

## **Esbozo de una praxeología *para la enseñanza* en torno al cálculo diferencial elemental**

### **Outline of a praxeology for teaching around elementary differential calculus**

Catarina Lucas<sup>1</sup>

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto, Portugal

<https://orcid.org/0000-0002-0645-2169>

Alicia Ruiz-Olarría<sup>2</sup>

Dpto. Didácticas específicas. Universidad Autónoma de Madrid

<http://orcid.org/0000-0003-1552-1434>

Josep Gascón<sup>3</sup>

Dpto. Matemáticas. Universitat Autònoma de Barcelona

<http://orcid.org/0000-0001-5570-1144>

### **Resumen**

La redefinición de la modelización funcional, mediante un modelo epistemológico de referencia, asigna una nueva razón de ser al cálculo diferencial elemental en Secundaria. Mediante el cuestionamiento sistemático de los criterios y principios que guían la construcción de dicho modelo, mostraremos en qué forma puede construirse un esbozo de una praxeología *para la enseñanza* en el ámbito de la formación del profesorado.

**Palabras-clave:** Praxeología, Cálculo diferencial elemental

### **Abstract**

The redefinition of the functional modelling using a reference epistemological model assigns a new *raison d'être* to the elementary differential calculus in Secondary education. Through a systematic questioning of the criteria and principles that guide the construction of such model, we will show how an outline of a praxeology *for teaching* in the field of Teacher Education can be built.

**Keywords:** Praxeology, Elementary Differential Calculus

---

<sup>1</sup> [catarinalucas.mail@gmail.com](mailto:catarinalucas.mail@gmail.com)

<sup>2</sup> [alicia.ruiz@uam.es](mailto:alicia.ruiz@uam.es)

<sup>3</sup> [gascon@mat.uab.cat](mailto:gascon@mat.uab.cat)

## **Esbozo de una praxeología para la enseñanza en torno al cálculo diferencial elemental**

De acuerdo con Gisèle Cirade (2006), junto a las praxeologías matemáticas *por enseñar*, cuya versión oficial es la que marca el currículo, existen al menos otros dos tipos de praxeologías directamente relacionados con las prácticas docentes y que, por tanto, deben ser tomadas en consideración a lo largo del proceso de formación del profesorado: las praxeologías *para la enseñanza*, que incluyen a las anteriores y contienen los conocimientos, esencialmente matemáticos, necesarios para delimitar, interpretar, cuestionar y explicitar la razón de ser de las praxeologías *por enseñar*, al tiempo que proporcionan instrumentos para concebir y construir los procesos didácticos asociados; y las praxeologías *de la profesión docente*, que engloban a las anteriores y son necesarias para diseñar y gestionar los citados procesos didácticos y para proporcionar a los profesores los conocimientos que estos requieren sobre los fenómenos didácticos que inciden en su práctica docente.

En este trabajo nos centraremos en el problema de la construcción de una praxeología *para la enseñanza*, problema que está estrechamente relacionado con el de la construcción de un *modelo epistemológico de referencia* (MER) de la correspondiente praxeología *por enseñar*, como argumenta Alicia Ruiz-Olarría (2015). Mostraremos, en efecto, que las cuestiones que se plantean para decidir los criterios y principios que acabarán rigiendo la construcción de dicho MER, constituyen componentes de una praxeología *para la enseñanza*. No debemos olvidar, sin embargo, que, según observa C. Cirade (2006), en la construcción de la praxeología para la enseñanza también intervienen componentes de las praxeologías *de la profesión*. Esta es la razón por la cual la elaboración de una praxeología para la enseñanza, en el ámbito de la TAD, está ligada tanto al cuestionamiento de las praxeologías escolares habituales, como al estudio de determinados fenómenos didácticos y, consiguientemente, a la reconstrucción de nuevas maneras de interpretar las praxeologías por enseñar (Ruiz-Olarría, 2015). En esta comunicación, utilizaremos la estrategia metodológica desarrollada en el citado trabajo (Ruiz-

Olarría, 2015) para esbozar la construcción de una praxeología para la enseñanza en torno al *cálculo diferencial elemental* (CDE) en Secundaria.

