mas agora, se ela se rebelou à experiência, ela não pode escapar ao império da razão. Porque reduzimos em arte com tal segurança, graças à geometria, que tendo recebido parte da certeza desta, progride a partir de agora com audácia, e que, por união assim realizada entre as demonstrações da matemática e a incerteza do acaso, e pela conciliação entre os contrários aparentes, ela não pode tirar seu nome de uma parte ou de outra e se arrogar por direito este título surpreendente: "Geometria do Acaso". (Mesnard, 1991, p. 1134-1135).

O procedimento seguido por Pascal e Fermat não era ainda descontextualizado nem teorizado, ainda que Fermat identifique a idéia de probabilidade tirando-a da enumeração dos casos possíveis (Henry, 1994, p.18). E mesmo sem descontextualizar, este enfoque devido a Pascal e Fermat, permite um passo adiante na direção da aplicação correta da relação *favorável e possível*:

> O enfoque desenvolvido por Pascal e Fermat lança uma luz sobre a aplicação correta da relação entre favorável e possível, mas não concretiza nenhum progresso definindo um conceito para clarear a natureza própria da probabilidade. Eles empregaram a probabilidade pragmática; a igualdade das chances dos resultados nos jogos de azar lhes pareceu ser intuitivamente evidente. Os jogos de azar serviram de ligação entre a intuição e os conceitos em desenvolvimento como uma ferramenta para estruturar os fenômenos reais. (Borovcnik et al., 1991, p. 31).

Observamos aqui os primeiros indícios de uma dualidade da noção de probabilidade, dualidade essa que é devida ao conflito entre a apreensão perceptiva das chances de realização de um evento (grau de credibilidade) e a relação entre resultados favoráveis e possíveis. Esta dualidade é expressa por Loève da seguinte maneira:

> Desde então começa o conflito entre probabilidade no sentido de grau de credibilidade e probabilidade no sentido de proporção das chances. Esta dualidade dará origem a rios de tinta que regam, entre outros, quase todas as obras sobre o Cálculo de Probabilidades. Estes rios correm ainda, mas não passam mais nas proximidades do moderno Cálculo de probabilidades. (Loève, 1978, p. 281).

Assim, desde a criação da noção de probabilidade, podemos constatar o nascimento deste conflito entre a percepção experimental no sentido da estimação das chances, e seu uso mais teórico no sentido da razão entre número de casos.

Intervindo na elegante recursividade proposta por Pascal, a noção de esperança de ganho foi retomada por Huygens alguns anos mais tarde. Segundo Borovcnik et al. (1991), este método permite a produção de soluções a muitos problemas conhecidos na época. Huygens contribui assim de forma importante ao desenvolvimento da noção de probabilidade: a formalização da noção de *direito de esperar,* expressa também sob o nome de *valor da chance*. Podemos retomar a interpretação de J.-F. Pichard (1997) sobre o que Huygens entende por jogo equilibrado e suas proposições para o cálculo das chances neste tipo de jogo, nesta citação tirada de *De ratiociliis in ludo aleae,* obra publicada em 1657:

> Parto da hipótese que em um jogo, a chance que temos de ganhar alguma coisa tem um valor tal que se temos esse valor, podemos procurar ter a mesma chance em um jogo equilibrado, isto é, por um jogo que não visa a derrota de ninguém.
> (...) Ter chances iguais de obter a ou b me vale $\frac{a+b}{2}$.
> (...) Ter p chances de obter a e q chances de obter b, as chances sendo equivalentes, me vale $\frac{pa+qb}{p+q}$. (Huygens, 1657, citado por Pichard, 1997, p. 113).

