

El problema de la modelización matemática en la formación de profesores: una propuesta de cambio curricular desde la TAD

The problem of mathematical modeling in teacher training: a proposal for curricular change from the ATD

Federico Olivero¹

Universidad Nacional del Comahue - Argentina

<https://orcid.org/0000-0002-1998-3153>

Mariela Martínez²

Univ. Nac. del Comahue, Argentina

<https://orcid.org/0000-0001-6895-2559>

María Laura Santori³

Univ. Nac. del Comahue, Argentina

<https://orcid.org/0000-0001-5142-0513>

Resumen

En este trabajo abordamos el problema de la introducción de la modelización en la formación de profesores de matemática. En particular, analizamos un espacio curricular creado en el nuevo plan de estudios del profesorado universitario en matemática de la Universidad Nacional del Comahue, Argentina, con el principal objetivo de vivenciar un proceso de estudio basado en un REI multidisciplinar como parte constitutiva de la formación matemática en la carrera de profesorado universitario en matemática.

Palabras-Clave: Teoría Antropológica de lo Didáctico, Recorrido de Estudio e Investigación, Modelización Matemática.

Abstract

In this work we approach the problem of the introduction of the modeling in the teachers' formation of mathematics. Especially, we shall review a curricular course created in the new study plan of the university teachers career in mathematics at the Universidad Nacional del Comahue, Argentina, with the principal aim to experiment a process of study based on the

¹ fedeolivero@gmail.com

² mariela.e.martinez@gmail.com

³ mlsantori@yahoo.com.ar

layout of one SRP multidisciplinary as constitutive part of the mathematical training in the career of university professorship of mathematics.

Keywords: Anthropological Theory of the Didactic, Course of study and research, Mathematical modeling.

El problema de la modelización matemática en la formación de profesores: una propuesta de cambio curricular desde la TAD

Formulación del problema: la modelización matemática en la formación de profesores

Desde el año 2011 hemos constituido un grupo de investigación en didáctica de las matemáticas en la Universidad Nacional del Comahue (UNCo) cuya finalidad es estudiar el problema de la formación inicial de profesores de matemáticas. Para nuestra investigación nos hemos posicionado desde el marco de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD).

Ante la multiplicidad de aristas que presenta el problema de la formación de profesores, abordaremos *el problema de la modelización en la formación de profesores de matemática*. A partir de las expresiones vertidas por los egresados, los profesores y los estudiantes de la carrera de profesorado, como así también del análisis de los planes de formación, investigaciones y documentos oficiales, pudimos caracterizar algunas cuestiones problemáticas puntuales:

- Si bien, en nuestra universidad, los planes de estudio de las diferentes disciplinas específicas de la formación de profesores en matemática mencionan el abordaje de la resolución de problemas y su importancia en el proceso de estudio de las matemáticas, hay una ausencia casi total de un trabajo genuino de modelización.

- Se proponen a los estudiantes un sólido y elevado cúmulo de conocimientos matemáticos pero, en el momento de desarrollar su práctica profesional en una escuela secundaria, estos encuentran fuertes limitaciones para hacer uso de ese conocimiento de manera funcional que les permita pensar sus propuestas didácticas profesionales.

- En los documentos oficiales y los diseños curriculares provinciales y nacionales se menciona la necesidad de una educación emancipadora que permita a los estudiantes asumir un rol protagonista en su proceso de estudio, que los incentive a cuestionar y asumir una posición crítica y reflexiva de la realidad, pero en la formación de profesores de matemáticas, particularmente en nuestra universidad, hay muy pocos espacios que permitan a los futuros profesores pensar este tipo de educación.

Nos planteamos entonces la siguiente cuestión:

¿Qué dispositivo didáctico podemos proponer en la formación de profesores que permita abordar el trabajo matemático basado en la modelización? ¿Qué condiciones debemos gestionar para hacer posible la implementación de estos dispositivos? ¿Cuáles son y cómo se construyen los conocimientos necesarios para el desempeño profesional de los profesores que permita realizar una gestión efectiva de estos dispositivos?