Ante el problema de la enseñanza del CDE, el cuestionamiento del que parte la TAD no toma, como objeto de estudio *primario* los errores y dificultades que muestran los alumnos en su actividad matemática, ni los posibles recursos que puedan utilizar los profesores para mejorar su enseñanza. El primer paso para abordar dicho problema consiste en analizar los componentes de la organización matemática escolar que, en el caso que nos ocupa, es la organización en torno al CDE. Se empieza así por estudiar qué se enseña actualmente bajo la designación de «cálculo diferencial» en determinadas instituciones escolares, qué se ha enseñado en otros periodos y cómo ha evolucionado el proceso transpositivo para desembocar en la organización matemática escolar actual en torno al CDE. Se constata, entonces, que la problemática a la que responde lo que se denomina escolarmente «cálculo diferencial» no está claramente explícita ni en el currículo oficial ni en los libros de texto y, en cierto sentido, podríamos decir que la institución de la enseñanza secundaria ha «olvidado» su razón de ser.

En resumen, el modelo epistemológico vigente en Secundaria presenta el CDE disperso en un conjunto de tareas y técnicas bastante formales, desarticuladas y muy débilmente interpretadas y justificadas (Lucas, 2015). Por otra parte, Catarina Lucas, Cecilio Fonseca y Josep Gascón (2017) han verificado la ausencia de determinadas praxeologías matemáticas, que consideramos fundamentales en el currículo de Secundaria (en los sistemas educativos de Portugal, España y Francia), y que permitirían una mayor articulación del CDE con otros sectores de las matemáticas escolares. Se hacen patentes, de este modo, múltiples indicadores de un fenómeno didáctico emergente en dicho ámbito de la matemática escolar que muestra, entre otras cosas, la poca consistencia epistemológica de la razón de ser oficial del CDE en dicha institución.

Como primera respuesta a este fenómeno, Noemí Ruiz-Munzón (2010) conjeturó que la razón de ser del CDE podría situarse en el ámbito de la *modelización funcional* (MF), esto es, en el ámbito de la actividad de modelización matemática en la que los modelos se expresan mediante funciones. Nos encontramos, por tanto, ante un fenómeno didáctico, una primera conjetura para abordarlo y la constatación de un problema docente asociado que, en nuestro caso, puede formularse como sigue:

*¿Cómo organizar la enseñanza del CDE en la última etapa de la enseñanza secundaria y qué papel asignarle en el ámbito de la MF?*

Esta concurrencia de un fenómeno didáctico y un problema docente asociado no es casual, en realidad constituye una situación habitual en el inicio de muchos procesos de formación. En cuanto a la conjetura inicial, digamos que puede ser más o menos robusta, pero tiene la virtud de orientar y precisar en algún aspecto la formulación del problema de la profesión docente.

### **El proceso de construcción de praxeologías para la enseñanza en el ámbito de la formación del profesorado**

Según A. Ruiz-Olarría (2015), las praxeologías matemáticas *para la enseñanza* se construyen en gran medida como consecuencia del desarrollo de las respuestas a cuestiones que pueden surgir en el ámbito de las praxeologías matemáticas *por enseñar* y están, como estas, en evolución permanente. Así, por ejemplo, una cuestión del tipo «¿Cómo justificar en la enseñanza obligatoria la regla de los signos del producto de números enteros?», que pertenece plenamente a las matemáticas *por enseñar*, puede generar la construcción de una praxeología matemática *para la enseñanza*, relacionando la emergencia de los números negativos con las necesidades operatorias del álgebra elemental, como proponen Eva Cid y Noemí Ruiz-Munzón (2011).

