COMPREENSÃO GRÁFICA DA DERIVADA DE UMA FUNÇÃO REAL EM UM CURSO DE CÁLCULO SEMIPRESENCIAL

GRAPHICAL UNDERSTANDING OF THE DERIVATIVE OF A REAL FUNCTION ON A CALCULUS COURSE OFFERED ON A SEMI-DISTANCE LEARNING BASIS

Gisela Maria da Fonseca Pinto[1]

Claudia Coelho de Segadas Vianna[2]

Resumo

Neste trabalho verificamos de que forma os alunos da Educação a Distância do Consórcio CEDERJ – Fundação CECIERJ compreendem graficamente o conceito de derivada. Realizamos atividades de pesquisa de campo onde propusemos uma pequena lista de exercícios para ser resolvida pelos nossos participantes da pesquisa, alunos das licenciaturas de Matemática, Física e Química. As análises foram realizadas a partir dos resultados obtidos desta lista de exercícios, das provas dos alunos feitas durante um curso de Cálculo I e por um questionário e entrevistas. Nesse artigo não nos detalharemos nas entrevistas e sim nos demais instrumentos. Analisamos a flexibilidade dos alunos em transitar de uma a outra formas de representação da derivada de uma função.

Palavras-chave: Derivada. Função real. Ensino a distância. Gráficos.

Abstract

In this work we can verify how the DE students from Consórcio CEDERJ - Fundação CECIERJ graphically understand the derivative concept. We have carried out field research activities in which there has been proposed a short list of exercises to be solved by the participating students graduated in Mathematics, Physics and Chemistry. The analyses have been carried out from the results got from this list of exercises, from the tests taken by the students during a course of Calculus I and from a questionnaire and interviews. In this article, it will not be considered what had been said in the interviews as whole, but in the other instruments. We have analyzed the students flexibility in transiting from one form of derivative representation of a function to another.

Key words: Derivative. Real Function. Distance teaching. Graphs.

[1] UFRRJ, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Educação Matemática
[2] UFRJ, Departamento de Métodos Matemáticos, Instituto de Matemática

1. Introdução

A pesquisa que iremos relatar neste artigo fez parte de uma dissertação de mestrado pela UFRJ na área de Ensino de Matemática no ano de 2008 cujo título é "Compreensão Gráfica de uma Função Real em um Curso de Cálculo Semi-presencial" (Pinto, 2008). Na época, a primeira autora, então mestranda, atuava como tutora presencial das disciplinas de Cálculo I, II, III e IV junto ao CEDERJ, instituição de ensino superior a distância do Rio de Janeiro. A partir desta experiência, constatou diversas dificuldades enfrentadas pelos alunos desta instituição na compreensão de conceitos fundamentais, em particular o conceito de derivada de uma função real. Optou então por acompanhar um grupo de alunos no processo de desenvolvimento deste conceito no curso de Cálculo I no intuito de compreender a natureza dessas dificuldades.

Os gráficos de funções, nos contextos de construção ou de interpretação a partir de estudos de derivadas, era para os alunos um obstáculo de difícil transposição. Derivar uma função real tornava-se apenas uma conta, e nada mais que isso. Viam na derivada apenas um processo algébrico, sem objetivo além de resolver o exercício proposto e sem significado senão o próprio processo algébrico.

Embasamos a pesquisa em teorias acerca da formação do conhecimento matemático, da compreensão gráfica de uma função real e da compreensão da derivada desta. Ao final, relacionamos os resultados apurados na pesquisa com a visão de função real normalmente enfocada pelo professor de matemática e suas conseqüências na formação matemática dos estudantes.

2. Referencial Teórico

2.1 Formação do conhecimento matemático

A compreensão do como os conceitos matemáticos são formados é objeto de estudo de diversos autores, como Sfard (1991) e suas etapas de interiorização, condensação e reificação, Gray & Tall (1994) e os *proceitos* (processo + conceito), bem como Dubinsky (1991) e a teoria *APOS* (ação – processo – objeto – esquema).

A natureza dual dos objetos matemáticos, que podem ser vistos como processos e como objetos, é destacada por Sfard (1991). Segundo esta autora, o conhecimento matemático é formado em três etapas: *interiorização* (concepção operacional de um processo que é realizado com objetos matemáticos preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz), *condensação* (familiarização do aprendiz com os processos, ocorrendo maior ênfase nos resultados) e *reificação* (concepção do processo como um objeto e capacidade de realizar com ele novos processos). Este mesmo conhecimento é gerado a partir de outro pré-existente para o aprendiz, ou seja, tem caráter interdependente, como partes em mosaicos infinitos e de vastidão desconhecida, onde a falta ou a inexatidão em algum deles pode causar sérias desarmonias mais adiante. É exatamente isto o que se pode facilmente perceber nos alunos de Cálculo de maneira geral: seus conhecimentos sobre derivada de uma função real não ultrapassam a concepção operacional. Um dos objetos matemáticos que dispara os processos de derivação é a noção de função real - que raramente alcançou o estágio da reificação proposto por Sfard e, como conseqüência, dificilmente a noção de derivada de uma função real chegará até lá.

