Logaritmo ¡no te tenemos miedo! La calculadora científica como artífice para arribar a la definición de logaritmo

por
Patricia Bozzano
(Liceo «Víctor Mercante» - Universidad Nacional de La Plata, Buenos Aires)

Se presenta una propuesta para introducir el concepto logaritmo en la escuela secundaria mediante la utilización de la calculadora científica.

La propuesta nace de la experiencia en las clases de matemática en las cuales dicho saber forma parte de la planificación de la materia y de una mirada propia como docente e investigador novato en matemática educativa.

Con el diseño de un conjunto de tareas se buscó dar lugar a la aparición de la definición de logaritmo de un número. Dicho diseño ya tiene tres ocasiones de ser implementado en estudiantes de 5.º año de una escuela argentina.

Propiciando el trabajo autónomo, la exploración mediante la utilización de la calculadora científica, el objetivo consiste en que el estudiante, por sus propias acciones, le dé sentido a la operación logaritmo y sus propiedades.

Introducción

En innumerables ocasiones los adultos relatan sus peores experiencias de aprendizaje cuando de matemática se trata, teniendo a los logaritmos como villanos.

En el plan de explicar tales situaciones podemos, por ejemplo, avizorar poco o nulo gusto por la matemática, experiencias de clases de estilos magistrales y expositivas. Clases en las que los estudiantes tienen poco o nada de protagonismo. Aceptemos que larga puede ser la lista de causas que pueden producir escasa comprensión de la operación logaritmo, como también la falta de sentido de su significado y uso.

Sin entrar aquí en discusión sobre las diferentes corrientes y modelos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, sí se señala la completa adhesión a aquellos modelos y teorías que se refieren a las prácticas que se centran en la acción de los estudiantes (por ejemplo, la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau, 1986). Por lo que en el texto que sigue se comparte un conjunto de estrategias puestas en marcha en ocasiones de introducir logaritmos en las clases de matemática.

El diseño

En busca de que el estudiante, mediante sus acciones, arribe por medios propios a la definición de logaritmo es que las actividades se desarrollan en gran parte con la utilización de la calculadora científica. Cabe aclarar que las actividades que aquí se presentan solo contemplan el carácter operatorio —el logaritmo como la séptima operación—.

Se le da a la calculadora el estatus de asistente para que el estudiante, mediante cálculos, aproximaciones y estimaciones, experimente patrones que conduzcan a la exploración y desarrollo del concepto logaritmo de un número (Wenzelburger, 1990).

El orden de las tareas responde a una lógica basada en lo que Sierpinska (Gómez, 1996) nos ilustra sobre la comprensión en matemáticas. Partiendo de actividades que el estudiante debe realizar centrándose en los resultados que va obteniendo, para luego ser capaz de anticipar resultados por haber logrado cierto nivel de conceptualización.

Para el diseño se realizó una revisión histórica del desarrollo de la idea de logaritmo, su conceptualización y sus usos.

En términos de Bishop (1991) se le concede a la matemática una visión socio-cultural, por lo que la inclusión de elementos históricos de los saberes funciona como una especie de catalizador, provee al estudiante de una imagen humanizada del saber puesto en juego, permitiendo reconocer en él el carácter de bien cultural, bien que pertenece a toda la humanidad.

Grageas históricas

Aprovechando el recorrido matemático realizado por los estudiantes, recurrir a pasajes de la historia de logaritmo en los que se menciona su importancia a la hora de simplificar cálculos que generaron un beneficio, por ejemplo, para los astrónomos (Rey Pastor y Babini, 1986), contribuye al plan en el cual los estudiantes se familiarizan con el concepto.

Desde los inicios se conocía que $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$, cuestión que ayudaba a realizar cálculos que demandaban multiplicaciones mediante sumas (Stewart, 2008). Si bien es verdad que con la llegada de artilugios tecnológicos los cálculos son sencillos de resolver dejando de ser la razón para el uso de logaritmos como en siglos pasados, las orientaciones curriculares de la planificación de la matemática escolar se apoyan en el rol del logaritmo como inverso de exponenciales a la hora de llevarlo al aula.

Definición de logaritmo: $\log_b a = e \Leftrightarrow b^e = a$, donde $b > 0$, siendo b la base, a el argumento y e el resultado del logaritmo.