Lo anterior no significa que *todas* las cuestiones que vertebran una praxeología para la enseñanza surjan y puedan plantearse a partir de las praxeologías matemáticas por enseñar. En general, una praxeología matemática para la enseñanza se estructura en torno a cuestiones que engloban y rebasan ampliamente, como hemos dicho, las que estructuran la correspondiente praxeología matemática por enseñar.

En A. Ruiz-Olarría (2015) se describe una metodología para la construcción y reconstrucción de praxeologías matemáticas para la enseñanza mediante lo que en la TAD se denomina *recorrido de estudio e investigación para la formación del profesorado* (REI-FP). La utilización de este dispositivo didáctico comporta que el correspondiente proceso de formación surja para dar respuesta a una cuestión problemática  $Q_0$ -FP que debe ser una cuestión crucial para la profesión docente. Para responder a esta cuestión el REI-FP se articula en cinco módulos, de los que aquí únicamente consideraremos los tres primeros,  $M_0$ ,  $M_1$  y  $M_2$ , dado que es en estos en los que se construye un primer esbozo de una praxeología para la enseñanza.

### **1. Módulo $M_0$ : caracterización del modelo epistemológico dominante en Secundaria**

Ya hemos indicado que el modelo epistemológico del CDE vigente en Secundaria le asigna una razón de ser «oficial» muy poco fundamentada epistemológicamente. En particular el CDE aparece en la actividad matemática escolar sin conexión con los procesos de MF que, además, están prácticamente ausentes en toda la enseñanza secundaria (Lucas, 2015).

En el módulo  $M_0$ , y con el objetivo de hacer patente este fenómeno a los profesores en formación, se les planteará la siguiente cuestión generatriz:

*$Q_0$ -FP ¿Cómo organizar la enseñanza del CDE en la última etapa de la enseñanza secundaria?*

Y como primer paso para empezar a responder, se propone estudiar la *respuesta institucional* a la misma, esto es, la forma como el sistema escolar actual organiza la enseñanza

en torno a dicho ámbito. Este estudio comportará la emergencia de cuestiones más específicas como, por ejemplo:

- *En el sistema escolar actual, ¿se explicita la razón de ser del CDE?*
- *¿Qué tipos de tareas se proponen para dar sentido a las técnicas del CDE? ¿Se justifican dichas técnicas?*
- *¿Se relacionan las técnicas entre sí?*
- *¿Se estudian diferentes técnicas para la realización de una misma tarea? ¿Se comparan entre sí?, Etc.*

Una vez hecho este análisis se espera que la comunidad de estudio vea la necesidad de relacionar el CDE con el estudio de los diferentes tipos de funciones y con los modelos funcionales. Surgirán cuestiones tales como:

- *¿Qué tipo de actividades se llevan a cabo en Secundaria con las funciones? ¿Se utilizan las funciones para construir modelos?*
- *¿Qué papel desempeñan los modelos funcionales en el currículo?*
- *La construcción de los modelos funcionales, ¿se deja bajo la responsabilidad de los alumnos?*
- *En relación al trabajo con funciones, ¿cuándo aparece la necesidad de utilizar el CDE?*
- *¿Qué papel desempeña el CDE en el estudio de los diferentes tipos de funciones?*

En el desarrollo del módulo M<sub>0</sub>, la respuesta a estas cuestiones (y a otras que irán apareciendo) se formulará a partir de un análisis de los *media* más habituales para los profesores: currículo, libros de texto, revistas para el profesorado, revistas de investigación, centros de recursos, webs, etc. El rol de los formadores en este proceso no es el de aportar elementos de respuesta para darlos a conocer a los profesores, sino guiarlos en la búsqueda de estos elementos y, sobre todo, iniciarlos a los gestos básicos del cuestionamiento didáctico:

¿Qué se entiende por CDE? ¿De dónde viene? ¿En qué ámbitos matemáticos y no matemáticos se utiliza o utilizaba el CDE? ¿Por qué hay que enseñarlo en Secundaria? ¿Qué propuestas de enseñanza del CDE existen? ¿Qué se dice o sabe de ellas? Etc.