Também Gray & Tall (1994) fundamentam-se na dualidade dos objetos matemáticos principalmente em relação à ambiguidade causada pelo uso do mesmo símbolo para representar processos e seus resultados – por exemplo, $f(6) = 4$ resume a imagem 4 obtida a partir número real 6 aplicado a uma dada função f bem como o par ordenado (6, 4) ou ainda o termo $\frac{2}{3}$ que pode ser visto como o resultado da divisão de 2 por 3, como 2 partes consideradas de um total de 3 ou ainda como a ideia de covariação (a cada 2 unidades de um tipo temos 3 do outro tipo). Esta ambiguidade conduz a uma flexibilidade no pensamento matemático que só é possível quando o aprendiz for capaz de se apropriar de todas as possibilidades de significação para um mesmo símbolo matemático. Os autores criam a noção de *proceito*, englobando processo e conceito, sendo formado pela aglutinação das duas palavras. O significado deste neologismo fundamenta-se exatamente aí: processos e conceitos, representados ambos por um mesmo símbolo matemático que representa, num único corpo, os dois espíritos que convivem harmoniosa e complementarmente um com o outro. Pensando o conceito de derivada de uma função real segundo esta teoria, podemos inferir que, se o estudante compreende inteiramente o conceito de derivada de uma função, a representação $f'(x)$ $f'(x)$ significa simultaneamente: a lei algébrica obtida a partir da aplicação imediata das regras de derivação e o conjunto de imagens possíveis a partir desta lei algébrica, que são as inclinações das retas tangentes e o gráfico que sintetiza como variam essas inclinações. Esse é o proceito de derivada – "um processo que produz objeto matemático, e um símbolo que é usado para representar tanto o processo quanto o objeto" (Gray & Tall, 1994, p. 120).

Piaget e sua Abstração Reflexiva inspiram o desenvolvimento e fundamentação da teoria *APOS* (Dubinsky, 1991). Segundo este autor, o conhecimento matemático organiza-se em *esquemas,* que são conjuntos de *ações* externas ao aprendiz, posteriormente interiorizadas como *processos* e encapsuladas como *objetos* – daí o nome *APOS* (do inglês *action – process – object – schema*).

Inicialmente, o aprendiz reproduz uma ação em sequencias passo a passo (concepção ação). Essas ações transformam-se em processos quando se tornam interiores ao aprendiz, ou seja, quando ele é capaz de somente pensar sobre essas ações sem ter que necessariamente realizá-las (concepção processo). Assim que o processo é concebido pelo estudante como um todo indivisível, não mais compartimentado em ações isoladas realizadas sequencialmente, sendo o estudante capaz de realizar com ele outras ações, Dubinsky diz que o conhecimento matemático em questão foi *encapsulado* como um *objeto* (concepção objeto). Cada conceito matemático tem o seu próprio esquema. Não ocorre a formação de um esquema quando alguma destas etapas não é seguida de alguma maneira ou quando o processo é interrompido.

Breidenbach et al. (1992) e Palis (2003) fundamentam-se na teoria *APOS* de Dubinsky para estudar a compreensão de função real dos aprendizes em suas pesquisas. Essa associação sugere que o aluno tem a concepção-ação de função quando somente é capaz de, por exemplo, determinar o valor da imagem de uma função para um determinado elemento do domínio. Quando o aluno mostra-se capaz de imaginar o processo, percebendo a função como uma via que transforma valores num processo imaginado sem que haja necessidade de realização individual de cada cálculo, então ele tem deste conceito a concepção-processo. Finalmente, a concepção-objeto ocorre se o estudante percebe a função como um objeto matemático, como um todo, passível portanto de ser operado e/ou manipulado com outras funções. Reportando-nos ao estudo da compreensão do conceito de derivada de uma função real de uma variável real, a concepção-ação ocorre quando o estudante é unicamente capaz de derivar algebricamente funções a partir das regras de derivação usualmente fornecidas nas contracapas dos livros de Cálculo. Um aluno tem deste conceito a concepção-processo quando associa à aplicação dessas regras o significado de determinar uma lei algébrica que retorna inclinações de retas tangentes ao gráfico de uma determinada função para cada valor que nela seja substituída. A percepção da derivada como uma função conduz à concepção-objeto, onde o aprendiz percebe a derivada como uma função que pode ser representada graficamente e que indica como variam os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico de f em todos os valores de seu domínio. Ele a percebe como um todo, uma função, um processo de determinar inclinações de retas tangentes, um gráfico ou um limite.

2.2 Construção, Análise e Utilização Instrumental de Gráficos de Funções

O conceito de função raramente pode ser visto como um proceito (Gray & Tall, 1994), um esquema (Dubinsky, 1991) ou como um objeto reificado (Sfard, 1991) para o aluno concluinte do ensino médio. Thompson (1994) afirma que a imagem de conceito de função para os alunos está ligada a uma regra algébrica, a uma lei de formação, de forma quase única; Gravina (1986) pontua as dificuldades dos alunos em relação aos gráficos de funções destando que as atividades com gráficos que são propostas aos alunos neste nível de ensino normalmente limitam-se à exploração por meio de tabelas numéricas e plotagem de pontos posteriormente ligados por meio de segmentos de retas – exatamente da maneira como se comportam os softwares computacionais, mas sem a precisão e agilidade de cálculos que estes detêm. Este tipo de abordagem transforma o problema de esboçar o gráfico de uma função em um problema computacional que não traz nenhum tipo de ganho cognitivo para o aluno. Também Segadas Vianna (1998) apresenta em sua pesquisa resultados que demonstram que estudantes de matemática normalmente não são capazes de pensar em funções por meio de suas possíveis representações, estabelecendo as relações entre estas e percebendo como cada uma traduz uma determinada situação. Esta dificuldade impede, por exemplo, que o aluno conceba o gráfico da função de maneira instrumental, utilizando-o para resolver problemas – ele é em si um problema: dada uma lei algébrica, esboce o gráfico. Relata-nos a autora, na p. 255, que "as imagens gráficas são utilizadas pelo professor mais para ilustrar os conceitos que como ferramentas para resolver os problemas".