Este problema, entre otros, ha sido abordado y viene siendo investigado desde hace algunos años en el ámbito de la TAD, como se puede indagar en numerosos trabajos y tesis presentadas (Barquero, 2009; Bosch & Gascón, 2009; Cirade, 2006; Olivero, Bosch & Gascón, 2013; Ruiz-Olarría, 2015; Licera, 2017; entre otros).

¿Qué entendemos por modelización matemática?

La TAD postula que “gran parte de la actividad matemática puede identificarse [...] con una actividad de modelización matemática” (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 51).

Esta afirmación adquiere pleno sentido si, en primer lugar, la noción de modelización matemática (MM) no queda limitada sólo a la “matematización” de situaciones extramatemáticas, esto es, cuando la modelización intramatemática es considerada como un aspecto esencial e inseparable de las matemáticas y, en segundo lugar, cuando se dota de un significado preciso a la actividad de modelización dentro del modelo general de la actividad matemática propuesto por la TAD (Serrano, 2013).

La MM se desarrollará de acuerdo a cuatro estadios (Chevallard, 1989; Bolea, 2003; Barquero, 2009):

1. Planteamiento de la situación problema y delimitación de las cuestiones a estudiar.
2. Construcción del modelo, determinación de las variables, planteamiento de hipótesis, relaciones y formalización de dichas relaciones.
3. Trabajo con el modelo para dar respuesta a las cuestiones planteadas.

4. Interpretación de los resultados y planteamiento de nuevas cuestiones.

La modelización matemática y la formación de profesores

Desde la TAD se propone un dispositivo didáctico: los recorridos de estudio e investigación (REI), que integra la razón de ser de los saberes escolares en el corazón del proceso de estudio (Chevallard, 2004) y favorece el desarrollo de las condiciones que se requieren para hacer posible una actividad matemática funcional (Barquero, 2009; Ruiz-Munzón, 2010; Serrano, 2013).

La noción de REI surge de la necesidad de fundamentar las organizaciones didácticas —tanto las escolares como las de cualquier otro tipo de institución— en una epistemología realmente funcional, en la que los saberes aparezcan como máquinas productoras de conocimientos útiles a la creación de respuestas R a cuestiones Q (Chevallard, 2004).

En el caso de la formación del profesorado y teniendo en cuenta las necesidades de formación detectadas en los profesores para gestionar los REI experimentados, es de fundamental importancia el diseño de recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado (REI-FP), fuertemente articulados con los REI, y que servirán para organizar las praxeologías matemáticas por enseñar y para la enseñanza, e integrar la formación matemática y didáctica del profesorado (Ruiz-Olarría, 2015).

Es por ello que, para permitir la implementación efectiva de los REI-FP en la carrera es necesario, como parte integrante de la formación matemática de los profesores, realizar recorridos matemáticos que integren la modelización matemática en el quehacer de los estudiantes de grado. A tal fin, se ha creado el taller: *Actividad matemática y resolución de problemas (AMRP)* como un espacio curricular destinado a ello.

La propuesta del taller AMRP, constituye el espacio físico y temporal dentro del diseño curricular de la carrera de profesorado, para hacer efectiva la realización de un REI, donde la

principal finalidad es la modelización de situaciones extra-matemáticas y el estudio de las características de los procesos de modelización.

El nuevo plan de profesorado universitario en matemática en nuestra universidad

A partir del año 2014, en nuestra Universidad, se ha implementado un nuevo plan (Ord. C.S. 1467/14 – UNCo, 2014) de profesorado universitario en matemática, que tiene una duración de 4 años. Esta carrera es de grado, por lo tanto la mayoría de los estudiantes que acceden a ella, recién han finalizado sus estudios en la escuela secundaria (17 años o más).