## 2. Módulo M<sub>1</sub>: vivir un REI sustentado en el MER de Secundaria

Los siguientes pasos en la estrategia metodológica consisten en la construcción de un MER para Secundaria y de la correspondiente praxeología matemática por enseñar y, a continuación, en la experimentación y evaluación de un REI sustentado en dicho MER. Estos pasos fueron llevados a cabo en C. Lucas (2015).

En el *módulo* M<sub>1</sub> del REI-FP se pretende que los profesores en formación empiecen a construir, mediante un trabajo cooperativo, una respuesta a Q<sub>0</sub>-FP que vaya más allá de la respuesta institucional que proporciona el sistema escolar. Este módulo constituye un dispositivo didáctico diseñado para proporcionar a los profesores en formación la posibilidad de vivir en propia carne el REI experimentado previamente con estudiantes de un primer curso de Universidad que incluía contenidos muy semejantes a los de Secundaria (Lucas, 2015).

Para ello, se propondrá a los profesores en formación las mismas cuestiones que se propusieron a estos estudiantes y que describimos a continuación:

*Q<sub>1</sub>: ¿Cómo se puede diagnosticar y prever el número de casos de cáncer de tiroides en las poblaciones más próximas a Chernóbil?*

Para hacer la devolución de esta cuestión, se podrá acceder a informaciones relativas a la forma de diagnosticar el cáncer de tiroides administrando radiofármacos que contienen radioisótopos sintéticos. Al circular por el cuerpo de la persona, dichos radioisótopos emiten radiaciones que permiten saber por dónde pasaron y dónde se depositaron. De este modo, se logra un mapeo de los órganos que posibilita generar datos empíricos y, a partir de estos, construir modelos funcionales que, a su vez, van a permitir hacer una previsión de los casos de cáncer de tiroides.

Para iniciar el estudio se plantearán las cuestiones siguientes relativas a la preparación de estos radiofármacos:

*Q<sub>11</sub>: ¿Cómo varía la masa de un isótopo radiactivo a lo largo de su desintegración?*

*Q<sub>12</sub>: ¿Cómo estudiar la variación de la concentración de un radiofármaco en el organismo de un paciente un tiempo después de su administración?*

*Q<sub>13</sub>: Conociendo la velocidad de administración por vía intravenosa de un radiofármaco, ¿cómo podemos variar la dosis si el caso lo requiriese?*

*Q<sub>14</sub>: ¿Cómo se puede prever a lo largo del tiempo el número de casos de cáncer de tiroides en las poblaciones más próximas a la antigua central ucraniana de Chernóbil?*

*Q<sub>15</sub>: ¿Cómo prever la evolución de los efectos genéticos del accidente de Chernóbil en las generaciones futuras?*

Para empezar a responder a la cuestión *Q<sub>11</sub>*, los formadores podrán sugerir la busca de datos discretos de la masa de diferentes radioisótopos en trabajos científicos de Medicina Nuclear, como los de John U. Hidalgo, Robert M. Wright y Mary M. Wooten (1967) o Jonathan Langford y Gertrud Thompson (1990). Se propondrá a los profesores en formación que, trabajando en pequeños grupos, utilicen diferencias finitas y construyan modelos discretos para la masa de un isótopo radiactivo concreto. Para guiar el proceso de estudio de estas cuestiones se sugiere a los formadores que intenten provocar el planteamiento de cuestiones intermedias como las que aparecen en C. Lucas (2015, pp. 201-205). Después se compararán los modelos de los diferentes grupos y, al final de esa sesión, se vivirá un *momento de la institucionalización* en el que, presumiblemente, se deducirá una respuesta global mediante una familia de modelos funcionales del tipo:

$$m(t) = ae^{bt}, t \in \mathbb{N}$$

En otros artículos se buscarán modelos semejantes a estos, pero para variables continuas (obtenidos mediante la resolución de la ecuación diferencial asociada a la ecuación en



diferencias finitas) y se discutiría las ventajas y las desventajas del paso del campo discreto al continuo, y cómo se podrá mostrar a los estudiantes ese mismo tránsito. Se pretende que los profesores en formación experimenten la dificultad técnica del trabajo con diferencias finitas.