2.3 Estudo e Ensino de Derivadas

O estudo da derivada de uma função real é tradicionalmente iniciado pela noção de limite, examinando-se a inclinação da reta secante até se chegar na inclinação da reta tangente. A partir daí, por meio de manipulações algébricas da relação $f\,'(x) = \lim_{x \to t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t}$ $f'(x) = \lim_{x \to t} \frac{f(x)-f(t)}{x-t}$, determinam-se as regras gerais de derivação de funções reais que dão origem a longas listas de funções dadas por suas leis algébricas para que delas se determine a lei algébrica da derivadas. Os significados geométricos das derivadas primeira e segunda – crescimento e concavidade – são brevemente considerados em atividades de esboço de gráficos de funções que introduzem os aspectos qualitativos deste objeto matemático, mas que é abordado de maneira mecânica (se a derivada se comporta assim então o crescimento ou a concavidade comportam-se desta maneira). Alguns problemas de taxas de variação são eventual e brevemente considerados, concluindo assim o estudo das derivadas de funções reais de uma variável real. A ênfase no curso é simbólica e não prioriza significados, mas sim processos. O estudo das derivadas é feito de maneira instrumental, mecânica, e não como um conjunto de conteúdos que têm a capacidade de ampliar e aprofundar o conceito de função real por exigir que se opere com este, permitindo que se ele se enraize como um objeto (Sfard), um esquema (Dubinsky) ou um proceito (Gray & Tall) na estrutura cognitiva do aprendiz.

Tall (1991) comenta que raramente os alunos concebem a derivada de uma função real como uma função. Ferraz e Gitirana (2007), ao estudarem alguns dos livros de Cálculo mais usados nas Universidades, perceberam que ocorreram mudanças ao longo dos anos e que estes hoje já abordam mais os aspectos gráficos e funcionais da derivada que antes, mas que isto é insuficiente e que o predomínio das atividades de manipulação algébrica é ainda alarmante. Todos os livros-texto de Cálculo por eles pesquisados (Courant, 1965, de Moise, 1970, Anton, 2000 e Thomas, 2002) apresentam gráficos de funções como "representações geométricas da representação simbólica" (p. 11), vinculando-os definitivamente a uma lei algébrica de cuja existência eles dependem, não tendo os gráficos força suficiente para existir por si mesmos.

Recentemente remodelado, o material de Cálculo I do CEDERJ destaca:

> O gráfico da função f é uma conseqüência de sua definição, mas, dado G_f podemos *reconstruir* a função f. Dessa forma, podemos nos referir à função f ou ao seu gráfico como se fossem, essencialmente, o mesmo objeto. A grande vantagem do gráfico (...) permite uma enorme interface entre a álgebra (...) e a geometria. Dessa maneira, podemos simplesmente *desenhar* funções, ampliando enormemente nosso estoque de exemplos. (CEDERJ, p. 12, aula 01, versão 2.0, 2005)

Essa forma de apresentar o gráfico aos alunos permite que este seja explorado como a própria função, não necessariamente dependente de lei algébrica. As vantagens desse tipo de abordagem são destacadas por Hughes-Hallett et al. (1994) e a *Regra dos Três* - ensino de funções sob a ótica gráfica, numérica e analítica - no intuito de que se tenha um curso onde "pontos de vista são balanceados" permitindo assim que "estudantes vejam uma ideia principal por vários ângulos" (p. 121 *apud* Berry & Nyman, 2003, p. 483). Fica assim evidenciada por estes autores a importância de que uma função também seja estudada pela sua forma gráfica e não apenas a algébrica ou numérica.

3. O Estudo

A pesquisa foi realizada com 20 alunos do curso de Cálculo I do CEDERJ, instituição de ensino superior à distância, no pólo de Angra dos Reis/RJ. Os alunos inscritos nesta disciplina, que são graduandos de Química, Física ou Matemática, estudam limites e derivadas de funções reais de uma variável real na disciplina de Cálculo I. Iniciamos a parte empírica de nosso estudo propondo-lhes uma lista com quatro atividades para que resolvessem e um questionário que visava conhecer melhor os seus métodos de estudo. As atividades foram aplicadas durante o segundo semestre de 2007.

A primeira atividade tratava da construção do gráfico de uma função *f* a partir de sua descrição , interpretando os dados apresentados, o que incluia estudo da variação do sinal de f', nenhuma lei algébrica para *f* foi dada.

1- Considere uma função diferenciável *f*: IR→IR tal que:

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

d) f (1) = 1

e) $f'(x) > 0$ se e somente se $x \in (0,1)$

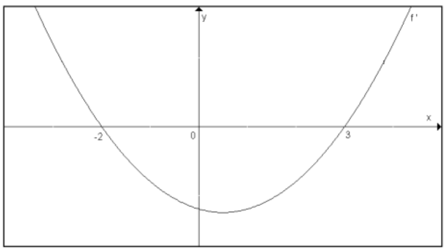
f) $f'(x) = 0$ se e somente se $x = 0$ ou $x = 1$

Faça um esboço do gráfico de $f(x) = y$.

