A idéia de unidade na construção do conceito do número racional

Tânia Maria Mendonça Campos[1] **– UNIBAN - Brasil**

Wilson Roberto Rodrigues – EsPCEx - Brasil

RESUMO
Este trabalho procura apresentar um aspecto significativo da construção do conceito de número racional, que permanece não apropriado por alunos até estágios de escolarização posteriores ao seu ensino formal: a idéia de *unidade*. O trabalho fundamenta-se na gênese do número racional, nas concepções de Vygotsky e Vergnaud e em pesquisas específicas sobre o conceito de fração. Aplicado a um universo que envolve alunos dos ensinos Fundamental, Médio e Superior, o estudo identifica dificuldades referentes à definição do referencial em situações que envolvem o conceito de fração, procura apontar possíveis causas dessas dificuldades e associá-las às práticas pedagógicas mais comumente empregadas no ensino desse objeto matemático.

ABSTRACT
This study wants to present an important particularity of the rational numbers concepts construction which remains still not incorporated by students even after its formal learning: the idea of unit. Based on the creation of the rational number, on the conceptions of Vygotsky and Vergnaud and on specific researches on fractions concept, the study identify difficulties of this students with the unit's idea and intends to show possible causes of difficulties and associate them to the most current pedagogical practices while teaching this mathematical object.

Palavras-chave: Frações, problemas, concepções, Educação Matemática.

Key words: Fraction, problems, conception, Mathematical Education.

---

[1] Bolsista de Estágio Pós-doutoral da CAPES na Universidade de Oxford, Inglaterra, processo BEX3458/06-7.

1. INTRODUÇÃO

A aquisição do conhecimento matemático escolar, como modernamente é concebida, pressupõe que o aluno desenvolva a capacidade de estabelecer relações entre conceitos, construindo uma teia de saberes relacionados, que possibilite agregar novos conhecimentos ao seu repertório – embasando-se em etapas anteriores – e, assim, construir um conjunto de novos conceitos, sempre interligados uns aos outros, que virão a formar seu conhecimento matemático.

É da própria natureza da Matemática esse entrelaçamento de conceitos, e as rupturas nesse processo são sempre traumáticas para essa construção, entendida como um processo contínuo e permanente, que não se restringe ao período da escolarização formal.

Dentre os conteúdos típicos da Matemática do ensino básico, os números racionais constituem-se em um dos temas de construção mais difícil, pois sua compreensão envolve uma variedade de aspectos que se configuram como obstáculos ao seu pleno domínio, pois, embora esse conjunto numérico seja uma extensão dos naturais, as tentativas de estabelecer paralelos entre procedimentos relativos aos dois conjuntos ora são válidas, ora não são, deixando desorientados os alunos que procuram estabelecer esses paralelos, sem uma reflexão mais aprofundada.

No presente artigo pretende-se apresentar um aspecto do conceito de número racional, extraído do trabalho de Rodrigues (2005), que foca a importância da compreensão da idéia de *unidade* como um dos elementos fundamentais na construção do conceito de fração.

O estudo focará a forma fracionária do número racional positivo, ou seja, números da forma p/q, com p e q naturais e $q \neq 0$. Estes números aqui receberão simplesmente a denominação de fração.

No Brasil, esse conteúdo tem seu ensino iniciado, formalmente, a partir do segundo ciclo do Ensino Fundamental, (entre 3ª e 4ª séries com alunos de 9 e 10 anos), estendendo-se pelo menos até o final do terceiro ciclo (5ª e 6ª séries com alunos de 11 e 12 anos).

A relevância do estudo dos números racionais na forma fracionária é praticamente consensual entre os educadores matemáticos, e é destacada por Behr e cols (1983), que apresentam argumentos de ordem prática, psicológica e matemática para justificar sua manutenção nos currículos.

Do ponto de vista prático, o estudo do conceito de fração aperfeiçoa a habilidade de dividir, o que permite entender e manipular melhor os problemas do mundo real. Na perspectiva psicológica, as frações proporcionam um rico campo, dentro do qual as crianças podem desenvolver e expandir suas estruturas mentais para um desenvolvimento intelectual contínuo, principalmente pelo fato de serem explorados no período que corresponde à transição do período concreto para o operatório formal. Do ponto de vista matemático, a compreensão do número racional fornece a base sobre a qual serão construídas, mais tarde, as operações algébricas elementares.

Martinez (1992) reforça essas idéias ao argumentar que reduzir o estudo das frações aos números decimais, como uma simples extensão do sistema decimal de numeração, provocaria uma perda de experiências pré-algébricas importantes na formação matemática dos alunos (p. 34)

A prática de sala de aula, entretanto, revela que mesmo alunos de nível médio ou superior apresentam dificuldades no trato com as frações e demonstram não conhecer aspectos relevantes do conceito de número racional, o que acarreta prejuízos à compreensão de novos conceitos matemáticos.

O estudo também se preocupou em estabelecer relações entre as dificuldades encontradas e as deficiências da prática pedagógica, já apontadas por outros pesquisadores. Partiu-se do pressuposto de que as concepções dos alunos não são estáticas e de que a construção dos conceitos se consolida ao longo do processo de escolarização – e até mesmo após esse período – influenciado pelo amadurecimento, pelos conhecimentos e esquemas de que o indivíduo dispõe e pelas interações a que o sujeito está submetido.