Este nuevo plan contempla varias modificaciones sustanciales con respecto al plan anterior. Una de las principales variantes que se han introducido es la incorporación de nuevos espacios curriculares. Hasta la llegada del nuevo plan, la formación de profesorado contaba con dos grandes bloques independientes entre sí (o al menos, pensados independientemente). Por un lado, la formación matemática específica de la carrera, compartida con la formación de licenciados en matemáticas; y por otro, la formación pedagógica, común a todas las carreras de profesorado de diferentes disciplinas. Sólo al final de la carrera, y durante dos cuatrimestres, se abordaban las cátedras de “Didáctica de las matemáticas” y “Residencias”, donde se intentaba articular estos dos bloques de conocimientos que habían sido trabajados de forma totalmente separados uno de otro.

Por todo ello, en el proceso de reformulación del plan se han introducido, además de las materias tradicionales del campo disciplinar y de la formación didáctico-pedagógica, diferentes espacios curriculares que permiten reflexionar sobre el trabajo matemático de un profesor, las organizaciones matemáticas necesarias en la enseñanza y la importancia de la MM en el establecimiento de las razones de ser de los objetos matemáticos. Así en el nuevo currículum se han introducido las materias: *Introducción al quehacer matemático, Taller actividad matemática y resolución de problemas, Taller sobre práctica docente, Actividad*

matemática como asunto de enseñanza, Didáctica de la matemática 1, Didáctica de la matemática 2 y residencia, Epistemología e historia de las matemáticas y Modelos matemáticos.

Uno de los primeros espacios creados para la introducción y trabajo de la MM en la formación de profesores es el taller AMRP que se desarrolla en el primer cuatrimestre del segundo año de la carrera, con una carga horaria de 4 horas semanales durante 16 semanas. El objetivo principal de este espacio es realizar un proceso de estudio sobre la propuesta de un REI basado en una cuestión de interés multidisciplinar. En el año 2015 el primer REI abordado estuvo basado en el estudio de la dinámica de poblaciones de bacterias que contaminan el cauce del río Limay (uno de los dos ríos que atraviesa la ciudad de Neuquén donde se encuentra emplazada nuestra universidad) y en el trabajo realizado por Berta Barquero en su tesis doctoral (Barquero, 2009), respetando la organización matemática y la propuesta didáctica planteada.

En el año 2016 se desarrolló un REI basado en una nueva problemática: el estudio de la optimización de funciones reales de una y dos variables a partir del problema de la optimización de envases.

En el último año, se ha reeditado una versión del recorrido realizado en el año 2015 con pequeñas modificaciones, que permitieron optimizar los resultados. Los detalles de esto se proponen en otro trabajo redactado por el grupo de investigación (Escobar, Olivero & Santori, en prensa).

Análisis de la implementación de los REI en el taller AMRP

Los REI propuestos se desarrollaron en la UNCo durante el primer cuatrimestre de 2015, 2016 y 2017 en cursos de aproximadamente veinticinco estudiantes del Profesorado Universitario en Matemática.

Acuerdos preliminares

Previo al inicio de cada REI establecimos algunos acuerdos con los estudiantes, que modifican el contrato didáctico habitual de la institución:

- El trabajo se realiza en grupos de dos o tres integrantes.
- Los estudiantes tienen la libertad de elegir la confección de los grupos que se mantendrán estables durante todo el cuatrimestre.
- En cada sesión de trabajo, cada grupo debe entregar un informe por escrito con todo lo realizado en ese día. El informe debe contener: cuestiones a abordar en la sesión de trabajo, posibles vías de resolución que se trabajaron y conclusiones finales.
- Al inicio de cada sesión, uno de los grupos oficia de “grupo secretario” contando un resumen de los avances y problemas que han quedado plasmados en los informes entregados la sesión anterior.
- La asistencia a clase es obligatoria, permitiendo sólo dos inasistencias durante el cursado del taller.
- La acreditación comprende haber entregado grupalmente todos los informes de avances, un examen escrito individual al final del taller, y la posibilidad de recuperar este examen.