Quadro1: Atividade 1 – esboçar gráfico de *f* a partir de alguns dados sobre o comportamento da função e sobre f'.

Já a segunda atividade apresentava o gráfico de $f'(x)$ e pedia ao aluno que, a partir deste gráfico e de dois pontos do gráfico de *f*, esboçasse o gráfico de $f(x)$. Pedia também que determinasse as raízes de *f*.

2- Seja *f* um polinômio de grau 3 tal que o gráfico da derivada de *f* é dado na figura a seguir:

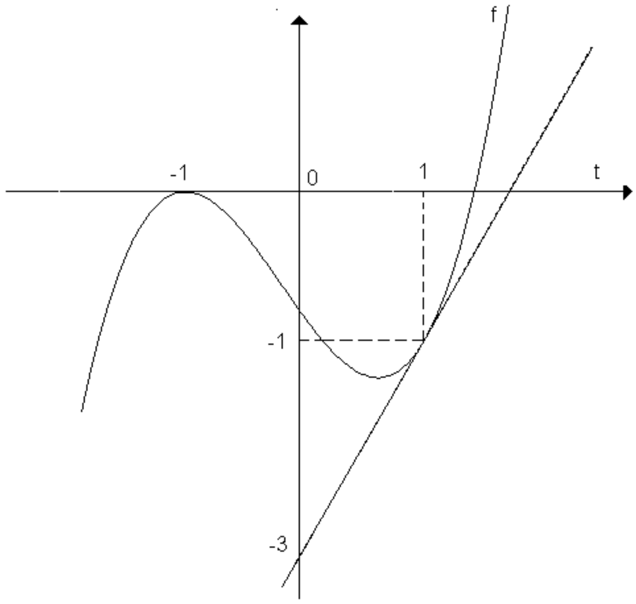


a) Dado que *f* (-2) = -1 e *f* (3) $= -3$, faça um esboço do gráfico de $f(x) = y$.

b) Quantas soluções tem a equação *f* (*x*) = 0?

Quadro 2: Atividade 2 – esboçar gráfico de *f* e determinar suas raízes, dados alguns de seus pontos e o gráfico de f'.

5- Seja $g(t) = f(t^2 + t - 5)$ onde f é a função cujo gráfico está dado na figura a seguir:



a) Ache $f'(1)$
b) Ache $g'(2)$
c) Ache a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto $t = 2$.

Quadro 3: Atividade 5 – esboçar gráfico de f e determinar suas raízes, dados alguns de seus pontos e o gráfico de f'.

6- a)Use as regras de derivação para calcular a derivada da função $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$.

b) Determine a derivada de f em $x = 4$.

Quadro 4: Atividade 6 – Determinar algebricamente a derivada de uma função e o valor dessa derivada em um determinado ponto a partir da lei da função.

Usamos ainda algumas questões das duas provas integrantes do sistema de avaliação do CEDERJ, feitas pelos alunos participantes da pesquisa neste mesmo semestre. Julgamos interessante verificar conjuntamente as nossas atividades o seu conhecimento sobre o conceito de derivada em um momento para o qual haviam estudado e se preparado. Estudamos especificamente as três questões a seguir:

- Calcule as derivadas das seguintes funções:
  (a) $f(x) = x\cos x^2$
- Encontre os pontos onde a tangente é horizontal na função $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

- Esboce o gráfico da função $f(x) = \dfrac{8 - x^2}{(x-2)^2}$ e dê explicitamente o que se pede, considerando que $f'(x) = 4\dfrac{x-4}{(x-2)^3}$ e $f''(x) = -8\dfrac{x-5}{(x-2)^4}$:
  - domínio *D* de *f*;
  - intervalos de *D* em que *f* é contínua;
  - equações das assíntotas verticais e horizontais do gráfico;
  - pontos de D onde *f* é crescente e onde *f* é decrescente;
  - extremos relativos de *f* e os respectivos pontos de *D* onde ocorrem;
  - intervalos onde a concavidade do gráfico é para cima, onde é para baixo e os seus respectivos pontos de inflexão;
  - imagem de *f*.

Quadro 5: Atividades retiradas de avaliações do CEDERJ

4. Resultados

Os resultados encontrados confirmaram o que foi estudado na revisão bibliográfica feita para a realização desta pesquisa: os alunos demonstraram não ter conhecimento gráfico da derivada de uma função. Seu desconforto em lidar com situações onde não lhes informávamos e nem exigíamos como resposta leis algébricas ficou evidente.

Com fins de análise dos resultados das questões, elaboramos um código semelhante ao utilizado por Asiala et al (1997) que, em sua pesquisa, pretendiam agrupar as habilidades percebidas nos sujeitos do estudo em relação à compreensão do conceito de derivada de uma função real de variável real. Utilizamos as letras iniciais das ideias principais presentes em cada quesito para nomeá-los, conforme podemos ver a seguir.

- Tg - Os resultados assinalam que o estudante compreende o valor de $f'(x)\, f'(x)$ como a inclinação da reta *tangente* ao gráfico da função no ponto $(x,\, f'(x)).\ (x, f(x))$
- Gr - O aluno é capaz de operar com a derivada da função baseado somente em informações *gráficas* e sem fazer uso de qualquer expressão que defina a função.
- Cr - Os resultados assinalam que o estudante compreende como usar derivadas para determinar intervalos de *monotonicidade* (variações de crescimento e concavidade) para a

função, sendo capaz de esboçar um gráfico a partir de informações sobre a função e a derivada.