La lógica de las sucesivas tareas que conforman las estrategias da oportunidades para que el estudiante, como investigador, con sus acciones guiadas y mediante el uso de la calculadora arribe a conclusiones correctas que conducen a tal definición.

Contexto

Para las actividades se contemplaron varios aspectos: el nivel escolar, los recorridos matemáticos previos que tuvieron los estudiantes, las orientaciones curriculares a nivel institucional, el propósito de lograr el aprendizaje esperado.

El conjunto de tareas se pensó y viene siendo implementado en estudiantes de 16 años que cursan 5.º año de la escuela secundaria, según el modelo curricular para la escuela secundaria de la República Argentina.

Los grupos de estudiantes, siendo ellos tres al momento de compartir este relato, iniciaron previamente el recorrido completo de la potenciación dos años antes al momento de implementarse este conjunto de tareas. En aquellas ocasiones el tratamiento de la potenciación involucró investigar los exponentes, también contempló el desarrollo y trabajo de la notación científica, la aplicación de leyes y propiedades de la potenciación acompañada de la representación de la radicación como una potenciación.

Tareas

El diseño consiste en un instrumento a implementar en varios momentos de una o a lo sumo dos sesiones de 40 minutos cada una. Tiene forma de guion con 10 ítems para completar.

Como se muestra en la figura 1, se inicia con un recorrido sobre los conocimientos previos y valiosos para luego formular la conceptualización buscada.

ETAPA I. REVISIÓN

1.Completar, sabiendo que a es cualquier número real, excepto 0.

$a^n \cdot a^m =$	$a^n : a^m =$
$(m \neq 0)$ $a^{\frac{n}{m}} =$	$a^{-n} =$

2.Obtener:

$5^2 =$	$\left(\frac{-1}{3}\right)^2 =$	$0,2^2 =$	$64^{\frac{2}{3}} =$
$8^{-1} =$	$(-5)^2 =$	$1,5^{-2} =$	$(-5)^3 =$

Figura 1. Tareas para recordar saberes previos

Como siguiente paso (figura 2), se convoca mediante la tarea a indagar mediante el uso de la calculadora científica y la nueva tecla log.

ETAPA II. EXPLORACIÓN

3.Haciendo uso de la calculadora encontrar los resultados de cada operación, buscar un patrón y explicar el significado de la operación que se realiza.

$log\ 1 =$	$log\ 100 =$
$log\ 10 =$	$log\ 1000 =$

si
log X = 6
¿cuánto es x?

Figura 2. Tareas con uso de calculadora científica

Es aquí cuando se genera la oportunidad de introducir aspectos históricos de la matemática, la aparición y necesidad del logaritmo en base 10.

Posteriormente se da lugar a formular en forma oral, para luego volcarlo en forma escrita, las sospechas de los estudiantes sobre lo que ocurre al utilizar la tecla log. Inmediatamente después, se los invita a seguir explorando con el uso de la calculadora. Dando tiempo a la discusión de resultados, ideas, conjeturas, se genera una nueva etapa en la que deberán arribar a las respuestas de logaritmos con distintas bases por medios propios, haciendo uso de los saberes anteriormente contemplados, pero ya no con la calculadora (figura 3).

ETAPA III. CONJETURAR Y VALIDAR

4.A partir de las respuestas de la ETAPA II, redactar qué podrá significar log

5.Utilizando la calculadora, obtener (redondear con 2 cifras decimales):

$log\ -8 =$	$log\ 2,9 =$	$log\ 8 =$
$log\ \left(\frac{2}{7}\right) =$	$log\ 5 =$	$log\ 123 =$

6.Explicar qué se observa, justificando las respuestas que provee la calculadora.

ETAPA IV. INSTITUCIONALIZACIÓN

7.Obtener:

$log\ 0,1 =$	$log_2\ 2 =$	$log_{\frac{7}{5}}\left(\frac{25}{49}\right) =$	$log_4 2 =$	$log_2\ 0,0625 =$
$log_3\left(\frac{1}{3}\right) =$	$log_2\ 8 =$	$log_6\ 36 =$	$log_{568}\ 1 =$	$log_{\frac{1}{3}}\ 9 =$

Respuestas: **ejercicios 4. y 6.**

Figura 3. Tareas para permitir formular conjeturas

En ocasión de discutir sobre los resultados del ítem 7 y del ítem 8, se retoma la historia de la matemática respecto a la necesidad de algoritmos para facilitar cálculos en ausencia de calculadoras.

