# Dos rombos y un destino
## (Penrose lo sabía)

por
Ricardo Alonso Liarte y Daniel Sierra Ruiz
(IES Salvador Victoria, Monreal del Campo; CPI El Espartidero, Zaragoza)

El presente artículo es la segunda parte del que publicamos en el número anterior de *Entorno Abierto* (Alonso y Sierra, 2021). Allí decíamos que partíamos de un taller del MMACA al que asistimos en las JAEM de Cartagena, que ellos titularon *¡Si Penrose lo supiera…!* (Brasó y otros, 2013). Creemos que el título hace referencia al *jugo* que le sacaron a los dos rombos y que no se encontraba en el trabajo original (Penrose, 1979). Así que hemos aprovechado la *idea* para nuestro subtítulo, porque en esta ocasión nos vamos a centrar más en los contenidos desarrollados por Penrose.

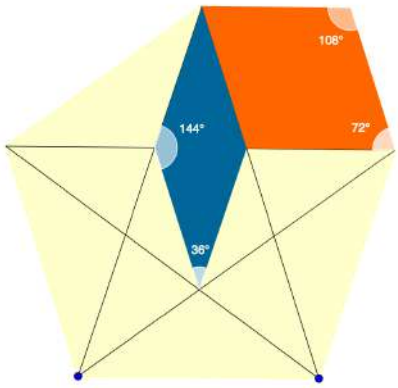


Figura 1

El hecho de que los rombos estén tan relacionados entre sí, incita a pensar que su *generación* ha de tener algo especial. Si se observa la figura 1, rápidamente se ve *de dónde salen* y el porqué de las igualdades de lados y de las relaciones entre los ángulos. Al *venir* de un pentágono, lógicamente, entra en juego la proporción áurea (figura 2). Quizás en algunos momentos desde las matemáticas se ha dado demasiada importancia a esta proporción. Sea como fuere, es cierto que se puede encontrar en innumerables diseños de todo tipo y de toda época. Además, en este caso, nos ofrece la posibilidad de trabajar con el número en su forma radical, siempre y cuando lo contextualicemos. Dar el número en decimal como resultado final está bien, pero podemos convencer al alumnado que en los cálculos intermedios es conveniente trabajar con la *versión* radical (con calculadora, claro) si no queremos perder exactitud.

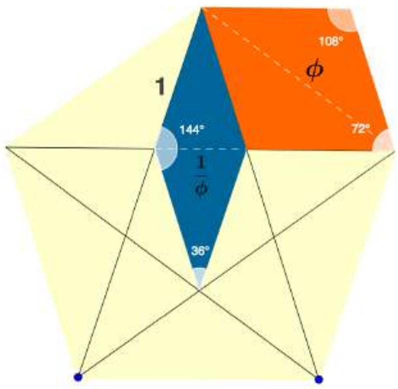


Figura 2

Un ejemplo rápido. En una joyería de Zaragoza *descubrimos* los pendientes y el broche de la figura 3. Si planteamos en el aula el problema de calcular los costes de fabricar en serie estos complementos, vamos a tener que calcular volúmenes y áreas de una forma lo más exacta posible, pues arrastrar un error significativo se traducirá en una diferencia importante de euros en el presupuesto final.


Figura 3

Ya adelantamos en la primera parte que en esta compararíamos las áreas de ambos rombos. La relación entre ellas es la proporción áurea. Esto nos abre dos opciones de ataque. Por una parte, los datos que aparecen en la figura 2 nos dan la posibilidad de hacer los cálculos de manera *exacta.* Por otra, el material manipulable nos permite medir directamente las piezas y hacer la división con decimales (con calculadora, claro). Como es lógico en este segundo cálculo no nos va a salir la proporción exacta. Dependerá del nivel del alumnado y los conceptos que queramos trabajar, para que nos inclinemos por una opción u otra. En todo caso, no son incompatibles y, en cursos *altos,* será conveniente *comprobar* que si manipulativamente lo hacemos muchas veces y calculamos su media, esta se acercará al valor *real.*

Vale, muy bien, ya sabemos algunas cosas de estos rombos, pero…, ¿qué interés podía tener Penrose en estos rombos? O bien, ¿qué andaba buscando para dar con ellos?

Vamos a contar una muy breve historia.

En un mosaico aperiódico no podemos encontrar una región fundamental que embaldose el plano por traslación. Por ejemplo, los hexágonos solo teselan de manera periódica, pero los triángulos pueden hacerlo periódica o aperiódicamente (figura 4) (Gardner, 1977).