Para concluir sobre o enfoque combinatório da probabilidade, fundamentado na hipótese da eqüiprobabilidade, a definição clássica não foi formulada nem por Pascal nem por Fermat, nem mesmo por Huygens. Ela foi indicada e utilizada por J. Bernoulli com virtuosidade, desde o final do séc. XVII. Ela foi finalmente consolidada como « primeiro princípio » quase um século mais tarde na obra *Essai Philosophique sur les Probabilités*, publicada em 1814 por Pierre-Simon Laplace, sobre a qual retomaremos mais adiante neste texto. Esta definição foi formulada assim por Laplace: ***"A probabilidade de um evento é igual à razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis".***

Assim, identificamos uma **avaliação teórica das chances de realização de um evento: pela enumeração de suas possibilidades de resultados, supondo a igualdade das chances para cada uma dessas possibilidades.**

O enfoque freqüentista

Uma ampliação importante das reflexões sobre a natureza da probabilidade e da concepção mesma deste objeto matemático deve-se a J. Bernoulli na obra *Ars Conjectandi*. Ele coloca claramente em evidência a dualidade do enfoque deste conceito: razão entre número de casos ou estimativa de seu valor obtida pela observação da freqüência experimental. A publicação da obra *Ars Conjectandi* em 1713 é estimada como a primeira etapa na teorização do Cálculo de Probabilidades (Loève, 1978, p. 282; Stigler, 1986, p. 64). Nesta obra, Jacob Bernoulli começa por resolver cinco problemas propostos por Huygens sobre o cálculo de uma probabilidade em um quadro combinatório, generalizando o cálculo e aprofundando-o. Mas na quarta parte desta obra encontramos o ponto de partida da aplicação da probabilidade em outros contextos que não os de jogos de azar. (Pichard, 1997, p. 119). A citação abaixo evidencia a mudança de enfoque da noção de probabilidade pela explicitação da relação entre freqüência e probabilidade:

> O progresso conceitual, no entanto, sustentando a justificação da relação entre as freqüências relativas e as probabilidades não foi compreendido antes de Jacob Bernoulli (1713). Ele trabalhou durante mais de 20 anos sobre a lei dos grandes números, a qual ele chamou de "teorema áureo". Este teorema mostra que as freqüências relativas, em um certo sentido, convergem para a probabilidade subjacente, o que justifica a utilização da probabilidade em outros contextos além dos jogos de azar. (Borovcnik et al., 1991, p. 33).

Na quarta parte da obra Ars Conjectandi, J. Bernoulli evidencia a limitação da determinação de uma probabilidade por estratégias de contagem. Esta limitação é devida à necessidade de se supor a eqüiprobabilidade dos eventos elementares. Segundo Henry (1994), Bernoulli mostra que:

> Esta necessidade exclui a aplicação da doutrina das chances aos fenômenos naturais complexos como : a aparição de uma doença ou os fenômenos meteorológicos, ou ainda a previsão das estratégias escolhidas pelos jogadores cujos comportamentos são imprevisíveis. (Henry, 1994, p. 22).

Para avaliar uma probabilidade neste contexto, J. Bernoulli propõe a determinação a porteriori da probabilidade de um evento esperado, após observação de um grande número de experiências semelhantes. Para esta determinação seria suficiente, segundo Bernoulli, estimar a probabilidade deste evento pela freqüência estabilizada, observada experimentalmente. Retomemos então a citação já apresentada anteriormente nesse texto, acrescentando a seqüência do texto de Bernoulli que evoca este raciocínio freqüentista:

> Mas em verdade aqui nos é oferecido um outro caminho para obter o que procuramos. O que não nos é dado obter a priori o é ao menos **a posteriori**, isto é, será possível extrair observando os resultados de numerosos exemplos semelhantes ; porque devemos presumir que, na seqüência, cada fato pode acontecer e não acontecer no mesmo número de casos que foi constatado antes, em um estado de coisas semelhantes, que aconteceria ou não aconteceria.
> (…)Enfim não pode escapar a ninguém que, para julgar desta forma qualquer evento, não seria suficiente ter escolhido uma ou duas experiências : todo ser mais estúpido, por não sei qual instinto natural, por si mesmo e sem a direção dada por qualquer ensino (coisa absolutamente admirável) tem como evidente que mais observações deste gênero tenhamos recolhido, menor será o perigo de se distanciar do objetivo. (Bernoulli, 1713, p. 42-44).