- LA – Os resultados assinalam que o estudante compreende a utilização das regras algébricas de derivação para determinar a *lei* (algébrica) da derivada de uma função.

Associados a estes códigos utilizamos os indicadores de compreensão - graus - descritos a seguir:

B- O aluno demonstra alguma compreensão do item.

I - O aluno demonstra pouca ou nenhuma compreensão sobre o item.

Obtivemos 4 variações de conjuntos de indicadores (B e I) obtidos pelos alunos em cada quesito (Tg, Gr, Cr e LA) proposto em nosso código. A tabela 1 exibida a seguir mostra esses conjuntos e a quantidade de alunos que os obtiveram dentre os 20 envolvidos na pesquisa:

Tabela 1: Graus obtidos em cada quesito × número de estudantes

Graus obtidos em cada quesito				**Número de estudantes que obtiveram este conjunto de graus**
Tg	**Gr**	**Cr**	**LA**	
I	I	I	B	4
I	I	B	B	5
B	I	I	B	3
B	I	B	B	8
			Total:	**20**

Analisando os resultados apresentados na tabela coluna a coluna, podemos perceber que quase metade dos alunos pesquisados demonstram pouca ou nenhuma compreensão sobre a relação entre a derivada de uma função real e a inclinação da reta tangente. Isso indica que essa noção, quando muito, é uma relação decorada pelo aluno, sem apresentar maior significado. Essa percepção surge a partir da análise da resolução apresentada pelos alunos à questão 5, exibida no quadro 3. Responder a essa questão exigia que o aluno tivesse o conhecimento instrumental desse fato, ou seja, que ele soubesse como aplicar a ideia da derivada como inclinação da reta tangente à situação proposta no problema.

Outro fato que aparece fortemente ao observarmos a segunda coluna da tabela é que *nenhum aluno foi capaz de operar com a derivada da função baseado somente em informações gráficas e sem fazer uso de qualquer expressão que defina a função*. Nas questões que exigiam esta habilidade houve dois tipos de postura do aluno: ou ele tentou determinar a lei da função para então esboçar o gráfico (ver Figuras 1 e 2) ou então preferiu abster-se em respondê-la. Encontramos 6 soluções do primeiro tipo, tendo portanto 14 alunos omitido a solução. Esse fato é bastante expressivo e denota total falta de prática do aluno em operar graficamente com funções e suas derivadas.

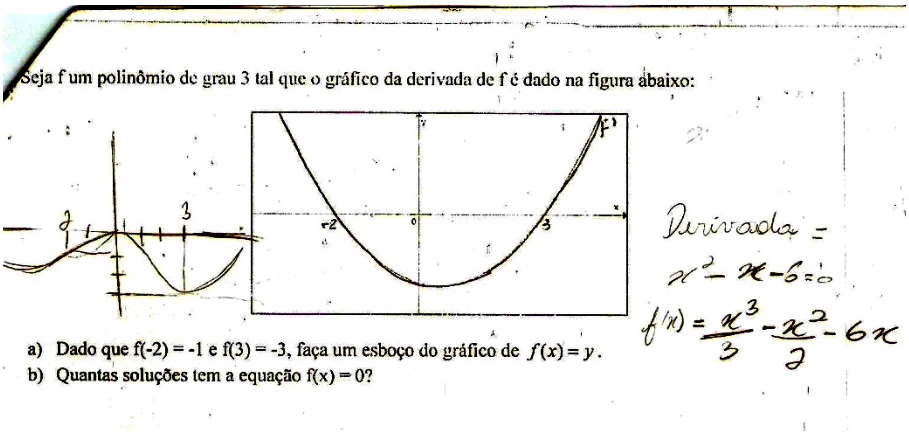


Figura 1 – T3 de Alberto

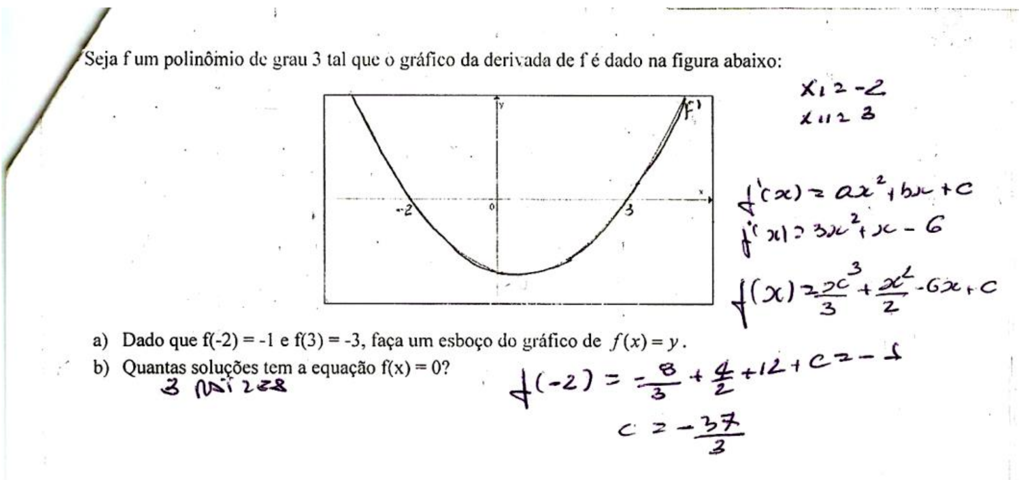


Figura 2 – T3 do Geraldo

Analogamente ao percebido por Asiala et al (1997), nossos sujeitos estiveram claramente dispostos a determinar as leis algébricas que estariam associadas aos gráficos apresentados no intuito de levar as questões para um campo onde se sentiam aptos a transitar. Notamos que os alunos sequer tentaram usar os gráficos dados, fossem eles de $f(x)$ f(x) ou de $f'(x)$ f'(x). A falta de prática de operar em situações gráficas praticamente os impede de utilizá-las como fontes ricas e sintetizadas de informações.