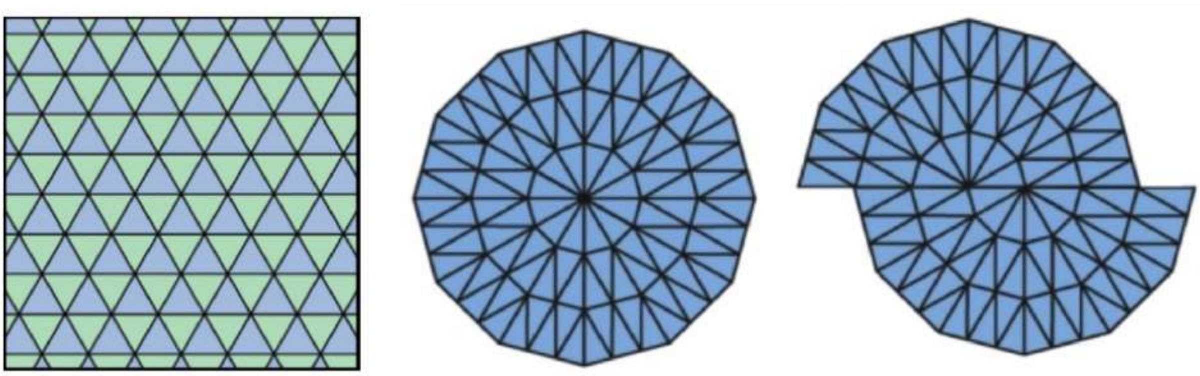

Figura 4

Los rombos de Penrose se enmarcan en la búsqueda que se emprendió en los años sesenta y setenta del siglo pasado, que consistía en encontrar una serie de losetas que solo teselaran el plano aperiódicamente. En 1961, Hao Wang quiso hallar un procedimiento que le permitiera decidir si un conjunto determinado de losetas, cuyas aristas estuvieran pintadas previamente, podría embaldosar el plano colocando juntas las aristas del mismo color. Si dicho procedimiento de decisión existiera, un conjunto de losetas, en esas condiciones, que embaldosara el plano aperiódicamente también lo haría periódicamente.

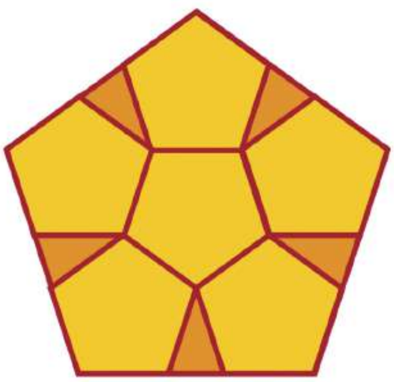

Figura 5

Pero, en 1964, Robert Berger demostró que la conjetura era falsa, aunque para ello se tuvo que apoyar en 20426 losetas. Posteriormente, él mismo redujo este número a 108. Tras varios intentos de seguir rebajando la cantidad de losetas, en 1976, Raphael M. Robinson lo dejó en seis. Y llegamos a Penrose.

Penrose partió de un pentágono que subdividió en otros seis pentágonos como se ve en la figura 5. Lógicamente, entre los pentágonos quedan unos triángulos isósceles. Aplicando la misma subdivisión a los seis pentágonos resultantes dos veces seguidas, observó que se generaban seis piezas que teselaban el plano de forma aperiódica. Siguió dándole más vueltas y con ayuda de algunos amigos matemáticos (por ejemplo, Conway), culminó el trabajo obteniendo sus muy conocidas hoy en día, cometa y dardo (figura 6). De aquí a los rombos el paso es sencillo, cuando te lo enseñan, claro (figura 7).