Assim, segundo Borovcnik et al. (1991), a partir dessa mudança de status da probabilidade, podemos identificar uma **nova maneira de estimar as chances de realização de um evento : o método experimental.** Tal enfoque supõe que a probabilidade é um dado objetivo ligado ao evento e à experiência. Esta estimação é justificada pela convergência da seqüência das freqüências observadas, dados intrínsecos da experiência repetida, independentemente da posição subjetiva do observador. A definição proposta por Rényi (1966) apresenta de forma clara este enfoque:

> Chamaremos probabilidade de um evento o número ao redor do qual oscila a freqüência relativa do evento considerado. (...) Consideraremos então a probabilidade como um valor independente do observador, que indica aproximadamente com qual freqüência o evento considerado se produzirá durante uma longa série de repetições de um experimento. (Rényi, 1966, pp. 25-26).

A autora apresenta mais adiante em seu texto uma “definição” de probabilidade:

> A definição de probabilidade como o valor ao redor do qual oscila a freqüência relativa não é uma definição matemática, mas uma descrição do substrato concreto do conceito de probabilidade. A lei dos grandes números de Bernoulli, em contrapartida, é fundamentada na definição matemática da probabilidade. (Rényi, 1966, p. 144).

Podemos constatar que para Bernoulli, a experimentação podia conduzir a uma probabilidade objetiva sob a condição de um grande número de repetições da experiência. Tomemos uma citação que confirma esta afirmação:

> Este enfoque empírico para a determinação das chances não era novo para Bernoulli, e nem ele o considerou como novidade. O que ele teve como original foi a tentativa de Bernoulli de dar um tratamento formal para a noção vaga de que quanto mais dados acumulamos sobre a proporção desconhecida de casos, mais teremos certeza sobre essa proporção. (Stigler, 1986, p. 65).

Neste contexto, a expressão "*tratamento formal*" utilizada pelo autor refere-se ao fato que Bernoulli parte de uma experiência teórica com hipóteses de modelo.

A percepção da continuidade: a probabilidade geométrica

Citaremos aqui, neste breve percurso histórico sobre a evolução da noção de probabilidade, a utilização de elementos geométricos para o cálculo efetivo das chances em um contexto de jogos de azar. A noção de *probabilidade geométrica* foi introduzida por Georges Louis Leclerc, conde de Buffon, matemático e naturalista francês do séc. XVIII. Em um contexto social no qual os jogos de azar proliferavam muito, após a morte de Luiz XIV, Buffon apresenta na França o jogo de *Franc Carreau* em um trabalho endereçado à Academia Real de Ciências, em 1733. Este jogo consiste em lançar uma moeda sobre um piso ladrilhado com lajotas iguais em uma forma qualquer. Os jogadores apostam sobre a posição final da moeda: ficará ela inteiramente sobre uma única lajota (franc-carreau), ou sobre uma ou mais juntas entre lajotas?

Na publicação *Le Jeu de Franc-Carreau, une activité probabiliste au collège*, pelo grupo de Estatística do IREM de Rouen, encontramos o parecer de Clairaut e de Maupertius sobre esse trabalho:

> Examinamos, a pedido da Academia, um trabalho sobre o jogo de franc-carreau, do M. Leclerc. Até aqui, pela determinação das partidas nos jogos de puro acaso, não fizemos que considerar apenas os números, porque na maior parte destes jogos, tudo se reduz a certos números de casos vantajosos e casos que aportam desvantagem, independentemente da figura das coisas com as quais jogamos. Não se passa a mesma coisa com o franc-carreau. Os problemas deste jogo, que se joga ordinariamente com uma moeda redonda, dependem da consideração do diâmetro desta moeda e das dimensões das lajotas. Eis o caso mais simples e primeiro no qual M. Leclerc resolve as questões (...)(Badizé et al., 1996, p.7)