Para la cuestión  $Q_{12}$ , los formadores podrán proponer una indagación en los manuales escolares y en internet, siendo previsible que se tomen en consideración diferentes tipos de modelos continuos (exponenciales, racionales, polinómicos, etc.). Se mostrará la relevancia de las técnicas del CDE para trabajar en dichos modelos e interpretar los resultados del mismo.

Para la cuestión  $Q_{13}$ , los profesores en formación podrán empezar por buscar una aproximación del valor del área correspondiente a la dosis del radiofármaco, construir el modelo a partir del estudio de la variación de la dosis, escribir la ecuación en diferencias, aproximar la Tasa de Variación Media mediante la función derivada en un punto y expresar y resolver la ecuación diferencial correspondiente. Se mostrará así la economía y eficiencia de las herramientas del CDE (en este caso del cálculo integral) para construir modelos algebraico-funcionales de ciertos sistemas.

Para responder a las cuestiones  $Q_{14}$  y  $Q_{15}$ , el formador podrá sugerir un trabajo con datos empíricos discretos recogidos en investigaciones científicas —por ejemplo, en The Chernobyl Forum (2003-2005)— y la construcción de modelos continuos a partir de dichos datos discretos.

### **3. Módulo $M_2$ : Analizar el REI vivido**

En este módulo los profesores en formación llevan a cabo un análisis matemático-didáctico del REI vivido que podrán interpretar como una respuesta, en acto, aunque sólo sea parcial y provisional, a la cuestión  $Q_0$ -FP. Para ello, se retoma el problema de la profesión docente descrito mediante dicha cuestión, así como las respuestas parciales que los profesores en formación hayan encontrado en el Módulo  $M_0$  a partir de la exploración de los diversos documentos oficiales que tienen a su disposición (incluyendo su propia experiencia como

alumnos). Estos datos, junto a una descripción de la respuesta particular a la misma cuestión Q<sub>0</sub>-FP surgida en el ámbito de la investigación didáctica y descrita en (Lucas, 2015), constituyen los *media* de los que disponen los profesores en formación para llevar a cabo un análisis matemático-didáctico del REI vivido.

Se propone a los profesores en formación que analicen en profundidad la estructura y la dinámica del REI anteriormente vivido, como sugiere Yves Chevallard (1999), tanto en lo que respecta a la *praxeología matemática* construida efectivamente (comparándola con la organización matemática escolar) como en lo que hace referencia a la *organización didáctica* de este proceso en términos de la articulación de los *momentos del estudio*, de los *gestos del estudio y la investigación* que han desarrollado efectivamente, de las *técnicas y tecnologías didácticas* que se han puesto en juego y, en particular, de las *responsabilidades* que han asumido los profesores en formación —en su papel de estudiantes—, y el formador —en su papel de director del proceso de estudio.

Para impulsar este análisis y teniendo en cuenta que en el módulo M<sub>1</sub> los profesores en formación habrán vivido un REI en el cual el CDE se ha utilizado como un instrumento clave en un proceso de MF, los formadores utilizarán técnicas didácticas adecuadas con el objetivo de que los profesores en formación lleguen a plantear y discutir cuestiones en torno al papel que desempeña el CDE en la construcción y el estudio de modelos funcionales de todo tipo de sistemas. Entre las cuestiones que podrían surgir, empezaremos por citar las que tienen un carácter más general. Obviamente, estas cuestiones están sugeridas por los criterios y principios utilizados en la construcción del MER, tal como se explicita detalladamente en C. Lucas (2015):

*Q<sub>1</sub>: Para llevar a cabo un proceso de MF, ¿qué tipo de praxeologías matemáticas o extra-matemáticas pueden tomarse como sistema inicial a modelizar?*

