

DEFICIENCIAS EN EL TRAZADO DE GRÁFICAS DE FUNCIONES EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Matías Arce y Tomás Ortega

Este trabajo trata sobre el concepto de función, básico en el Análisis Matemático, y, en particular, su representación gráfica. Nos centramos en aspectos relacionados con la forma; es decir, el trazado de dicha representación. Analizamos las representaciones gráficas de funciones existentes en los cuadernos de matemáticas de estudiantes de varias aulas de 1° de Bachillerato. Encontramos deficiencias en el trazado de gráficas que se repiten en un alto número de estudiantes, relacionadas con los conceptos de función y asíntota, con el uso de las escalas en los ejes del diagrama cartesiano y con las características de algunas funciones. Además, discutimos sobre las limitaciones técnicas y las dificultades didácticas y cognitivas que pueden dar lugar a su aparición y hacemos algunas recomendaciones didácticas al respecto.

Términos clave: Bachillerato; Errores y dificultades; Función; Representación gráfica de una función; Trazado de gráficas

High school students' deficiencies in plotting graphs of functions

This paper deals with the concept of function, basic in mathematical analysis, and, in particular, with its graphical representation. We focus our attention on plotting graphs of functions. We analyzed the graphical representations of functions found in mathematical notebooks of high school students. We encountered several deficiencies related to the concepts of function and asymptote, the use of scales in diagram axes and the characteristics of some functions. Besides, we discuss the technical limitations and the didactic and cognitive difficulties that may promote their emergence, and, make some didactic recommendations for teachers.

Keywords: Errors and difficulties; Function; Graphical representation of a function; Graphing; High school

El trabajo que aquí se expone está encuadrado dentro de un proyecto de investigación más amplio que se está llevando a cabo en la Universidad de Valladolid y que estudia los cuadernos de matemáticas (de ahora en adelante, cuadernos) de los alumnos de 1º de bachillerato. Esta es una fuente información poco estudiada en Didáctica de la Matemática. El proyecto de investigación se enmarca dentro del bloque de Análisis Matemático. Busca establecer diferentes perfiles de elaboración y uso del cuaderno en los alumnos, y posibles relaciones entre estos perfiles y el rendimiento académico.

A lo largo del análisis de los cuadernos de los estudiantes participantes y aunque no era un objetivo de la investigación global, nos sorprendió la presencia de una gran cantidad de deficiencias, algunas muy frecuentes, en las representaciones gráficas de funciones. La importancia del concepto de función, básico en análisis matemático, y sus diferentes representaciones hace que consideremos relevante dar a conocer esta problemática y reflexionar sobre los motivos que pueden propiciarla, aunque creemos que son necesarias investigaciones específicamente dirigidas a conocer cuáles son las causas reales que provocan estas deficiencias y proponer situaciones adaptadas para su revisión y reajuste (Azcárate, 1995).

Para Castro y Castro (1997), las representaciones son “las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes” (p. 96). Estas pueden ser externas (con un soporte físico tangible) o internas (imágenes mentales formadas de los objetos matemáticos), relacionándose la generación de unas y otras a través del proceso de visualización. Duval (1993) señala que los sistemas de representación son el motor para el aprendizaje y el dominio de un concepto: el conocimiento de varios sistemas de representación y la capacidad para pasar de unos a otros enriquece la imagen o esquema conceptual de un concepto (“concept image” en términos de Tall y Vinner, 1981), la estructura cognitiva que un individuo asocia al mismo. Los alumnos suelen confiar en sus imágenes conceptuales para la resolución de problemas (Vinner, 1991), apareciendo, en ocasiones, conflictos entre la imagen conceptual y la definición del concepto, como en el estudio de Kidron (2011) sobre la asíntota horizontal.

En ocasiones, las representaciones elaboradas por los alumnos contienen errores, desajustes, que pueden revelar características o componentes erróneos. Los errores, normales y naturales en los procesos de enseñanza y aprendizaje, han sido objeto de investigación constante en Educación Matemática, aunque desde aproximaciones e intereses diferentes (Rico, 1995). El trabajo de Rico contiene algunas clasificaciones de errores propuestas por diferentes autores. Socas (2007) da una clasificación de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas que son las que, en definitiva, provocan los errores. Una de las cinco categorías que Socas establece se refiere a las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, que pueden estar ligadas a la naturaleza abstracta del

concepto, como entidad conceptual, o a la manipulación simbólica, a un nivel sintáctico. Este autor establece tres estadios progresivos de desarrollo en la adquisición de un sistema de representación: semiótico, estructural y autónomo.

Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) analizan los diferentes tipos de tareas y las ideas equivocadas (*misconceptions*) más recurrentes en los alumnos sobre las funciones y sus gráficas. Estudios sobre la interpretación, comparación o construcción de gráficas tanto en situaciones contextualizadas y no contextualizadas enfocan las concepciones de los estudiantes en estas cuestiones (Deulofeu, 1995; Dolores, 2004; Fabra y Deulofeu, 2000). Destacan ciertas tendencias significativas en el alumnado: la discretización de funciones (atención excesiva a puntos relevantes y su ubicación), la representación de funciones continuas sin ser continuas y, coincidiendo con Leinhardt et al. (1990), la falta de percepción de la noción de covariación, de dependencia entre las variables. Destacamos también el trabajo de Pecharromán (2008), donde se diseña un modelo de enseñanza para las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas.

OBJETIVOS

El estudio se centra en el sistema de representación gráfico de las funciones. Analizamos las representaciones externas del concepto que encontramos en los cuadernos de varios grupos de alumnos de Bachillerato; focalizamos la atención en su forma; y estudiamos si la representación gráfica refleja las propiedades y características de la función representada. Socas (2007), al hablar de errores, hace hincapié en la presencia de esquemas cognitivos inadecuados. En nuestro caso, pudiera ser que las incorrecciones encontradas en las representaciones gráficas de algunos de los alumnos no estuvieran provocadas por la presencia de esquemas inadecuados, sino por la poca atención o precisión al trazar la gráfica, no reproduciéndose adecuadamente las ideas y propiedades existentes, lo que puede ser fuente de dificultades para el aprendizaje (Ortega, 1998). De ahí que prefiramos utilizar la palabra *deficiencias* para estas incorrecciones, que pueden estar causadas por diferentes motivos.

Los objetivos planteados son los siguientes.

- ◆ Detectar las deficiencias más frecuentes en el trazado de las gráficas de funciones.
- ◆ Reflexionar sobre las limitaciones técnicas y las dificultades didácticas o cognitivas que pueden ocasionar estas deficiencias.
- ◆ Recomendar acciones didácticas que puedan paliar estas deficiencias.

MÉTODO

En el estudio participaron 29 estudiantes de 1º de bachillerato de dos centros distintos: un instituto público de un barrio de Valladolid (dos aulas, de la modalidad

Científico-Técnica y de Ciencias Sociales) y un colegio privado-concertado situado en las afueras de la ciudad (un aula de la modalidad Científico-Técnica). Las tres aulas, elegidas por disponibilidad, tenían un profesor de matemáticas diferente y un número reducido de estudiantes (10 por cada aula, aproximadamente). Todos ellos participaron en este estudio salvo una minoría que no tenía cuadernos.

En las aulas participantes, la docencia desarrollada fue la natural de los profesores, sin directrices ni intervención por parte del equipo investigador. Pedimos elaborar al docente de cada aula un diario de clase donde explicara brevemente la docencia desarrollada (desde el punto de vista tanto teórico como práctico). Los investigadores actuaron, algunos días, como observadores en el aula. De la información de diarios y observación extraemos que el bloque de Análisis Matemático sólo se completó en el aula de bachillerato de Ciencias Sociales. El tema de derivadas no se completó en las otras dos aulas. El docente del aula de bachillerato de Ciencias Sociales solía dejar tiempo en la propia clase para el trabajo del alumno en las tareas propuestas, que iba revisando y finalmente corregía de manera grupal. En las otras dos aulas, la docencia se centraba en el desarrollo de la teoría y la corrección de ejercicios. Los alumnos desarrollaban su trabajo personal fuera del aula casi siempre. Ninguno de los tres profesores revisaba los cuadernos de sus alumnos, salvo las revisiones visuales del primero, mientras trabajaban los alumnos en el aula.