Se les presenta nuevamente el desafío de dar evidencias del manejo correcto del objeto logaritmo de un número con una nueva tarea (figura 4).

8. Obtener el valor de x

$log_x 49 = 2$	$log_5 x = -1$	$log_4 64 = x$	$log_{\frac{1}{36}} 36 = x$	$log_2 (\frac{1}{4}) = x$
$log_{\sqrt{6}} 6 = x$	$log_7 x = -2$	$log_{4789} x = 0$	$log_9 x = \frac{1}{2}$	$log_{\frac{1}{5}} 25 = x$

Figura 4. Tareas para afianzar lo conceptualizado

9. Obtener cada logaritmo con la calculadora, luego sacar conclusiones. Redondear en dos decimales.

$ln\ 14$	
$ln\ 2$	
$ln\ 14 + ln\ 2$	
$ln\ (14 \cdot 2)$	
$ln\ (14 + 2)$	
$ln\ 14 - ln\ 2$	
$ln\ (14 : 2)$	
$ln\ (14 - 2)$	
$ln\ 14^2$	
$2 \cdot ln\ 14$	
$(ln\ 14)^2$	
$ln\ \sqrt{14}$	
$\sqrt{ln\ 14}$	
$\frac{1}{2} \cdot ln\ 14$	

10. Conclusiones:

Figura 5. Tareas para explorar propiedades

Para la siguiente actividad, se muestran dos opciones. La segunda surgió a partir de la puesta en escena y posterior reformulación de la secuencia. Se propone explorar con la calculadora posibilidades de establecer relaciones entre los cálculos que llevan adelante (figura 5).

Se decide involucrar una nueva tecla de la calculadora ln para esta tarea (figura 5) dada la reiterada detección de errores en ocasiones previas vistas a partir de la aparición de un obstáculo didáctico.

Además de su presentación e indicación de la tecla correspondiente en la calculadora científica, se dedicó el tiempo suficiente para que los estudiantes se familiaricen, definan y utilicen el logaritmo natural.

Así, queda institucionalizado que $\log_e x$ se escribe $\ln x$ donde $e = 2{,}718\ldots$ (con 3 cifras significativas).

Algunos resultados

Para ilustrar lo trabajado por los estudiantes, aquí se muestran algunas de las intervenciones que hicieron en forma escrita, por ejemplo, en la primera parte del instrumento (figura 6). Dado el escenario de educación virtual a causa del confinamiento por la pandemia, estas imágenes corresponden al grupo de 5.º año del 2020. A causa de las facilidades y prestaciones de la plataforma utilizada para las reuniones en videoconferencia, todos los participantes podíamos editar en simultáneo lo que se compartía en pantalla, siempre y cuando el docente, en el rol de administrador, otorgue el permiso de edición.

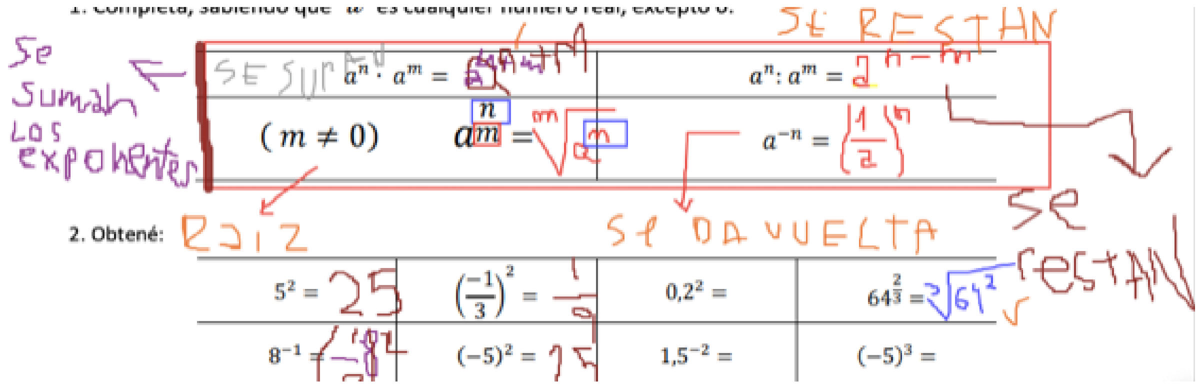

Figura 6. Intervención de los estudiantes

Con esta herramienta, se garantizó la acción de los estudiantes y el monitoreo de sus acciones simultáneamente.