*Q2: ¿Qué cuestiones problemáticas que se pueden plantear en dicho sistema requieren de manera imprescindible, en Secundaria, del uso del CDE y, por lo tanto, posibilitan la génesis funcional del mismo?*

*Q3: ¿En cuántas etapas parece razonable articular los procesos de MF?*

*Q4: ¿Qué universo de tipos elementales de variación es razonable utilizar en el último curso de enseñanza secundaria?*

Una vez que se plantee la posibilidad de utilizar datos discretos, dado que esta es la naturaleza habitual de los datos empíricos, podrán surgir cuestiones tales como:

*Q5: ¿En qué tipo de modelizaciones funcionales será necesario partir de datos discretos como paso previo a la construcción de modelos funcionales continuos? ¿Qué tipo de modelos discretos se podrán utilizar en estos casos?*

*Q6: ¿Cómo tomar en consideración las relaciones entre los modelos funcionales discretos y los continuos?*

*Q7: ¿Qué papel podría asignarse a las ecuaciones en diferencias finitas en dichos procesos? ¿Y a las ecuaciones diferenciales elementales?*

*Q8: ¿Qué criterios utilizar para los datos más adecuados (discretos o continuos) para llevar a cabo un proceso de MF?*

*Q9: Si se parte de datos discretos, ¿qué tipo de regresión será en cada caso el más adecuado para pasar de los modelos discretos a los modelos continuos?*

*Q10: Dependiendo de la naturaleza del sistema a modelizar, ¿qué tipo de datos discretos (datos de la tasa de variación media, TVM, o de la tasa de variación media relativa, TVMR) es preferible utilizar?*

Y con relación al tratamiento de los modelos funcionales continuos, es previsible que se planteen, entre otras, cuestiones del siguiente tipo:

*Q<sub>11</sub>: ¿En qué sentido y para responder a qué tipo de cuestiones las técnicas del CDE son más económicas que las técnicas algebraicas de la matemática discreta?*

*Q<sub>12</sub>: Si se parte de datos continuos, ¿cómo construir con técnicas algebraicas el modelo funcional o, en su caso, el modelo diferencial (en el que aparece la derivada de la función-modelo)?*

*Q<sub>13</sub>: ¿Qué papel podría desempeñar el CDE en la construcción, utilización y comparación de los modelos funcionales continuos?*

*Q<sub>14</sub>: Utilizando las técnicas del CDE, ¿cómo se puede interpretar correctamente el significado de los parámetros de un modelo funcional en términos del sistema?*

*Q<sub>15</sub>: ¿Cómo utilizar el CDE para estudiar las propiedades locales de los modelos funcionales construidos?*

Postulamos que las cuestiones  $Q_i$  ( $i = 1, \dots, 15$ ), con otras que puedan surgir a lo largo del módulo  $M_2$ , junto con las posibles respuestas tentativas a las mismas, así como otras muchas posibles cuestiones derivadas de dichas respuestas, formarán parte de una praxeología matemática *para la enseñanza* en torno a la MF que integra el papel que se asigna al CDE.

Como sugiere Y. Chevallard (2017, p. 8):

[...] en pratique, c'est chaque classe, chaque équipe d'enseignement qui est appelé à nourrir l'inventaire des questions à étudier, des réponses pouvant leur être apportées et des connaissances à mobiliser.

Las cuestiones  $Q_i$  son algunas de las que se plantearon en su momento para decidir (en base a las respuestas a las mismas) los criterios y principios que se utilizaron para construir un MER del CDE en el ámbito de la MF (Lucas, 2015). Al tomarlas como punto de partida para empezar a estructurar una praxeología para la enseñanza, junto a otras cuestiones que se derivarán del estudio de estas, se da la posibilidad a la comunidad de estudio

(integrada por los formadores y los profesores en formación) de proponer respuestas diferentes y, en definitiva, de cuestionar y modificar la propia estructura y dinámica del MER construido.