As habilidades que se relacionam a processos normalmente automatizados como os indicados nos quesitos Cr (determinação dos intervalos de variação de crescimento e de concavidade de uma função real) e LA (determinação da lei algébrica da derivada de uma função real) mostram melhores resultados. Pesquisar os intervalos de monotonicidade de uma função a partir do estudo da variação do sinal da derivada mostrou-se satisfatória em 65% dos pesquisados. Entendendo isso como um processo mecânico de, dada uma função pela sua lei algébrica, determinar também algebricamente a derivada e a variação do seu sinal, associando as noções de crescente aos intervalos onde a derivada é positiva e de decrescente onde ela é negativa parece ser mais simples para o estudante. Acreditamos que isso ocorra exatamente por ser normalmente tratado pelo aluno como uma regra, um procedimento que é repetido sempre que a expressão "estudar o crescimento" aparece – analogamente, o estudo da concavidade a partir da variação do sinal da segunda derivada apresenta essa mesma configuração. O sucesso em processos automatizados aparece ainda mais fortemente na coluna LA da tabela, que exibe o grau de compreensão dos pesquisados em relação às habilidades algébricas de determinação da lei de derivadas de funções dadas algebricamente: todos os alunos demonstraram ter bom desempenho nesta habilidade. Alguns cometem erros oriundos de aplicação indevida ou incorreta de regras de derivação ou de manipulação algébrica, mas de maneira geral esta questão foi respondida e corretamente encaminhada por todos os pesquisados - Orton (1983) comenta sobre a frequência destes erros, classificando-os como *erros de execução*..

Em relação aos métodos de estudo, os instrumentos utilizados revelaram preferência pela resolução de exercícios a partir de modelos preexistentes, como exemplos resolvidos, normalmente dando maior ênfase àqueles que se detinham aos aspectos algébricos da derivada. Quando correlacionamos estes resultados e o fato de ser o curso de modalidade à distância em relação ao aprendizado e ao estudo, percebemos como a distância potencializa a preferência por manipulações algébricas geralmente apresentadas pelos estudantes de Cálculo. Os alunos, a despeito de incentivos da docente da disciplina, evitavam acintosamente os métodos diferenciados de estudos frequentemente propostos pela coordenação do curso, como as aulas na web ou atividades com mathlets ou softwares computacionais.

Consideramos ainda uma observação interessante a partir de nosso estudo a percepção de que a concepção dos estudantes sobre a derivada como inclinação da reta tangente se resume às questões teóricas ligadas à definição de derivada. Todas as situações que exigiam dos alunos essa compreensão a nível instrumental apresentaram-se bastante difíceis para eles. Perceberam que o problema que estavam tentando resolver dependia da aplicação do significado geométrico de derivada, mas não eram capazes utilizar este significado Na questão da prova analisada em que se pedia ao aluno que determinasse em que ponto do domínio de $f(x)$ a reta tangente era horizontal, dada sua lei algébrica f, somente 5 alunos foram capazes de estabelecer esta conexão, sendo que 11 dos 20 alunos aparentam não ter nenhuma compreensão deste fato, confundindo os conceitos de assíntota e tangente, procurando assíntotas horizontais – provavelmente seduzidos pela expressão *horizontal* que normalmente aparece associada às assíntotas e não às tangentes (ver Figura 3).

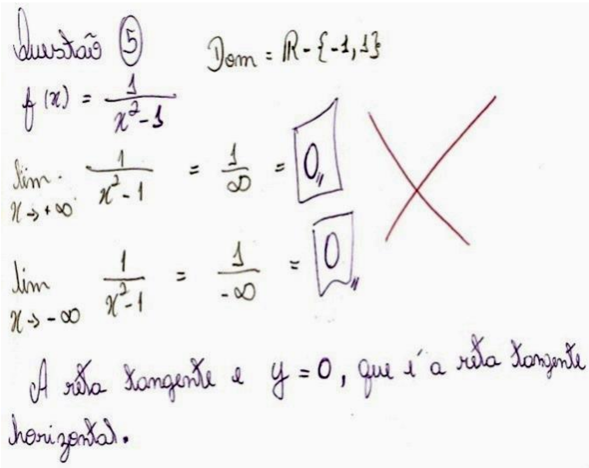
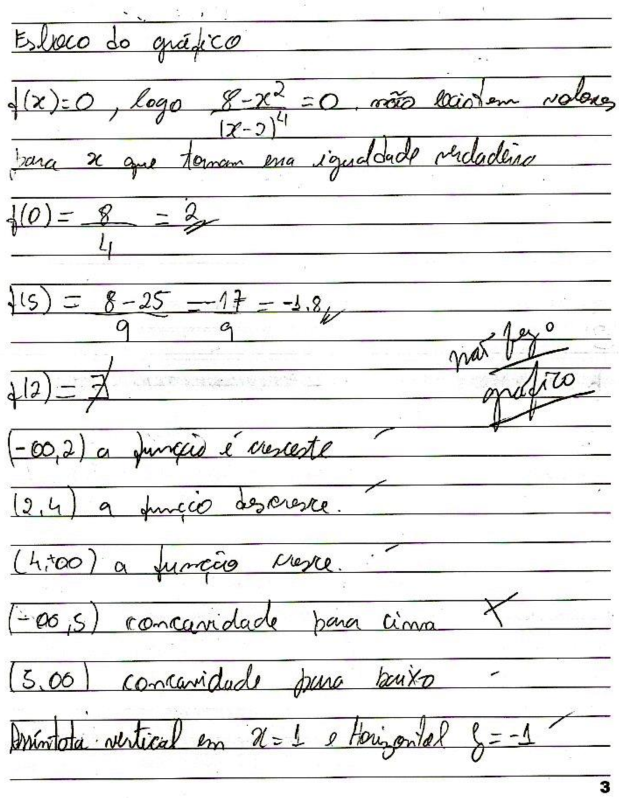