Buffon, em seu *Essai d'Arithmétique Morale*, publicado em 1777, explica a utilização da geometria na Teoria das Probabilidades:

> A análise é o único instrumento do qual nos servimos até o momento, na ciência das probabilidades, para determinar e fixar as relações do acaso; a geometria parecia pouco apropriada para uma obra tão sutil; no entanto se olharmos de perto, será fácil reconhecer que esta vantagem da análise sobre a geometria é verdadeiramente acidental, e que o acaso, segundo as modificações e condicionamentos que sofre, encontra-se no campo da geometria,

> tanto quanto que no da análise: para nos assegurarmos, será suficiente prestar atenção ao fato que os jogos e as questões de conjectura ocorrem ordinariamente unicamente quando utiliza razão de quantidades discretas; o espírito humano, mais familiar com os números que com as medidas de extensão, os preferiu sempre; os jogos são uma prova, porque suas leis ao uma aritmética contínua; para utilizar então a geometria em posse dos seus direitos sobre a ciência do acaso, não se trata de inventar os jogos que se desenrolam sobre a extensão e suas relações, ou calcular o pequeno número daqueles desta natureza que foram já encontrados. O jogo do *franc-carreau* pode nos servir de exemplo: eis as condições que são muito simples (…) (Buffon, 1777, citado por Badizé et al., 1996, p. 11).

Neste extrato, Buffon continua explicando a forma de jogar esse jogo. As regras que ele propõe não especificam a figura geométrica para as lajotas. "*Em um quarto assoalhado com tacos de madeira ou pavimentado com lajotas iguais, de uma figura qualquer, lançamos ao ar uma moeda*".(Buffon, 1777, citado por Badizé et al., 1996, p. 11). Segundo estes autores, mesmo se Buffon não contribui para um grande progresso à noção de probabilidade, ele traz uma nova luz pela consideração "*de um número de casos tendo potência do contínuo e a primeira experimentação estatística para validar uma hipótese*". (Badizé et al., 1996, p. 9).

A probabilidade subjetiva

Um novo enfoque da probabilidade é introduzido por Thomas Bayes, em um ensaio que foi publicado em 1763, dois anos após sua morte : a noção de **probabilidade a priori, tendo observado uma conseqüência a posteriori.** Segundo Henry (1994), Bayes introduziu de fato duas noções de probabilidade:

> Considerando a probabilidade de um evento como uma medida física, sem informação sobre esta, ele postula a priori a repartição uniforme de seus valores possíveis, deixando para reajustar a posteriori.
> Ele introduz assim duas noções de probabilidade: a primeira, que buscamos estimar, é objetiva, a segunda apreciando o valor possível da precedente, colocada a priori, é subjetiva. (Henry, 1994, p. 25).

Segundo Bru (1981), Bayes é o primeiro a fazer este movimento da noção de probabilidade, de objeto matemático para a noção subjetiva em um sentido "ingênuo":

> Bayes, pela primeira vez, vai deixar derrapar a probabilidade – objeto matemático que a geometria do acaso extraiu da descrição probabilista para a probabilidade no sentido encontrado no dicionário Larousse: a uma noção subjetiva (todas as informações que fundamentam nossa convicção mais íntima) ele associa um objeto matemático (formal): uma lei de probabilidade e a utiliza para voltar ao real. (Bru, 1981, p. 147).

O autor precisa o sentido dado à probabilidade subjetiva: mesmo se matematicamente idêntica à probabilidade da geometria do acaso, ela corresponde a um jogo que será jogado uma única vez, ela deve levar em conta um certo número de informações. O desenvolvimento desta nova apreensão da noção de probabilidade por esse movimento do objetivo para o subjetivo conduz aos métodos bayesianos em estatística, muito utilizados nos nossos dias. Por outro lado, mesmo se a probabilidade subjetiva leva em conta as informações obtidas experimentalmente para ajustar as observações feitas a priori (Borovcnik et al., 1991, p. 42), esta apreensão não entra no quadro do enfoque freqüentista preconizado nos programas franceses de 1991 para as classes de segundo ano do Ensino Médio, porque ele toma como hipótese de base *um jogo que será jogado uma única vez.* (Henry, 1994, p. 27). A apresentação de uma concepção bayesiana coloca então problemas didáticos que não podem ser negligenciados.