Los documentos utilizados para realizar el análisis fueron las fotocopias de los cuadernos de los alumnos pertenecientes a este bloque. Utilizamos como técnica de investigación el análisis de contenido (Bardin, 1996; Krippendorff, 1990), técnica de interpretación de textos capaces de albergar un contenido que, leído e interpretado adecuadamente, nos permite conocer mejor diversos aspectos y fenómenos (Andréu, s.f.). La técnica es especialmente adecuada para analizar material poco estructurado (Krippendorff, 1990) como los cuadernos y su principal objetivo es pasar de la mera descripción de un texto a su interpretación y a la formulación de inferencias, teniendo en cuenta el contexto en que se desarrolla el análisis. Bardin llama unidad de registro a cada uno de los segmentos de contenido tomados como base para el análisis. En este trabajo, cada una de las representaciones gráficas existentes en las fotocopias de los cuadernos fue una unidad de registro. Estas representaciones gráficas fueron analizadas independientemente de que fueran construidas por los propios alumnos (en el sentido de Leinhardt et al., 1990, como generación de algo nuevo no existente) o transcritas de otro medio. Analizamos la corrección matemática de cada representación gráfica, ayudándonos de la información contextual (diarios y observación varios días en las aulas) para saber qué representaba cada una. En cada unidad de registro se indicaron las deficiencias más notorias en la representación gráfica, es decir, aquellas que entendimos que podían dar lugar a dificultades en la interpretación del comportamiento de la función a partir únicamente de la información de su represen-

tación gráfica. Utilizaremos, de aquí en adelante, el término deficiencia para referirnos a estas deficiencias en las representaciones gráficas.

Una vez completado el estudio de las deficiencias en cada unidad de registro, agrupamos aquellas más frecuentes en cuatro categorías diferentes (generadas de manera inductiva), que se explican en el próximo apartado.

DEFICIENCIAS FRECUENTES ENCONTRADAS EN EL ANÁLISIS

Sin pretender hacer una clasificación exhaustiva, presentamos las cuatro categorías diferentes en que agrupamos las deficiencias encontradas, y las ilustramos con escaneos de las representaciones gráficas de cuadernos donde se aprecia cada uno de los tipos de un modo más evidente.

Deficiencias relacionadas con el concepto de función

Una de estas deficiencias es el trazado de ramas que son práctica o totalmente verticales en funciones con ramas infinitas no asintóticas, como pueden ser las funciones polinómicas de segundo o tercer grado o las funciones exponenciales. Se observó en 18 de los 29 alumnos (un 62%). La figura 1 ilustra esta deficiencia en una función cuadrática.

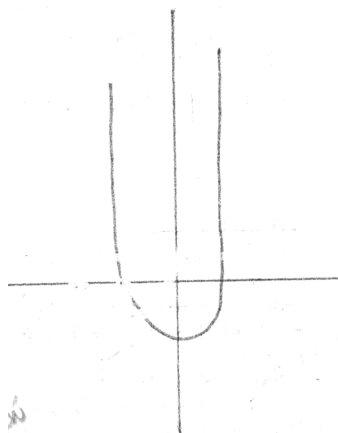


Figura 1. Ejemplo 1 de deficiencias relacionadas con el concepto de función

La aparición de este mismo comportamiento en ramas asintóticas en su proceso de aproximación a asíntotas verticales (ramas asintóticas totalmente verticales) fue frecuente, como indicaremos en el siguiente apartado. Dentro de esta categoría, encontramos también, en nueve alumnos (un 31%), funciones donde se representan valores del dominio con dos (o más) imágenes, al solaparse varios trazados en la representación gráfica de la función. Especialmente se produce al realizar las representaciones gráficas de funciones definidas a trozos, en las que los estudiantes ignoran el dominio de definición de cada parte. La figura 2 muestra este comportamiento, en el intervalo $[1,3]$.

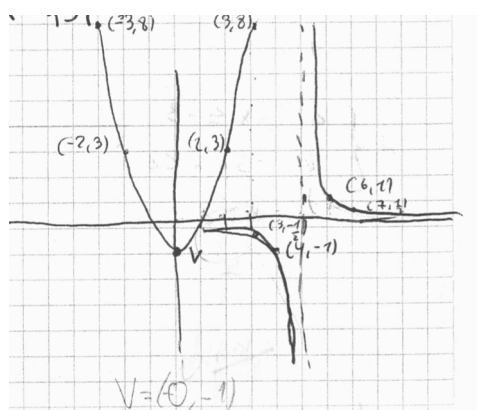


Figura 2. Ejemplo 2 de deficiencias relacionadas con el concepto de función

Deficiencias relacionadas con el concepto de asíntota

Encontramos la mayoría de las deficiencias de esta categoría en representaciones gráficas de funciones con ramas asíntóticas en las cuales no se produce un acercamiento progresivo a la asíntota horizontal o vertical. En 24 alumnos (un 83%) encontramos equidistancia entre la rama asíntótica y la asíntota vertical a partir de un determinado momento (deficiencia también relacionada con el concepto de función, como indicamos en el apartado anterior). El fenómeno de equidistancia es algo menos frecuente entre una rama asíntótica y una asíntota horizontal (en 18 alumnos, un 62%). Además, en 10 alumnos (un 34%) hay alguna representación gráfica donde llega a producirse, incluso, un alejamiento entre rama asíntótica y asíntota en la parte final de su trazado. La figura 3, donde se representa una hipérbola y sus asíntotas, muestra estos fenómenos.