Para isso, focou-se num universo de pesquisa composto por alunos de oitava série do Ensino Fundamental, de terceiro ano de Ensino Médio e de Nível Superior na área de exatas, ou ainda com idade mínima de 15 anos.. A idéia de eleger esse universo – pouco usual para pesquisas com números racionais – é investigar o estado em que se encontra o conceito para esses sujeitos, alguns anos após o estudo formal desses números, considerando o pressuposto mencionado no parágrafo anterior.

Do ponto de vista teórico, o estudo procurou focar-se em quatro grandes linhas de pensamento, que permitem, no entender dos pesquisadores, construir uma visão ampla do conceito de fração e das implicações das práticas pedagógicas mais empregadas em sala de aula para seu ensino: 1) a natureza e gênese do número racional; 2) a visão dinâmica da construção do conceito, conforme os pontos de vista de Vygotsky e Vergnaud; 3) pesquisas específicas sobre a questão do número racional; 4) trabalhos recentes desenvolvidos em ambientes semelhantes.

2. A GÊNESE DO NÚMERO RACIONAL

Em sua obra de referência, Caraça (1952) procura descrever o surgimento dos números racionais como a resposta do homem à necessidade de comparar grandezas, quando a habilidade de contar, que o homem já dominava, não foi suficiente para responder à questão de quantas vezes uma grandeza era maior que outra.

Essa idéia está fortemente associada ao tratamento de grandezas contínuas, que não podem ser contadas, mas comparadas com um padrão previamente estabelecido, ou seja, uma unidade de comparação. Esse problema, que hoje denominamos "expressar a medida de uma grandeza em relação a um padrão", teria solução imediata, obtida por um quociente, sempre que a grandeza tomada como padrão coubesse um número exato de vezes na grandeza a ser medida.

Um impasse viria a surgir, porém, nas situações em que a grandeza tomada como padrão não coubesse um número exato de vezes no objeto medido. Nesse caso, tanto a unidade quanto o objeto medido deveriam ser redivididos em partes iguais e a divisão entre esses números de partes não seria exata, e, portanto, impossível. A busca da solução para esse problema, culminou, ao fim de um longo processo, na simples negação dessa impossibilidade, e a divisão indicada, antes considerada impossível, passou a ser vista como a representação de um novo tipo de número, que expressa o resultado da divisão, agora aceito como possível, apesar de não poder ser expresso por um número inteiro.

Dois princípios básicos que orientam a evolução de toda a Matemática estão presentes na construção do conjunto dos números racionais: *o princípio da extensão*, segundo o qual, na construção de um novo conhecimento, este deve manter válido e englobar o conhecimento já existente; e o *princípio da economia*, segundo o qual as operações usadas para resolver problemas na situação antiga devem ser as mesmas operações usadas para resolver problemas análogos na nova situação. Assim, os casos de medição que tinham como resultado um número natural devem ser considerados casos particulares de medição nesse novo conjunto numérico, que será denominado conjunto dos números racionais. Isso significa que todo número natural deve ser também um número racional. A partir desses dois princípios, os números racionais foram definidos, com suas propriedades e operações.

O fato de serem uma extensão dos números naturais, entretanto, não impede que os números racionais apresentem algumas peculiaridades que têm trazido ao longo do tempo dificuldades à sua aprendizagem e por isso esses números têm merecido especial atenção dos pesquisadores em Educação Matemática.

Dos aspectos citados por Caraça (1952) na construção do número racional, um deles merecerá atenção especial neste texto: a escolha da unidade. As situações-problema que aqui serão discutidas, impõem quase sempre uma reflexão sobre o referencial a ser tomado para a apresentação das respostas e essa reflexão parece não ser suficientemente enfatizada no estudo escolar dos números racionais.

Procura-se também identificar a existência desses aspectos da gênese do número racional nas práticas pedagógicas costumeiramente adotadas para seu estudo, entendendo que a preservação desses aspectos na transposição didática contribuirá para a redução dos obstáculos à construção do conceito.

3. A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO

3.1 Vygotsky: conceitos cotidianos e científicos

Do ponto de vista cognitivo, o entendimento de Vygotsky acerca da construção do conceito, que faz considerações sobre a interação entre a vida escolar e as experiências cotidianas, parece fornecer fundamentos para o enfoque dado ao presente estudo.

Vygotsky divide os conceitos em dois tipos: cotidianos – também chamados de espontâneos – e científicos. Os conceitos cotidianos são desenvolvidos no decorrer da atividade prática do indivíduo e de suas interações sociais imediatas, enquanto os conceitos científicos são adquiridos por meio do ensino, como parte de um sistema organizado de conhecimentos particularmente relevantes nas sociedades letradas, em que os alunos são submetidos a processos deliberados de instrução escolar. (Oliveira, 1992 p.31)

Tanto os conceitos cotidianos como os científicos – embora estes últimos sejam transmitidos em situações formais – passam por um processo de desenvolvimento, isto é, não são aprendidos em sua forma definitiva. As experiências futuras do sujeito tenderão a fazer com que os conceitos cotidianos, que em geral se iniciam no confronto com uma situação concreta, expandam-se no decorrer das leituras e dos trabalhos escolares posteriores, enquanto os conceitos científicos, a partir também das experiências cotidianas, agreguem elementos dessas experiências e caminhem em direção a um nível mais elementar e concreto, num processo em que tanto os conceitos científicos quanto os cotidianos convergem a um ponto comum.