Enriquecimiento de la actividad matemática en los recorridos

Queremos destacar hechos que sucedieron durante el desarrollo del taller en sus tres ediciones.

La limitación de las técnicas conocidas.

En los problemas propuestos en las distintas disciplinas y en los libros de texto, las soluciones siempre se pueden hallar analíticamente de manera precisa y a partir de las técnicas disponibles en la institución. Sin embargo, en los diferentes recorridos propuestos en el taller, los estudiantes no siempre contaban con técnicas analíticas que permitieran hallar de manera

directa soluciones exactas a los problemas. Esto obligó a buscar y construir técnicas y discursos tecnológicos originales que permitieran, por lo menos, obtener una solución aproximada a los problemas planteados. Por ejemplo, en uno de los recorridos, si bien los estudiantes ya habían cursado y aprobado la materia Cálculo 1 donde se abordan todas las técnicas clásicas del cálculo diferencial en una variable, las funciones que emergieron en el REI distan sustancialmente de las funciones estudiadas en dicha materia, donde siempre era posible hallar sus ceros de manera analítica. Esto llevó a que el grupo de estudiantes propusiera el uso de las TIC como medio de estimación de dichos puntos y del comportamiento general de la función a estudiar, y debiera construir un discurso tecnológico apropiado para justificar sus técnicas.

La emergencia de más de una técnica para dar respuesta a una cuestión.

Al contar con grupos heterogéneos, donde algunos estudiantes provienen de un cambio de plan y cuentan con recorridos académicos muy diferentes, se nos planteó el problema de articular el trabajo entre los grupos, dada la diversidad de niveles de formación.

Al proponer los problemas de manera abierta y permitir el abordaje con diferentes niveles de profundidad, dando la posibilidad de la emergencia de distintas técnicas provenientes de diversos recorridos personales de estudio de los estudiantes, esta realidad se transformó en una potencialidad para la búsqueda de respuestas.

En este punto, hay que destacar que, ante la emergencia de diferentes técnicas, se hacía necesario justificarlas, establecer algún criterio de selección de las mismas, pensando en su fiabilidad, economía, pertinencia, entre otras cuestiones.

La ventaja de introducir las TIC

Ante la necesidad de visualizar el comportamiento de los modelos cuya finalidad es realizar conjeturas y validaciones empíricas, los estudiantes propusieron el uso de diferentes dispositivos TIC, que no emergió como una imposición externa al problema, sino que fue genéticamente necesaria para encontrar una vía de acción en pos de nuestro objetivo de estudio.

Por ejemplo, al introducirnos en el estudio de funciones de dos variables, en la segunda edición del taller AMRP, el uso de los software Excel® y WxMaxima® facilitó la búsqueda y visualización de los extremos absolutos. Dado que los estudiantes no habían realizado estudios previos sobre este tipo de funciones, resultó indispensable la visualización y manipulación de las gráficas de estas funciones para construir las primeras nociones intuitivas de una praxeología en torno a la búsqueda de extremos de funciones de este tipo.

Esto estableció un nuevo reparto de responsabilidades, donde los estudiantes tomaron decisiones sobre en qué momento y qué herramientas utilizar para llegar a las respuestas que pretendían encontrar y no dependieron de las sugerencias, ayudas o indicaciones de los profesores.

Análisis de los resultados

Una vez finalizado el ciclo lectivo, en cada edición del taller propusimos a los estudiantes realizar una evaluación de los aspectos que, según ellos, se debían destacar.

También incluimos en este apartado las opiniones de los docentes sobre algunas cuestiones importantes.

a. La visión de los estudiantes ante este tipo de dispositivo didáctico

Mediante una encuesta donde los estudiantes debían aportar sus impresiones sobre el proceso de estudio que habían realizado, pudimos recabar aspectos positivos y negativos que posteriormente analizamos.