Pierre-Simon Laplace e a definição clássica de probabilidade

Continuando em nosso objetivo de identificar as diferentes apreensões da noção de probabilidade na história, façamos um salto no tempo para chegar ao início do séc. XIX. Chegamos assim à primeira apresentação axiomática do cálculo de probabilidades, contendo a definição explícita da probabilidade dada como primeiro princípio por Laplace em seu *Essai Philosophique sur les Probabilités*, publicado em 1814. Com Laplace somos levados a uma compreensão teórica da probabilidade, enquanto objeto matemático bem definido. Seu trabalho retoma e desenvolve todos os resultados probabilistas obtidos por seus predecessores e seus contemporâneos. (Bru, 1981, p. 151).

Laplace fornece assim a definição de base, limitada pela hipótese da eqüiprobabilidade. Esta limitação é, além disso, evidenciada por ele mesmo:

> A teoria dos acasos consiste em reduzir todos os eventos do mesmo tipo a um certo número de casos igualmente possíveis, isto é, tais que sejamos igualmente indecisos sobre sua existência, e a determinar o número de casos favoráveis ao evento do qual procuramos a probabilidade. (Laplace, 1814, p. 35).

A citação abaixo mostra a definição dada por Laplace, largamente utilizada no ensino até nossos dias: "*a razão deste número àquele de todos os casos possíveis é a medida desta probabilidade, que é assim não mais que uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis*." (Laplace, 1814, p. 35).

Mas após ter dado essa definição, Laplace traz, em seu segundo princípio, a chave para a ampliação desse conceito, deixando lugar para a concepção moderna em termos de medida:

> Mas isto supõe os diversos casos igualmente possíveis. Se não o forem, determinaremos primeiramente suas possibilidades respectivas as quais a justa apreciação é um dos pontos

> mais delicados da teoria dos acasos. Então a probabilidade será a soma das possibilidades de cada caso favorável. (Laplace, 1814, p. 38).

Em uma situação na qual não temos nenhuma informação sobre a possibilidade dos diversos casos possíveis, um posicionamento subjetivo consiste em postular a eqüiprobabilidade sobre estes diferentes casos. É um raciocínio do tipo bayesiano que repousa sobre um "*princípio da indiferença*" segundo o qual a atitude a priori mais razoável nesta situação é de não dar mais importância a um caso do que a outro. É em uma aplicação deste princípio que Laplace pode enunciar o extrato já reproduzido no alto desta página:

> A teoria dos acasos consiste em reduzir todos os eventos do mesmo tipo a um certo número de casos igualmente possíveis, isto é, tais que sejamos igualmente indecisos sobre sua existência, e a determinar o número de casos favoráveis ao evento do qual procuramos a probabilidade. (Laplace, 1814, p. 35).

Algumas considerações

Vamos reter a existência de um tipo de dualidade para a apreensão da noção de probabilidade devida à coexistência dos enfoques laplaciano e freqüentista. Esta dualidade pode gerar obstáculos de ordem epistemológica e didática no processo da formação do conceito de probabilidade em situação escolar. Neste sentido, mostra-se fundamental a identificação do contexto no qual o acaso é identificado para que se possa construir o significado do valor de probabilidade atribuído ao evento em estudo.