Pode-se mesmo dizer que os conceitos cotidianos têm um desenvolvimento ascendente – rumo aos científicos – e que os conceitos científicos têm um desenvolvimento descendente – em direção aos cotidianos (Oliveira, 1992 p.31).

Essas idéias estão presentes neste trabalho principalmente na forma de explorar o conceito de fração – que é um conceito científico na medida em que é apresentado de maneira formal nos currículos escolares – a partir de situações contextuais. Assim, procura-se detectar indícios dessa convergência entre conceitos científicos e cotidianos e levantar, nesse processo, possíveis pontos críticos, de modo a fornecer elementos para a formulação de atividades intervencionistas.

3.2 Vergnaud: as situações, os invariantes operatórios, as representações.

O entendimento de Vygotsky a respeito da construção do conceito como um processo dinâmico no desenvolvimento das estruturas cognitivas do indivíduo, que se completa ao longo do tempo, ganha novos elementos com as idéias de Vergnaud, que se constituirão no principal referencial teórico deste estudo.

Vergnaud parte da idéia de que o conhecimento está organizado em grandes agrupamentos informais de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e provavelmente entrelaçados no processo de aquisição (Vergnaud 1982), a que ele denomina campos conceituais e entende a construção do conhecimento como um processo progressivo, contínuo e demorado do domínio desses campos.

O autor entende um conceito como sendo uma terna de conjuntos, que não podem ser considerados separadamente: 1) um conjunto de situações que dão sentido ao conceito; 2) um conjunto de invariantes, ou conhecimentos em ação, que são conhecimentos implícitos que o sujeito pode mobilizar para construir esquemas e atribuir significado ao conceito; 3) um conjunto dos recursos de que o sujeito dispõe para representar os esquemas construídos, seja na forma de linguagem, de gráficos, etc (Vergnaud 1997, p.6; 1988, p.1; 1993, p.8).

Com relação à idéia de esquemas, Vergnaud os compreende como a "organização invariante do pensamento para uma determinada classe de situações" (Moreira, 2004, p.12) e eles constituem o grande legado das idéias de Piaget à Teoria dos Campos Conceituais.

Em linhas muito gerais, pode-se dizer que Vergnaud entende a construção do conceito como a repetição constante dos atos de posicionar-se diante uma nova situação, mobilizar conhecimentos pré-existentes para resolvê-la e utilizar-se dos recursos simbólicos para representar o resultado dessas operações de pensamento. Esse processo pode se prolongar no tempo e a cada repetição do ciclo o conceito ganha novos elementos e se torna mais sofisticado, caminhando em direção ao conhecimento científico formalizado.

Essas idéias tiveram um papel fundamental na forma como as questões aqui apresentadas foram elaboradas. O diagnóstico sobre as concepções de número racional que se pretende discutir neste artigo partiu dos pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais para avaliar concepções de número racional em sujeitos de escolaridade relativamente elevada, entendendo que o domínio de todos os aspectos desse conceito corresponde a uma escalada progressiva em direção à construção do conhecimento.

Nessa escalada buscou-se, por meio de situações, permitir que o sujeito percebesse um "sentido" no conceito, mobilizasse seus conhecimentos implícitos para a construção de novos esquemas e expressasse a resposta utilizando-se de recursos simbólicos. Os procedimentos puramente algorítmicos não foram, portanto, objeto do presente estudo.

4. PECULIARIDADES DO NÚMERO RACIONAL

As dificuldades apresentadas na aprendizagem dos números racionais despertaram o interesse de educadores matemáticos a partir da década de 1970.

Thomas Kieren foi um dos primeiros pesquisadores a chamar a atenção da comunidade científica para a complexidade do conceito de fração. O autor propõe que os números racionais só podem ser completamente compreendidos se forem levadas em conta as diferentes "personalidades" com que esses números se apresentam, a que denominou *subconstrutos.* Para o autor, o conceito de número racional pode ser construído a partir da consideração dos quatro seguintes subconstrutos: 1) quocientes; 2) operadores; 3) medidas; 4) razões. (Kieren, 1988, p.166).

Kieren destaca alguns aspectos do número racional que devem merecer atenção especial dos educadores, por se constituírem em dificultadores para o pleno domínio do conceito: 1) o duplo papel desempenhado pelo número 1 no conjunto dos racionais, que serve tanto como unidade divisível que forma a base de comparação, quanto a base conceitual para a formação dos inversos multiplicativos, além, de ser o elemento neutro da multiplicação; 2) o fato de que os números racionais às vezes adquirem um caráter de quociente e às vezes de razão, representando, no primeiro caso, o número de partes em que um todo foi dividido e, no segundo caso, estabelecendo apenas uma propriedade relacional entre dois números; e 3) o fato de que a adição e a multiplicação, ao contrário dos naturais, são independentes no conjunto dos racionais, pois enquanto que nos naturais a multiplicação sempre produz números maiores, nos racionais essa regra não vale, e a multiplicação pode até ser interpretada como uma divisão (Kieren, 1993, p.55). Neste artigo, é retomada a idéia da unidade e do referencial, buscando-se identificar, por meio da resolução de problemas, dificuldades ainda não superadas por estudantes em níveis de escolaridade mais avançada , estudantes com mais de 15 anos de idade.