Figura 3– Resolução de uma questão por um dos alunos que confundiu os conceitos de assíntota e tangente.

Isto mostra uma clara inconsistência nas ideias geométricas de tangente e assíntota. A confusão entre tangente e assíntota poderia até mesmo ser entendida por apresentarem ambas aproximações da curva estudada, a primeira de caráter local e a última uma aproximação no infinito. Este é um estudo que parece ser interessante para trabalhos futuros.

A familiaridade dos alunos com a utilização da derivada para estudar a variação do crescimento e da concavidade da função justifica o desempenho um pouco mais satisfatório destes nas questões que exigiam estas habilidades, pelo menos em relação aos aspectos algébricos nela envolvidos. Dentre os 20 estudantes pesquisados, 13 demonstraram relacionar a variação do sinal de $f'(x)$ com a variação do crescimento de $\mathrm{f(x)}$, mas somente seis alunos esboçaram um gráfico, dos quais somente três atendiam a todos os aspectos informados. A Figura 4 do anexo V mostra a resolução de um dos alunos participantes da pesquisa que indica como "esboço do gráfico" um conjunto de cálculos resultantes da análise da derivada, e não o gráfico propriamente dito, demonstrando que ele toma pelo gráfico os cálculos algébricos realizados para determiná-lo.


Esboço do gráfico

$f(x)=0$, logo $\frac{8-x^2}{(x-2)^4}=0$. não existem valores para x que tornam essa igualdade verdadeira

$f(0)=\frac{8}{4}=2$

$f(5)=\frac{8-25}{9}=\frac{-17}{9}=-1,8$

$f(2)=\nexists$

não fez o gráfico

$(-\infty,2)$ a função é crescente

$(2,4)$ a função descresce.

$(4,+\infty)$ a função cresce.

$(-\infty,5)$ concavidade para cima

$(5,\infty)$ concavidade para baixo

Assíntota vertical em $x=1$ e Horizontal $y=-1$

3

Figura 4 – Significado de "esboço de gráfico" para um aluno

Determinar extremos também pareceu ser um ponto confuso para o aluno: qualquer mudança de crescimento é tratada por ele como um valor para extremo, mesmo sem considerar se este valor pertence ou não à função em virtude das restrições observadas no domínio da função considerada. Isto denota um tratamento compartimentalizado para a questão, onde cada item se encerra em si mesmo. Mesmo tendo acabado de determinar o maior conjunto em que a função está definida, ele não correlaciona esta informação com as raízes da derivada. Esta é provavelmente uma das maiores dificuldades em se esboçar o gráfico da função: é difícil para o aluno reunir todas as informações e analisá-las conjuntamente, sintetizando-as na representação gráfica pedida.

5. Considerações Finais

Este estudo nos permitiu perceber o quanto a formação matemática dos alunos no Ensino Médio é insuficiente em relação aos aspectos relacionados ao estudo de funções reais. Normalmente este estudo é feito somente via leis algébricas, hierarquizado em tipos de funções, onde os gráficos são apresentados apenas como uma possibilidade de representação da lei algébrica quase sempre feitos segundo a sequência tabela com valores arbitrários → gráfico. O aluno somente compreenderá completamente a derivada como uma função que pode ser representada por um gráfico, se tiver a noção de que uma função não necessita de uma lei algébrica para que possa existir. É importante destacar aqui que nossa pesquisa foi realizada com licenciandos em matemática, física e química – 14 eram estudantes matriculados no curso de matemática, e que, portanto já podem ser professores de matemática com as mesmas concepções limitadas de funções que observamos até agora. O estudo do Cálculo, em lugar de ampliar os conceitos de funções destes alunos, na verdade os restringe mais, deixando-os cada vez mais presos aos seus aspectos operacionais algébricos.

Provavelmente, por detrás deste tratamento padronizado para funções pelos alunos escondem-se as fracas concepções de seus próprios professores na educação básica em relação ao tema. Isso pode sugerir que seu conhecimento sobre funções restrinja-se aos seus aspectos algébricos. O investimento nas formações inicial e continuada dos professores de matemática revela -se imprescindível para que se possa reverter o quadro acima descrito.