Una vez atravesadas aquellas tareas que conducían a la conceptualización de logaritmo de un número, haciendo uso del logaritmo en base 10, un estudiante propuso el intervalo de números reales en el que $\log 10$ debe tener su solución. Este razonamiento lo expuso oralmente, compartiendo con el resto de los participantes de la clase su observación sobre $\log 10$ y $\log 100$, concluyendo que si:

$$10 < 20 < 100 \text{ entonces necesariamente } \log 10 < \log 20 < \log 100,$$
$$\text{por lo que } 1 < \log 20 < 2. \text{ Sugirió que } \log 20 \text{ deberá estar más cerca de 1 que de 2.}$$

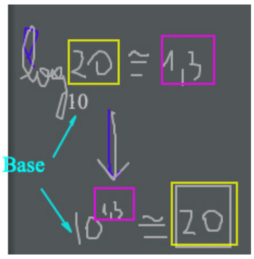

Figura 7. Ejemplo para reforzar la conceptualización lograda

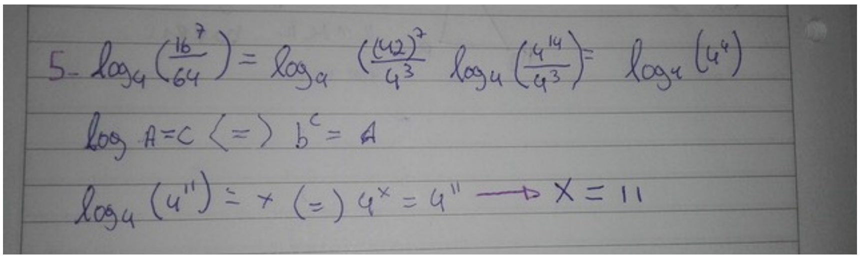

Figura 8. Algunos errores detectados

Cuando se recurrió a la calculadora, se validó la conjetura y se reforzó la conceptualización hallada (figura 7).

Cuando se señala la importancia de los saberes previos se hace pensando, entre otras y varias cuestiones, en resoluciones de tareas en las que aparecen diversidad de errores. En la figura 8 se pueden observar los errores cometidos en la notación, cuya razón recae en el uso de la memoria y no así en la conceptualización del saber en juego y su relación con otros saberes.

A modo de cierre

Los profesores de matemática buscamos el aprendizaje de nuestros estudiantes. En el proceso y con la experiencia emprendemos la búsqueda de artificios, herramientas, etc, que nos ayuden a lograr tan esperado objetivo. Leemos, estudiamos, aprendemos de colegas y de las teorías didácticas. Experimentamos en nuestras aulas, ponemos a prueba estrategias, las evaluamos, las reformulamos. El proceso nunca finalizará, pues nuestros estudiantes no son siempre los mismos y los escenarios tampoco.

En este último punto, el 2020 nos dio la oportunidad de explorar, poner en práctica, evaluar experiencias. En un escenario de educación virtual es inútil, contraproducente dejar de lado la calculadora científica, ignorar su utilidad. Tanto los teléfonos móviles como las computadoras poseen versiones de calculadoras y calculadoras científicas. Nuestra responsabilidad recae en contemplar la posibilidad de su uso y diseñar actividades que se apoyen en ellas.

Cualquier adulto recurre a la calculadora de su teléfono móvil cuando necesita realizar algún cálculo, si ese adulto también la utilizó para definir, por ejemplo, logaritmo de un número, es de esperar que no considere al logaritmo como un villano. Por el contrario, se desea que esos pasajes de su vida escolar en las que accedió al concepto de logaritmo impriman recuerdos agradables además del aprendizaje deseado.

Bibliografía

BISHOP, A. (1991), *Enculturación matemática*, Paidós, Barcelona.

BROUSSEAU, G. (1986), «Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7 (2), 33-115 (traducción de J. Centeno, B. Melendo, J. Murillo).

GÓMEZ, P. (1996), «Una compresión de la comprensión en matemáticas», *Revista EMA*, 1(3), 233-243.

REY PASTOR, J., y J. BABINI (1986), *Historia de la matemática (Vol. 2)*, Gedisa, Barcelona.

STEWART, I. (2008), *Historia de las matemáticas en los últimos 10000 años*, Crítica, Barcelona.