A questão da importância do conhecimento intuitivo do sujeito na construção significativa dos procedimentos formais referentes às frações, foi o objeto de estudo de Mack (1990). A autora focou seu estudo na tendência dos alunos em fazer generalizações sobre as frações baseadas nas estruturas simbólicas disponíveis para números naturais e, reciprocamente, fazer generalizações sobre números naturais com base nas estruturas simbólicas das frações (Mack, 1995).

Mack (1990) aponta dois pontos importantes a serem levados em conta na construção do conhecimento matemático dos estudantes: 1) a obtenção de situações que promovam a efetiva participação dos alunos e 2) o relacionamento entre o seu conhecimento intuitivo e os procedimentos simbólicos.

Alguns resultados obtidos pela autora – em pesquisas aplicadas a crianças de idades correspondentes à quinta e sexta séries no Brasil – mostram que, em geral, os alunos são capazes de resolver um grande número de problemas apresentados sob a forma de situações do dia-a-dia e explicitar corretamente suas soluções, porém, não conseguem resolver os mesmos problemas quando apresentados de maneira simbólica. Isso sugere que a capacidade de comparar é inicialmente desconectada do significado que os alunos dão para os símbolos fracionais (Mack, 1990, p. 21).

As questões aqui discutidas procurarão destacar a relevância dessas observações na medida em que elas continuaram presentes em sujeitos de escolaridade mais elevada.

Assim como Kieren e Mack, Nunes e Bryant (1997) também diferenciam dois aspectos no ensino dos números racionais. Para os autores, há claramente uma lacuna entre a compreensão das crianças em tarefas experimentais sobre divisão e números racionais e entre as tarefas resolvidas no contexto de avaliações educacionais. Os autores afirmam que, com as frações, as aparências podem enganar e alguns alunos podem passar pela escola sem dominar diversos aspectos cruciais do conceito de fração, mesmo usando termos fracionais certos, falando coerentemente sobre frações e resolvendo alguns problemas.

A idéia das conexões entre situações contextuais e situações simbólicas, investigada por Mack (1995), está intimamente ligada ao conceito de invariante, de Vergnaud. Na mesma linha de pensamento, Nunes e Bryant (2003) partem da concepção mais simples de fração e procuram isolar os invariantes principais do conceito, ordem e equivalência, procurando através desses invariantes, identificar os diversos significados da fração.

A questão da unidade, enfatizada neste artigo, é tratada também no trabalho de Escolano e Gairin (2005). Ao proporem uma abordagem do ensino de frações voltada para o significado medida, os autores se aproximam do caminho de construção do conceito de fração descrito por Caraça (1952) e elaboram uma crítica ao modelo parte-todo, predominante nos livros didáticos, apontando as desvantagens e obstáculos provocados por essa abordagem.

5. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS

Com o objetivo de atingir aspectos mais abstratos do conceito de número racional, Rodrigues (2005) elaborou um instrumento de pesquisa composto de 48 itens, sendo 24 no significado parte-todo e os restantes 24 de significado quociente, todos na forma de situações contextuais, de maneira que as mesmas questões fossem apresentadas ora com desenhos, ora apenas com texto, envolvendo tanto grandezas contínuas quanto grandezas discretas.

Os itens foram elaborados em três níveis de dificuldade, em função da complexidade das operações mentais necessárias para sua resolução, ou seja, dos invariantes operatórios de que o sujeito deve ter capacidade de mobilizar para resolvê-los.

O instrumento foi aplicado a 29 alunos do Ensino Superior na área de exatas, das cidades de Campinas e São Paulo, 31 alunos de terceiro ano de Ensino Médio, de uma escola de caráter profissionalizante de Campinas e 13 alunos de oitava série do Ensino Fundamental, de uma escola particular de Campinas. Observa-se que a idade mínima desta amostra é 14 anos.

Uma primeira análise, de caráter quantitativo, procurou detectar aspectos do conceito de fração em que os sujeitos apresentaram dificuldades. Essas dificuldades foram consideradas pontos críticos, reagrupadas segundo suas características comuns e submetidas a uma nova análise, agora de caráter qualitativo, que buscou mapear os aspectos do conceito que seriam objeto de atenção especial.

Desse instrumento, cinco questões foram selecionadas para discussão neste artigo, por serem consideradas pontos críticos e por apresentarem a peculiaridade de ter a reflexão sobre a idéia de *unidade* como elemento causador das dificuldades apresentadas pelos sujeitos.

6. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DAS QUESTÕES

O ponto em comum entre as questões selecionadas é o fato de que elas foram elaboradas com o objetivo de investigar se os alunos apresentavam dificuldades em chegar à fração imprópria a partir da lógica do modelo parte-todo.

Embora seja razoável pressupor que os alunos do nível de escolaridade selecionado não apresentem dificuldades em relação à concepção de fração imprópria, procurou-se, através das questões, compreender que mecanismos de pensamento os alunos usam para contornar a condição intrínseca ao modelo parte-todo, que pressupõe a parte sempre menor que o todo.

Também foi preocupação dos pesquisadores elaborar situações em que esse objetivo fosse atingido sem o auxílio de algoritmos, apenas através da interpretação de uma situação contextual, buscando a essência da construção do conceito.