Aspectos negativos:

- Algunos estudiantes vivencian como *desorden* o *falta de directivas claras* el hecho que las consignas no fueran totalmente determinadas y cerradas. Enfrentarse a la necesidad de tomar decisiones, plantear hipótesis, decidir sobre las variables, optar por los caminos a seguir, entre otras cuestiones, generaba mucho rechazo dado que durante gran parte de la carrera, las

actividades a resolver eran precisas y claras. Todas estas cuestiones venían “resueltas” en los enunciados, o los docentes eran los encargados de resolverlas.

- *Por momentos las clases parecían improvisadas.* El hecho de avanzar a partir de cada respuesta que proporcionaban los estudiantes, generaba la impresión que desde la cátedra no se había pensado nada previamente. Esto impulsó que al finalizar cada edición del taller, se les expusiera a los estudiantes un esquema del REI y se discutiera con ellos las características de este dispositivo didáctico.

- *Quedaron cuestiones abiertas.* Al estar tan arraigado en el contrato didáctico que los problemas matemáticos abordados durante nuestra escolarización siempre tienen respuesta (y en la mayoría de los casos debe ser única y acabada), los estudiantes mostraron cierto recelo a dejar cuestiones sin responder o con respuestas parciales, considerando como incompleto el proceso de resolución.

Aspectos positivos:

- *La dinámica de la clase y la modalidad de trabajo en clase.* Acostumbrados a tomar apuntes en forma pasiva durante las clases teóricas y resolver ejercicios prácticos, muchas veces, en soledad; mostraron mucho entusiasmo en el momento de enfrentarse a problemas en forma grupal y discutir resoluciones con el resto de sus pares.

- *Las exposiciones para recordar lo visto en las clases anteriores.* Esta instancia constituyó un espacio para que los estudiantes tomaran el rol de expositores frente a sus compañeros, rompiendo el esquema clásico del docente como único expositor.

- *La instancia de evaluación a mitad del recorrido como evaluación del proceso de estudio.* Se les propuso a los estudiantes un trabajo práctico individual donde se debía reconstruir un modelo semejante al trabajado, pero con algunas nuevas hipótesis. Esto modificaba sustancialmente el modelo, pero hacía que se pudiera resolver con las mismas técnicas elaboradas hasta el momento. Esta evaluación tenía la premisa que no acreditaba para

la nota final del taller, sino que permitía evaluar los conocimientos adquiridos por cada uno de los estudiantes hasta el momento.

b. **Apreciaciones de los docentes**

Destacamos algunas cuestiones que emergieron durante las diferentes ediciones del taller y que creemos relevantes.

Pérdida de la ilusión de control.

En las modalidades de clases teóricas y prácticas, comúnmente utilizadas en la universidad, se genera una falsa ilusión de control sobre lo que los estudiantes son capaces de hacer o no. La creencia de muchos docentes que aseguran el éxito en la resolución de problemas a partir de las explicaciones teóricas y la posterior ejercitación práctica, queda refutada a diario en las aulas.

La implementación de los REI permite romper con esta ilusión de control, dado que el avance en el proceso de estudio depende totalmente de la producción matemática de los estudiantes. La imposibilidad de avanzar de los estudiantes, fruto de genuinos obstáculos proveniente de la autonomía real de trabajo y de la verdadera disponibilidad de las técnicas y conocimientos, genera en los profesores fuertes sentimientos de ansiedad que no están acostumbrados a lidiar con la incertidumbre y los tiempos reales que se necesitan para llevar a cabo el trabajo matemático en una verdadera resolución de problemas.

La riqueza de la evaluación como parte del proceso de estudio.

Este tipo de dispositivo demandó el diseño e implementación de instrumentos de evaluación y acreditación que permitieran hacer un verdadero diagnóstico del proceso de estudio, individual y grupal, en su totalidad. Para ello se pensó en instrumentos de evaluación que dieran cuenta de:

- *La autonomía y responsabilidad del trabajo de los estudiantes.* A través de una evaluación de proceso, escrita e individual, durante el recorrido; y una evaluación final

individual para acreditar, a través de todo el material elaborado durante el recorrido (apuntes, informes, entre otros).