Estudos interessantes podem surgir a partir desta pesquisa. Estruturar sequências de atividades que possam auxiliar o desenvolvimento da compreensão gráfica das funções de maneira geral e da derivada especificamente parece ser não somente interessante como também necessário. Considerando o grande crescimento da oferta de cursos de graduação semipresenciais, especialmente nas áreas de formação de professores, a elaboração de atividades que possam ser implementadas a distância e que se valham justamente desta distância, que associa compulsoriamente o computador e o estudo, também se mostra como um viés relevante que pode ser concebido a partir de nossos resultados. É importante considerar que, se forem atividades realizadas a distância, não haverá o acompanhamento e orientação do professor. Deveriam ser portanto atividades que conduzam o aluno a refletir sobre o que fizeram e a concluir fatos relevantes sobre o estudo em tela. Também um estudo aprofundado sobre os métodos de estudo dos alunos da EaD em Matemática pode ser bastante eficiente para o fornecimento de material auxiliar aos desenvolvedores dos materiais didáticos usados nesta modalidade. As especificidades deste tipo de ensino exigem que estes livros sejam elaborados de maneira diferenciada; porém o caráter muito recente desta prática não oferece ainda maiores referenciais para estes autores, particularmente em relação às disciplinas matemáticas.

Este estudo foi realizado no intuito de contribuir para a melhoria da formação de professores de Matemática. Acreditamos que a cegueira matemática que assola nossas escolas e faculdades somente poderá ser revertida – lentamente – se o professor de matemática tiver conhecimento pleno de sua disciplina. Não basta, para ser professor, saber resolver os exercícios:

é indispensável que ele seja capaz de problematizar, de levar seus alunos a situações em que tenham que usar a criatividade, permitindo assim que eles construam o conhecimento matemático a partir de suas próprias observações e conclusões. O papel do professor neste processo se assemelha ao de um ator coadjuvante e diretor ao mesmo tempo: ele deve planejar e organizar todo o processo, mas somente interferir neste quando perceber que os caminhos tomados pelos alunos estão se desviando do foco principal. Este tipo de atuação é, porém, impossível caso o conhecimento disciplinar do conteúdo não seja pleno. Esperamos contribuir na formação de um professor que não somente seja um profundo conhecedor da matemática escolar em todos os seus meandros, minúcias e especificidades, como também um aprendiz permanente e capaz de gerir a sua própria aprendizagem.

6. Referências Bibliográficas

ASIALA, M., et al. (1997). **The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative**. Journal of Mathematical Behavior, v.16, n.4. p. 399 – 431.

BERRY, J. S. & NYMAN, M. A. (2003). **Promoting students' graphical understanding of the calculus**. Journal of Mathematical Behavior, 22, p. 481 – 497.

BREIDENBACH, D. et al. (1992). **Development of the Process Conception of Function**. Educational Studies in Mathematics, 23, p. 247 – 285.

CENTRO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA DO RIO DE JANEIRO (CEDERJ). Plataforma do Consórcio. **Material Didático de Cálculo 1. Aula 01, versão 02**. Rio de Janeiro, 2006. Disponível em http://www.cederj.edu.br/fundacaocecierj/exibe_artigo. Acessado em 27/06/2008.

DUBINSKY, E. (1991). **Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking**. In: D. Tall (Org.), Advanced Mathematical Thinking, Dordrecht: Kluwer, p. 95 – 123.

FERRAZ, A. G. e GITIRANA, V. (2007). **Uma Análise do Esboço de Gráficos de Função em Livros Textos de Cálculo Diferencial e Integral.** In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte.

GRAVINA, M. A. (1986). **O quanto precisamos de tabelas na construção de gráficos de funções**. Revista do Professor de Matemática, v. 17. São Paulo, pp.27-34.

GRAY, E. e TALL, D. (1994). **Duality, Ambiguity and Flexibility: a Proceptual View of Simple Arithmetic**. The Journal for Research in Mathematics Education, 26 (2), p. 115 – 141.

HUGHES-HALLETT, D. et al. (2003). **Calculus. New York: John Wiley and sons**, Inc: 1994 apud BERRY, J. S. & NYMAN, M. A. Promoting students' graphical understanding of the calculus. Journal of Mathematical Behavior, 22, p. 481 – 497.

ORTON, A. (1983). **Students' Understanding of Differentiation**. Educational Studies in Mathematics, 14, pp. 235 – 250.

PALIS, G. L. R. 11. PALIS, G. L. R. (2003). **Uma Análise das Construções Mentais Subjacentes à Produção e Interpretação de Gráficos de Funções**.. In: Luiz Mariano. (Org.). História e Tecnologia no Ensino de Matemática, v. 1, IME: RJ, p. 217-226.

PINTO, G. M. F. (2008). **Compreensão Gráfica da Derivada de uma Função Real em um Curso de Cálculo Semipresencial.** Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. Instituto de Matemática. UFRJ. Rio de Janeiro.

SEGADAS VIANNA, C. C. (1998). **Students' Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus: an Exploration of Definitions**, Theorems and Visual Imagery. Tese de Doutorado em Educação Matemática. Institute of Education, University of London.

SFARD, A. (1991). **On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin**. Educational Studies in Mathematics 22, p. 1 – 36.

TALL, D. (1991). **Intuition and Rigor: the role of visualization in the Calculus**. In: Zimmermann & Cunningham (Ed.) Visualization in Mathematics, M.A.A., Notes 19, p. 105–119.

THOMPSON, P. W. (1994). Images **of Rate and Operational Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus.** Educational Studies in Mathematics, 26, p. 229 – 274.