A estratégia utilizada foi a de apresentar duas ou mais unidades de um determinado objeto, repartidas segundo uma dada condição, cujas partes selecionadas devessem ser reagrupadas e expressas como fração de uma única unidade. Em todos os casos, a solução do item resume-se a quatro etapas bem definidas:

- dividir dois ou mais "todos" no mesmo número de partes iguais;
- tomar algumas partes de cada um desses "todos";

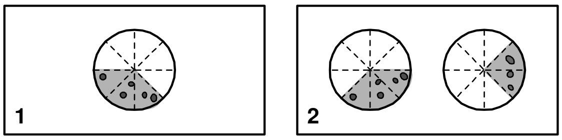
- reagrupar essas partes tomadas sobre um único “todo”;
- exprimir esse resultado como uma fração imprópria.

O instrumento também apresentou questões com essa estrutura que não conduziam a frações impróprias. No quadro a seguir estão transcritas as questões selecionadas para discussão no presente artigo.

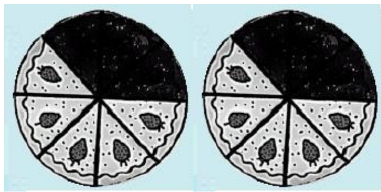
1) Observe as figuras ao lado:

a) Que fração representa a quantidade de pizza existente na mesa 1?

b) Que fração representa a quantidade de pizza existente na mesa 2?



2) Se pudéssemos juntar todos esses pedaços de pizza e exprimir essa quantidade como fração de uma pizza, qual a fração que representa a quantidade de pizza que não foi consumida?



3) Considerando sempre *uma barra* como o inteiro, responda

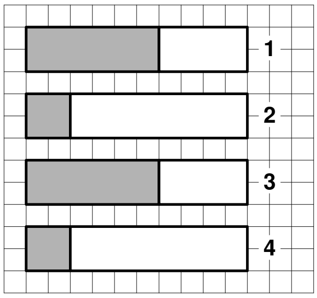
a) Que fração representa a parte pintada barra 1?

b) Que fração representa a soma das partes pintadas das barras 1 e 2?

c) Que fração representa a soma das partes pintadas das barras 1, 2 e 3?

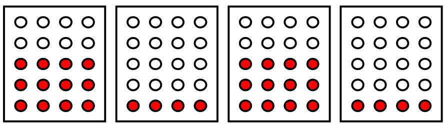
d) Que fração representa a soma das partes pintadas das barras 1, 2, 3 e 4?

e) Que fração representa o dobro das partes pintadas das barras 1 e 2?

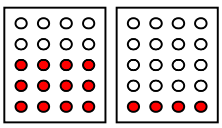


4) Tomando como o todo-referência uma caixa de bolinhas,

a) represente por uma única fração o total de bolinhas pintadas nas 4 caixas.



b) represente por uma fração o dobro da quantidade das bolinhas pintadas na figura abaixo



5) Flávia tinha 4 pacotes iguais de contas coloridas para fazer colares. Para fazer um colar, separou as contas da seguinte maneira: dividiu o primeiro pacote em 5 partes, das quais usou 3; dividiu o segundo pacote em 5 partes, das quais usou uma. dividiu o terceiro pacote em 5 partes, das quais usou 3; dividiu o quarto pacote em 5 partes, das quais usou uma.	a) Que fração de um pacote de contas representa o que foi retirado dos 2 primeiros pacotes? b) Que fração de um pacote de contas representa o que foi retirado dos 4 pacotes?

Foram consideradas corretas para a questão 1 as respostas $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{8}$ respectivamente, para os subitens a) e b). Verificou-se, entretanto, uma grande quantidade de respostas $\frac{5}{16}$ para o subitem b). No caso da questão 2, em que a resposta correta é $\frac{10}{8}$, a resposta $\frac{10}{16}$ apareceu com grande freqüência. Para a terceira questão, em lugar das respostas $\frac{12}{20}$, $\frac{16}{20}$, $\frac{28}{20}$, $\frac{32}{20}$ e $\frac{32}{20}$, consideradas corretas, respectivamente para os subitens a) a e), apareceram com freqüência as respostas $\frac{16}{40}$, $\frac{28}{60}$, $\frac{32}{80}$ e $\frac{32}{40}$, respectivamente para os itens b) a e). Na quarta questão, em lugar da resposta $\frac{32}{20}$, correta para os subitens a) e b), houve grande número de respostas $\frac{32}{80}$ e $\frac{32}{40}$, respectivamente para esses subitens. Finalmente, na quinta questão apresentada, em lugar das respostas corretas $\frac{4}{5}$ e $\frac{8}{5}$ nos subitens a) e b), apareceram muitas respostas $\frac{4}{10}$ e $\frac{8}{20}$.

Chamou a atenção dos pesquisadores, desde o primeiro momento, que a inserção de mais de um "todo", na medida em que acrescenta ao problema mais de uma possibilidade de escolher o referencial a ser tomado, ou seja, a unidade, foi a causadora das principais dificuldades encontradas pelos alunos, por isso optou-se por direcionar o foco da análise para esse aspecto.

A tabela a seguir apresenta as porcentagens de alunos que resolveram as questões usando esses referenciais diferentes do esperado, discriminando sujeitos dos Ensinos Fundamental, Médio e Superior.