Vários trabalhos de pesquisa sugerem uma "classificação" da noção de probabilidade segundo três enfoques: clássico (laplaciano), freqüentista e bayesiano (subjetivo). Este texto focalizou propostas para os dois primeiros. Desta forma, a partir destas reflexões, propomos, para trabalho em sala de aula, um raciocínio de modelagem para o qual a avaliação de uma probabilidade simples em uma situação de sucesso-fracasso é feita a partir da análise da urna de Bernoulli que representa essa situação (contexto de sorteio aleatório com reposição em uma população pré-determinada). Este tipo de raciocínio permite a passagem de uma apreciação da probabilidade feita experimentalmente de maneira perceptiva para um cálculo efetivo desse valor em um domínio teórico: a assimilação da proporção que representa a composição da urna de Bernoulli, como já nos referimos anteriormente, e permite também a utilização, pelo sujeito, de um raciocínio do tipo científico (ou não ligado à crenças e superstições, como na antiguidade). Ela nos permite também fazer aparecer a necessidade da hipótese da eqüiprobabilidade, presente no enfoque laplaciano, para ampliar os contextos nos quais podemos apresentar situações aleatórias e algumas experiências-padrão.

Bibliografia e referências

Badizé M., Jacques A., Petitpas M. & Pichard J.-F. (1996). *Le jeu du franc-carreau – une activité probabiliste au Collège*. Rouen : IREM de Rouen.

Bellhouse D.R. (2000) "De Vetula": a medieval manuscript containing probability calculations. In *International Statistical Review*, 68/2, 123-136.

Bernoulli J. (1713). *L'Ars Conjectandi*. N. Meusnier (trad. – 1987). Rouen : IREM de Rouen et Université de Rouen Haute-Normandie.

Borovcnik M., Bentz H.-J. & Kapadia R. (1991). A Probabilistic Perspective. In Kapadia & Borovcnik (eds.) *Chance Encounters : Probability in Education*, 27-71. Netherlands : Kluwer Academic Publishers.

Bru B. (1981). Petite Histoire du Calcul des Probabilités. In *Fragments d'Histoire des Mathématiques*. Brochure APMEP 41, 141-158.

Coutinho, C. Q. S. (2001) *Introduction aux situations aléatoires dès le Collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II*. Doutorado em Didática da Matemática pela Université Joseph Fourier - Grenoble I, UJF, França. 2001.

Henry M. (1994). *L'enseignement des probabilités – perspectives historiques, épistémologiques et didactiques*. Besançon : IREM de Besançon.

Laplace P.-S. (1814). *Essai Philosophique sur les Probabilités*. (5e édition en 1825, réimprimée en 1985), Paris : Christian Bourgois éditeur.

Lestienne R. (1993). *Le hasard créateur*. Paris : Éditions La Découverte.

Loève M. (1978). Calcul des Probabilités. In J. Dieudonné (dir.) *Abrégé d'histoire des mathématiques : 1700 – 1900*, tomme II, chapitre XII, 277-313. Paris : Hermann.

Martin T. (1996). *Probabilités et critique philosophique selon Cournot*. Coll. Mathesis. Blay & Sinaceur (dir.). Paris : Librairie Philosophique J. Vrin.

Mesnard J. (1991). *Blaise Pascal – œuvres complètes*. Paris : Desclée de Brouwer.

Montucla J.-F. (1802). *Histoire des Mathématiques*. Tome troisième, 380-426. Réédition (1968). Paris : Blanchard.

Pichard J.–F. (1997). La théorie des probabilités au tournant du XVIIe siècle. In Chaput B. & Henry M. (coords.) *Enseigner les probabilités au Lycée*, 105-130. Reims : IREM de Reims.

Poincaré H. (1912). *Calcul des Probabilités*. Réimpression de la 2e édition, 1987. Paris : Gauthier-Villars.

Rényi A. (1966). *Calcul des Probabilités*. Paris : Ed. Dunod. Réédition (1992). Sceaux : Ed. Gabay.

Stigler S. M. (1984). *The History of Statistics : the measurement of uncertainity before 1900*. (7e réimpression en 1998). Cambridge, Massachusetts, and London, England : the Belknap Press of Harvard University Press.