### **Un problema abierto: la gestión didáctica de la construcción de una praxeología matemática para la enseñanza**

Hemos descrito sintéticamente un proceso de construcción de praxeologías para la enseñanza en el ámbito de la formación del profesorado que contiene, en su núcleo, una experimentación de los módulos  $M_0$ ,  $M_1$  y  $M_2$  de un REI-FP. Pero, en el caso que nos ocupa (relativo al problema profesional de la enseñanza del CDE) dicha experimentación aún no se ha llevado a cabo, por lo que hemos presentado, únicamente, un diseño a priori de un *desarrollo hipotético* de una praxeología para la enseñanza en torno a dicho ámbito de la matemática escolar.

Como todo REI, un REI-FP parte de una cuestión a la que la comunidad de estudio se propone responder y que, en este caso, es la cuestión generatriz  $Q_0$ -FP que expresa un problema profesional y que estará presente a lo largo de todo el recorrido de estudio.

El problema que proponemos ahora para concluir esta comunicación hace referencia a la forma de gestionar didácticamente el desarrollo de un REI-FP y, en particular, el proceso de estudio e investigación que se lleva a cabo a lo largo de los módulos  $M_0$ ,  $M_1$  y  $M_2$ . Dado que, siguiendo la estrategia metodológica que hemos descrito, dicho proceso desemboca en la construcción de una praxeología para la enseñanza que puede considerarse como una primera respuesta a  $Q_0$ -FP, el problema que planteamos podría describirse como el *problema de gestionar didácticamente la construcción de una praxeología para la enseñanza en una institución de formación del profesorado*.

Para responder a esta cuestión, la TAD propone un *modelo didáctico general*, esto es, un patrón de lo que se entiende por «estudiar una cuestión». Dicho patrón puede expresarse mediante el *esquema herbartiano* (Chevallard, 2004):

$$[S(X, Y, Q) \rightarrow M] \rightarrow R^\heartsuit$$

Este esquema, una vez explicitado el *medio didáctico*  $M$  que debe ser construido por la comunidad de estudio  $[X, Y]$ , describe los elementos que constituyen la *estructura* del proceso de indagación que tiene como objetivo que dicha comunidad construya una respuesta  $R^\heartsuit$  a la cuestión  $Q$  (en nuestro caso, a la cuestión  $Q_0$ -FP).

En todos los casos, la *dinámica* de un REI (y, en particular, la dinámica de los módulos  $M_0$ ,  $M_1$  y  $M_2$  de un REI-FP), puede describirse en términos de *dialécticas* o *gestos del estudio* (Chevallard, 2009), pero la gestión de dichas dialécticas y, en general, la gestión didáctica de un REI-FP con el objetivo explícito de construir una praxeología para la enseñanza es un problema didáctico que, en gran medida, continúa siendo un problema abierto.

En particular, los trabajos que analizan diversos procesos de formación del profesorado en el ámbito de la TAD, como son los de Marianna Bosch y Alicia Ruiz-Olarría (2011); Ana R. Corica y María R. Otero (2016); Tomás A. Sierra y Pedro Nicolás (2017); Eva Cid, José M. Muñoz-Escolano y Noemí Ruiz-Munzón (2018); Tomás A. Sierra y Josep Gascón (2018), además del citado de A. Ruiz-Olarría (2015), no siempre tienen el objetivo explícito de construir una praxeología para la enseñanza. Algunos de ellos se centran esencialmente en el nivel descriptivo y en el análisis de algunas de las restricciones que aparecen en dichos procesos.

Podemos concluir que se requieren nuevos desarrollos sobre la gestión didáctica de los REI-FP y, en particular, muchas más experimentaciones (incluida la que se esboza en este trabajo) para construir y poner a disposición de las instituciones de formación una infraestructura didáctico-matemática que sustente y haga accesibles las *técnicas didácticas*

necesarias para llevar a cabo una gestión eficaz y económica del proceso de construcción de praxeologías matemáticas para la enseñanza.