Item	**Resposta**	**Porcentagens (de erros)**		
		Fundamental	**Médio**	**Superior**
1b	$\frac{5}{16}$	69,2	67,7	65,5
2	$\frac{10}{16}$ ou $\frac{5}{8}$	38,4	51,6	51,7
3b	$\frac{16}{40}, \frac{8}{20}, \frac{4}{10}$ ou $\frac{2}{5}$	–	29,0	34,4
3c	$\frac{28}{60}, \frac{14}{30}$ ou $\frac{7}{15}$	–	25,8	31,0
3d	$\frac{32}{80}, \frac{16}{40}, \frac{8}{20}, \frac{4}{10}$ ou $\frac{2}{5}$	–	29,0	27,6
3e	$\frac{32}{40}, \frac{16}{20}, \frac{8}{10}$ ou $\frac{4}{5}$	–	29,0	44,8
4a	$\frac{32}{80}, \frac{16}{40}, \frac{8}{20}, \frac{4}{10}$ ou $\frac{2}{5}$	46,1	87,1	48,4
4b	$\frac{32}{40}, \frac{16}{20}, \frac{8}{10}$ ou $\frac{4}{5}$	30,7	90,3	48,3
5a	$\frac{4}{10}$ ou $\frac{2}{5}$	7,6	22,5	20,7
5b	$\frac{8}{20}, \frac{4}{10}$ ou $\frac{2}{5}$	15,3	19,35	24,1

Uma análise do conjunto dos dados apresentados, mostra que, em praticamente todos os casos, essas respostas incorretas foram apresentadas por um número significativo de alunos. Em dois casos, porém, parece haver distorções: 1) a ausência de respostas com referencial incorreto na questão 3, fornecida pelos alunos do Ensino Fundamental, e 2) o número aparentemente excessivo de respostas no referencial incorreto apresentado pelos alunos do Ensino Médio, na questão 4.

No caso da questão 3 por alunos do Ensino Fundamental, a análise dos protocolos mostra que a ausência de respostas com o tipo de erro pontuado não significou um aumento de respostas certas. Cerca de 30% das respostas desses sujeitos foram classificadas como inconsistentes ou deixadas em branco.

No caso das respostas à questão 4 pelos alunos do Ensino Médio, o resultado inesperado foi objeto de uma análise mais aprofundada, em que foram entrevistados alguns dos sujeitos. Constatou-se que o elevado número de respostas no referencial incorreto foi, em parte, fruto de uma leitura desatenta do texto, que os alunos atribuíram ao fato de se tratar da primeira folha do instrumento de pesquisa e o desenho colorido ter sugerido ser auto-explicativo, dispensando a leitura do texto. O resultado apresentado por esses dois grupos de questões, portanto, parece ter recebido outras influências, além do que as questões se propunham a avaliar. Os demais resultados, entretanto, parecem dar suporte às conclusões a que o estudo chegou.

O subitem 1b) chama a atenção pela simplicidade da situação e pelo elevado número de respostas no referencial considerado incorreto. A diferença mais significativa entre o subitem 1b) e os demais itens analisados nesta seção é o fato de que, nos exercícios anteriores, havia sempre no texto uma indicação de qual deveria ser o referencial tomado, enquanto que, neste caso, esperava-se que o aluno percebesse, a partir do próprio contexto, que a resposta deveria ser fornecida em função de *uma pizza*. O resultado foi um número elevado de respostas (mais que 65% em todos os casos) que se apresentaram com uma fração de denominador 16, tomando as duas pizzas como referencial.

No item 2, a informação acerca do referencial a ser tomado estava na frase: "Se pudéssemos juntar todos esses pedaços de pizza e exprimir essa quantidade como fração de uma pizza". A frase taxativa não impediu que cerca de 40% dos alunos do Ensino Fundamental e 50% dos alunos dos Ensinos Médio e Superior fornecessem como respostas frações com denominador 16, novamente tomando as duas pizzas como referencial.

O texto do item 3, distribuído em 5 subitens, informava no cabeçalho que uma barra deveria ser tomada como o todo-referência para todos os subitens. Essa informação foi utilizada por um número maior de alunos do Ensino Fundamental, como já foi comentado, porém, um número significativo de alunos dos Ensinos Médio e Superior apresentou suas respostas em termos do número total de partes de duas, três ou quatro barras.

O subitem 3a) possuía resolução imediata, obtida pela dupla contagem das partes de uma barra, e foi respondido corretamente por todos os sujeitos. O subitem 3b) apresentava como resposta uma fração própria e os demais subitens, frações impróprias. Não houve diferenças significativas entre o percentual de respostas com referencial diferente do esperado entre o subitem 3b) e os demais subitens, sugerindo que a questão da fração imprópria é menos significativa que a da escolha do referencial correto.

Com relação à questão 4, mesmo relevando-se o resultado apresentado pelos alunos do Ensino Médio, constata-se um elevado número de respostas com denominador 80 e 40, respectivamente nos subitens 4a) e 4b). A argumentação usada pelos alunos do Ensino Médio em relação à questão, de que a figura parecia auto-explicativa, levando a que muitos alunos a resolvessem sem ler o enunciado, reforça a observação feita em relação à questão 1, de que os alunos tendem a tomar como referencial a maior coleção disponível, evitando a fração imprópria.

Na questão 5, a inexistência da figura forçava a que os dados para a resolução do problema fossem extraídos exclusivamente do próprio texto. Isso não impediu que um número significativo de sujeitos, principalmente dos ensinos Médio e Superior (cerca de 20%) tomassem o referencial incorreto.

Do conjunto das respostas, três constatações merecem destaque:

1) As diferentes formas de enfatizar o referencial em que se deseja que o resultado seja expresso não foram suficientes para impedir que um número significativo de sujeitos tomasse como referencial a maior coleção de objetos disponível para responder à questão.