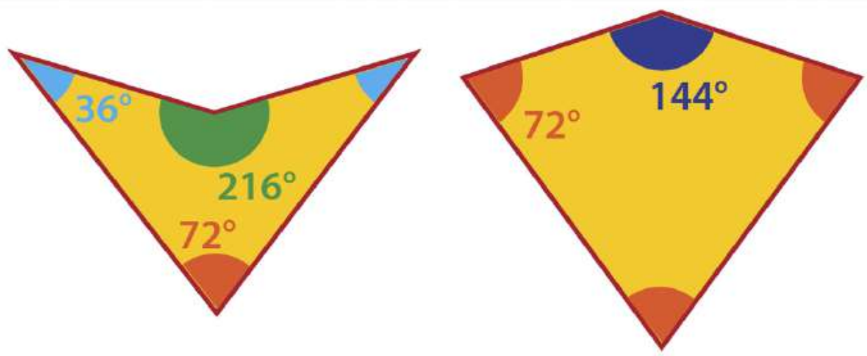


Figura 6

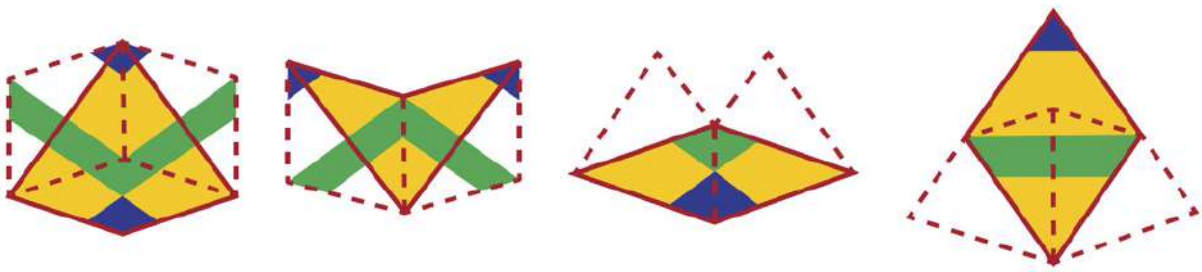

Figura 7

Evidentemente los rombos no teselan el plano aperiódicamente porque sí. Recordemos que Wang hablaba de establecer unas reglas, *pintando* las aristas. En la figura 7 aparecen los rombos pintados de tal forma que si hacemos coincidir los colores iguales cuando juntemos los rombos, lo que se obtiene obligatoriamente es un teselado aperiódico.

Los rombos se prestan a utilizarse comercialmente, como hemos visto un uso de los rombos en unos pendientes y un broche (figura 3). Así mismo, en las figuras 8, 9 y 10 aparecen otros lugares en los que se ha usado. Por eso, hasta que no tuvo atado el tema de las patentes Penrose no publicó sus resultados. Él había reducido ya en 1973 el número de piezas a seis, pero

Figura 8. Storey Hall, es parte del RMIT City campus of the Royal Melbourne Institute of Technology (RMIT University), en Melbourne (Asustralia)

se conoció antes el resultado de Robinson; incluso la reducción a dos data de 1974.

Tras realizar un breve recorrido por la historia de estas losetas, dejamos a los alumnos jugar con los dos rombos. Les proponemos que diseñen un mosaico que llene su pupitre con la condición de que sea aperiódico. Conviene recordar que aperiódico no significa que no deba seguir cierta pauta. El entusiasmo en la respuesta, como cabía esperar, es inversamente proporcional a la edad del alumnado, siendo los más pequeños los que con más afán quieren rellenar por completo el pupitre.

Con esto damos por cerrada esta segunda parte. En el próximo número de Entorno Abierto presentaremos la tercera y última entrega, donde haremos más hincapié en actividades con los rombos de Penrose (figuras 11 y 12).

Figura 9. Vista del pavimento de mármol «blanco Macael» de la Iglesia de Santa María, en Mahón

Figura 10. Stepney Green Underground Station2, Londres

Figura 11

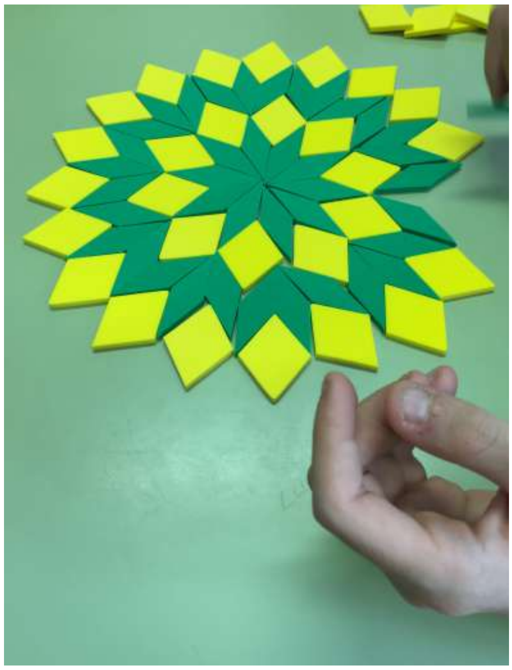

Figura 12

## Referencias bibliográficas

Alonso, R., y D. Sierra (2020): «Dos rombos y un destino (jornada de Reflexión)», Entorno Abierto, n.º 38, 7-10.

Brasó, E., P. Fornals, G. Ramellini y Q. Tarradas (2013), «¡Si Penrose lo supiera…!», Actas de las XV JAEM, Cartagena.

Gardner, M. (1977), «Los embaldosados de Penrose», Investigación y Ciencia, n.º 6.

Penrose, R. (1979/80), «Pentaplexity. A Class of Non-Periodic Tilings of the plane», Math. Intell., n.º 2, 32-37.