### Agradecimientos

Esta investigación se ha desarrollado en el marco de los proyectos I+D+i “Propuestas para una enseñanza basada en el paradigma del cuestionamiento del mundo” (Q-mundo):

RTI2018-101153-A-C22 y RTI2018-101153-B-C21 del Programa Estatal de I+D+i

Orientada a los Retos de la Sociedad.

### Referencias

- Bosch Casabò, M & Ruiz-Olarría, A. (2011). Un parcours d'étude et de recherche en formation initial des professeurs : le cas des « réductions progressives », *Actes de la 16<sup>e</sup> École d'Été de Didactique des Mathématiques*, (pp. 415-420) Editeur : La pensée Sauvage éditions.
- Chernobyl's Legacy: Health, Environmental and Socio-Economic Impacts and Recommendations to the Governments of Belarus, the Russian Federation and Ukraine. The Chernobyl Forum: 2003–2005. <http://www.iaea.org/sites/default/files/chernobyl.pdf>
- Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. *Journées de didactique comparée 2004*, Lyon.  
[http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php?id\\_article=45](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php?id_article=45)
- Chevallard, Y. (2009). La TAD face au professeur de mathématiques. [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La\\_TAD\\_face\\_au\\_professeur\\_de\\_mathematiques.pdf](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_TAD_face_au_professeur_de_mathematiques.pdf)
- Chevallard, Y. (2017). Quel avenir pour la formation des professeurs ? Éléments pour la transition didactique.  
[www.snesup.fr/sites/default/files/fichier/texte\\_YC-11-01-2017\\_0.pdf](http://www.snesup.fr/sites/default/files/fichier/texte_YC-11-01-2017_0.pdf).
- Cid, E. & Ruiz-Munzón, N (2011). *Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico*. En M. Bosch et al. (Eds), Un panorama de la TAD (pp. 579-604). CRM Documents, vol.10. Bellaterra: Centre de Recerca Matemàtica.
- Cid, E., Muñoz-Escolano, J. M. & Ruiz-Munzón, N. (2020). La introducción de los REI en la formación de profesorado: Un ejemplo de REI-FP. *Educação Matemática Pesquisa*, (pp. )
- Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel* (Thèse de doctorat). <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709/fr/>
- Corica, A. & Otero, M. (2016). Diseño e Implementación de un Curso para la Formación de Profesores en Matemática: una Propuesta desde la TAD. *Bolema*, 30(55), 763-785. doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a22.
- Hidalgo, J.; Wright, R. & Wooten, M. (1967). *Prediction of Technetium-99m Yield from Molybdenum-99 Generators*. The Journal of Nuclear Medicine, 8, 426-429.
- Langford, J. & Thompson, G. (1990). *Monitoring radioactive xenon gas in room air using activated charcoal*. Journal of Nuclear Medicine Technology, 18, 40–43.

- Lucas, C. (2015). *Una posible «razón de ser» del cálculo diferencial en el ámbito de la modelización funcional* (Tesis doctoral). Universidad de Vigo, Vigo.
- Lucas, C. O., Gascón, J. & Fonseca, C. (2017). Razón de ser del cálculo diferencial elemental en la transición entre la enseñanza secundaria y la universitaria. *REDIMAT*, 6(3), 283-306. doi: <http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2017.2116>
- Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona.
- Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de Secundaria. De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.
- Sierra, T. Á., & Gascón, J. (2018). Los recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado y la construcción de praxeologías matemáticas para la enseñanza. El caso de los sistemas de numeración. *Recherches en didactique des mathématiques*, 38(1), 79–117. Retrieved from <https://revue-rdm.com/2018/los-recorridos-de-estudio-e/>
- Sierra, T. A. & Nicolás, P. (2017). Metodología de los REI-FP en el caso de los Sistemas de Numeración para futuros maestros de primaria y profesores de secundaria. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 941- 964). <https://citad4.sciencesconf.org> 941.