2) Quando a definição do referencial estiver implícita no contexto, como no caso do item 1, um percentual ainda maior de alunos tende a tomar como referencial o maior número disponível de objetos, mesmo que isso implique em mudar o referencial dentro de subitens do mesmo problema, tirando das frações o poder de representar quantidades, comparar ou operar significativamente.

3) No caso dos subitens 3d) e 3e) e dos subitens 4a) e 4b), nem mesmo a evidência visual de que as respostas deveriam ser as mesmas, por se tratarem de áreas iguais no primeiro caso, e do mesmo número de bolinhas, no segundo, impediu que um grande número de sujeitos respondesse com frações diferentes, cujo denominador era sempre a maior coleção de objetos disponível.

A questão mais significativa observada, portanto, é o fato de que *há uma tendência do aluno em tomar como referencial o maior conjunto de objetos ou de partes de objetos disponível.* As diferentes formas de apresentar a questão, por mais enfáticas que sejam ao definir o referencial, não impedem que um número considerável de sujeitos mantenha essa tendência. A observação das respostas também sugere que é irrelevante o fato de se tratar de fração imprópria ou não.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Retomando a proposta de Vergnaud, um conceito se constrói ao longo do tempo, através de um conjunto de situações que dão sentido a esse conceito e que conduzem o sujeito a mobilizar os chamados *conhecimentos em ação*, ou *invariantes operatórios*, que são conhecimentos implícitos, ou seja, que o indivíduo dispõe e utiliza, embora não seja necessariamente capaz de explicitar. A externalização desse processo passa pelo repertório de representações de que o sujeito dispõe para expressá-lo.

A constante exposição do sujeito a esse processo ao longo do tempo faz com que ele agregue novos elementos a esse conceito e adquira capacidade de explicitar formalmente os invariantes operatórios, que passam a se constituir em seu repertório de conhecimentos científicos.

No caso específico do conceito de fração, a idéia de que as frações só têm sentido enquanto objetos matemáticos capazes de representar quantidades, de comparar quantidades ou de operar com essas quantidades, passa necessariamente pela idéia fundamental de que essas quantidades devem ser expressas segundo um mesmo referencial.

Os resultados apresentados nesta pesquisa sugerem que esse conhecimento ainda não está presente em muitos sujeitos, nem mesmo sob a forma de conhecimento implícito. Isso se constitui em um obstáculo importante à construção plena do conceito de fração, e o estudo em questão permite inferir que esse obstáculo não se reverte com facilidade ao longo do tempo.

Uma tentativa de levantar hipóteses que expliquem as causas desses obstáculos pode estar na comparação do processo de construção do conceito de número racional, enquanto conhecimento humano, com os modelos mais utilizados na prática da sala de aula.

Os números racionais surgiram como necessidade humana, a partir do momento em que o ato de contar, típico das grandezas discretas, não foi mais suficiente para quantificar grandezas contínuas, como porções de terra, por exemplo. A tentativa de resolver esse problema resultou numa forma mais sofisticada de contar, em que não se contavam objetos, mas se estabelecia um padrão de comparação e se contava o número de vezes que o objeto era maior que esse padrão.

Dessa necessidade, fortemente associada ao que hoje denominamos “medir”, surgiu o número racional. O ato de medir se fundamenta na fixação do referencial, que adquire o status de *unidade* quando o estudante conquista a capacidade de generalizar, caminhando, da idéia de fração – aparentemente simples –para idéia de número racional, passando das associações aos objetos físicos às abstrações características dos objetos matemáticos.

Acreditamos que esta pesquisa acrescenta aos trabalhos já desenvolvidos sobre o tema as constatações de que

- a idéia de *unidade*, que está fortemente associada ao conceito de número racional não tem sido incorporada ao conceito por muitos estudantes quando apresentados a situações simples que envolvem a idéia de fração. Ao responder às questões, os estudantes procuram para denominador da fração o maior número disponível, não levando em conta o contexto ou mesmo a informação taxativa apresentada no enunciado sobre qual deveria ser o referencial utilizado;

- as práticas pedagógicas e a as situações vivenciadas, em ambiente escolar ou não, parecem não ser suficientes para que essas idéias sejam apropriadas, pois a pesquisa indicou que o problema permanece significativo para alunos de escolaridade relativamente elevada (da oitava série até o nível superior).

Uma primeira tentativa de compreender as causas desses problemas passa pela prática pedagógica, que consolidou o modelo parte-todo como ponto de partida para o ensino das frações às crianças. Em muitos livros didáticos, a idéia de fração é introduzida como uma breve apresentação de uma situação estática em que se define por dupla contagem as partes em que o todo foi dividido e o número de partes tomadas. O traço para representar a fração, o numerador e o denominador surgem como uma convenção, e dessa forma, pode-se chegar à idéia de fração passando ao largo da necessária reflexão sobre a fixação da unidade. Na fase seguinte, costuma-se passar com rapidez a procedimentos algorítmicos relativos às operações, antes que todos os aspectos que envolvem o conceito sejam refletidos e construídos pelos alunos.

Essas idéias encontram respaldo nas observações de Silva (1997) e Santos (2005), que indicam que os professores tendem a privilegiar o modelo parte-todo, nas fases iniciais do estudo, e a partir rapidamente para atividades algorítmicas, envolvendo operações com frações.