- *La riqueza del trabajo en grupo.* La entrega de informes al finalizar cada sesión de trabajo y la realización de una exposición grupal como grupo secretario.

- *La completitud del proceso de modelización.* Al finalizar cada taller, los grupos tuvieron la posibilidad de elaborar un mapa de todo el recorrido realizado y de dar cuenta del modelo construido, y la necesidad de comunicar y justificar sus decisiones y resultados.

c. **Cuestiones que quedan pendientes**

Se debe buscar un dispositivo que permita dar cuenta de lo que los estudiantes realmente desarrollan en todo el proceso y no sólo recabe los resultados acertados. Mucho de lo realizado en las sesiones de trabajo no se plasmaba en los informes que los estudiantes entregaban. Sólo mencionaban las técnicas o respuestas correctas y no explicitaban los caminos que conducían a ellas, o las técnicas que no estaban institucionalmente aceptadas, pero que sin embargo, los docentes habíamos observado que usaban.

Finalmente, nos planteamos ¿cómo articular este espacio con los espacios curriculares subsiguientes para transformarlo en un REI-FP, donde el vivenciar el REI propuesto sea parte integrante del mismo? Si bien, al final de cada edición del taller se realiza un esbozo de las cuestiones teóricas que justifican la implementación de los REI desde la TAD, no se cuenta aún con un espacio donde analizar con mayor profundidad estas cuestiones y que permita el desarrollo de un REI-FP en su totalidad. Es decir, un recorrido más amplio a lo largo de la carrera que propicie el diseño y gestión de procesos de MM a los estudiantes de profesorado, como futuros docentes.

Referencias

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona.

- Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Monografía del seminario matemático García de Galdeano, 29.
- Bosch, M. & Gascón, J. (2009). Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M. J. González, M. T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89-113). Santander, España: SEIEM.
- Chevallard, Y. (1989). *Arithmétique, algèbre, modélisation: étapes d'une recherche* (Vol. 16). IREM d'Aix-Marseille.
- Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. *Journées de didactique comparée*, Lyon.
- Chevallard, Y., M. Bosch y J. Gascón (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, Barcelona, i c e/Horsori.
- Cirade G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel*. Tesis doctoral. Université Aix-Marseille I. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709>
- Escobar, M.; Olivero, F. & Santori, M. L. (en prensa). Respuesta a las nuevas necesidades curriculares en Argentina desde la teoría antropológica de lo didáctico: un REI co-disciplinar. *Educação Matemática Pesquisa*.
- Licera, M. (2017). *Economía y ecología de los números reales en la Enseñanza Secundaria y la Formación del Profesorado*. Tesis doctoral. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Facultad de Ciencias. Instituto de Matemáticas.
- Olivero, F.; Bosch, M.; Gascón, J. (2013). *Praxeologías matemáticas en torno a la geometría para la formación del profesorado*. En Cirade, G., Artaud, M., Bosch, M., Bourgade, J.-P., Chevallard, Y., Ladage, C. & Sierra, T. A. (Éds). (2017). *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société*. <https://citad4.sciencesconf.org>
- Ord. C.S. 1467/14. Universidad Nacional del Comahue. (2014). Profesorado Universitario en Matemática. Neuquén. <http://faeaweb.uncoma.edu.ar/index.php/component/phocadownload/category/1-archivos?download=24:ord-1467-2014>
- Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza*. Tesis doctoral. Facultad de Formación de Profesorado y Educación. Departamento de Didácticas Específicas. Universidad Autónoma de Madrid. <https://repositorio.uam.es/handle/10486/665889?show=full>
- Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Tesis doctoral. Departamento de Matemática, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona.
- Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica*. Tesis doctoral. Departamento de Estadística Aplicada, Universitat Ramon Llull, Barcelona. https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/101204/Tesis_LidiaSerrano_2013.pdf?sequence=1