Nessa passagem das situações conceituais para os algoritmos, as frações adquirem o status de número, e se costuma dar pouca ênfase a um novo papel adquirido pela unidade, que deixa de ser o objeto que está sendo repartido e passa a ser o próprio elemento neutro da multiplicação. A passagem para essa fase pressupõe um grande salto em termos de abstração, aparentemente não conseguido pela maioria dos alunos, configurando-se exatamente aí, no entender destes pesquisadores, a origem dos falsos conceitos que os alunos carregam ao longo da escolarização, e que este estudo mostra serem surpreendentemente duradouros.

Acreditamos que esse problema possa ser amenizado com um ensino que contemple o significado de *medida*, como proposto por Escolano e Gairín (2005), tendo como característica principal manter o referencial associado à fração de maneira mais efetiva.

As observações de Santos (2005), entretanto, destacam que o significado *medida* é um dos que os professores menos consideram na elaboração de suas atividades.

Vale ressaltar que a identificação das dificuldades que envolvem a compreensão do papel da unidade no conjunto dos números racionais apontada por Kieren (1981, 1993) e Mack (1990), em estudos com crianças em fase inicial de escolarização aparece fortemente na análise dos nossos resultados indicando que esta dificuldade persiste, mesmo em estudantes em fase mais avançada de escolarização.

Essas considerações pretenderam, portanto, apresentar a importância da compreensão da idéia de unidade como um dos elementos fundamentais na construção do conceito de fração e acrescentar novas informações às já disponibilizadas por pesquisas anteriores. Embora se deva considerar que a amostra tomada neste trabalho não permita generalizações para universos diferentes do estudado, as evidências obtidas e seu confronto com os referenciais teóricos usados fornecem elementos que permitem supor que seus resultados podem ser úteis como indicadores de tendências.

Finalmente, espera-se que este trabalho possa fornecer subsídios a outros pesquisadores de modo a inspirar novas pesquisas que proponham tanto trabalhos mais abrangentes quanto intervenções que visem obter soluções para os problemas do referencial e da idéia de unidade nos problemas envolvendo os números racionais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEHR, M. J., LESH, R., POST, T. R., SILVER, E. A., **Rational Numbers Concepts, in Acquisition of Mathematics Concepts and Process**, Ed by Richard Lesh e Marsha Landau, Londres, 1983.

CARAÇA, B. J., **Conceitos fundamentais da Matemática –** Tipografia Matemática, Lisboa, 1952.

ESCOLANO, R. V. e GAIRÍN, J. M. S., **Modelos de Medida para la Enseñanza Del Número Racional en Educación Primaria**, em Revista Iberoamericana em Edución Matemática, Nr 1, p. 17 a 35, em www.fisem.org, acessado em 10 de abril de 2005. Zaragoza, 2005.

KIEREN, T. **Five Faces of Mathematical Knowledge Building**, Edmonton, Department of Secondary Education, University of Alberta, Canadá, 1981.

___________ , **Personal Knowledge of rational numbers: its intutive and formal development** .In: J Hiebert and M. Behr (eds.) Number Concepts and Operations in the Middle Grades (pp.162-80). Hillsdale, New Jersey: Erlbaum. 1988.

___________ , **Rational and Fractional Numbers: From quotient Fields to Recursive Understanding**, in Rational Numbers: An Integration of Research, Londres, 1993.

MACK, N., **Learning Fractions with Understanding: Building on Informal Knowledge**, in Journal for Research in Mathematics Education, Vol 21, No 1, p. 16-32, 1990.

____________, **Confounding the Whole-number and Fractions Concepts when Building on Informal Knowledge,** I Journal for Research in Mathematics Education, Vol 26, No 5, p. 422-441, 1995.

MARTINEZ, E. M., **Significados y Significantes Relativos a las Fracciones**, Educacion Matemática, Vol 4, No 2, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1992.

MOREIRA, M. **A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Investigação nessa Área**, Instituto de Física, UFRS, 2004.

NUNES, T., BRYANT, P**. Crianças Fazendo Matemática**, Porto Alegre – Editora Artes Médicas, 1997.

NUNES, T, BRYANT, P. U. e HURRY, J. **The effect of situations on children's understanding of fractions**. Trabalho apresentado no encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics. Oxford, 2003.

OLIVEIRA, Marta Kohl, **Vygotsky e o processo de formação de conceitos**, in Piaget, Vygotsky, Wallon Teorias Psicogenéticas em discussão, Yves de la Taile (org), Ed Summus São Paulo, 1992.

RODRIGUES, W. R., **Números Racionais: um estudo das concepções de alunos após o estudo formal.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC-SP, 2005.

SANTOS, A., **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP, 2005.

SILVA, M. J. **Sobre a Introdução do Conceito de Número Fracionário**. Dissertação de Mestrado em Educação matemática, PUC- SP, 1997.

VERGNAUD, G. **A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems**. In Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T. Addition and subtraction. A cognitive perspective, p. 39-59, Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum, 1982.

_____________ , **Multiplicative Structures**. In Hiebert, H e Behr, M. (org), Research Agenda in Mathematics Education. Number, concepts and operations in the Middle grades. Laurence Eribaum Ed., pp 141-161, Hilsdale, 1988.

______________ , Teoria dos Campos Conceituais. In: Nasser, L (Ed) Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. (p.2) 1993.

_______________, **The Nature of Mathematical Concepts**, in Learning and Teaching Mathematics: Na International Pesrective. Nunes, T. and Bryant, P. (org) 1997.