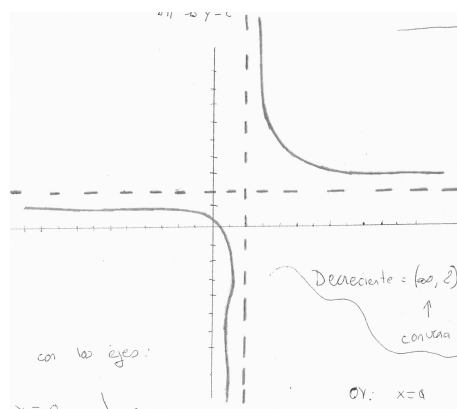


Figura 3. Ejemplo 1 de deficiencias relacionadas con el concepto de asíntota

Por otra parte, seis alumnos (un 21%) no dibujaron las asíntotas existentes en algunas de las representaciones gráficas de sus cuadernos, lo que provoca una dificultad para discernir el comportamiento de algunas ramas de la función a través de la visualización de la representación gráfica. La figura 4, donde no se dibuja la asíntota vertical existente en $x=2$, ilustra este fenómeno. Además, hay representaciones gráficas en cinco alumnos (un 17%) donde la rama asíntótica no da

sensación de ser tal: al dibujarse ésta demasiado corta, bien quedándose muy alejada de la asíntota o bien acercándose a ésta con dirección inadecuada, dando la sensación de que la rama cortaría a la asíntota si esta se prolongara.

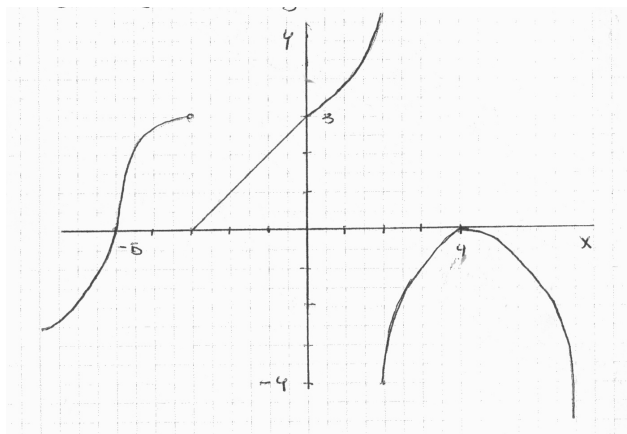


Figura 4. Ejemplo 2 de deficiencias relacionadas con el concepto de asíntota

Deficiencias relacionadas con la asignación y uso de escalas en los ejes cartesianos

Encontramos varias deficiencias de este tipo. En 12 alumnos (un 41%) encontramos un uso de escalas no proporcionales (distinta unidad a lo largo del eje) en alguno de los ejes de los gráficos existentes. Este problema se concentra en la clase de la modalidad de Ciencias Sociales, apreciándose en siete de sus ocho alumnos (un 87,5%), sobre todo en las representaciones gráficas asociadas con problemas de interpolación lineal (figura 5).

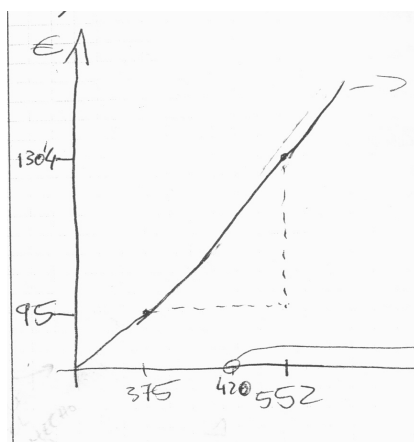


Figura 5. Ejemplo de deficiencias relacionadas con la asignación y uso de escalas en los ejes

La deficiencia más frecuente de este tipo (en 22 alumnos, un 76%) es la omisión de las escalas en los ejes coordenados en funciones donde sí son necesarias para una representación gráfica precisa (por ejemplo, para hacer la representación gráfica de una función dada su expresión algebraica). En su gran mayoría, la omi-

sión está relacionada con el uso implícito como unidad de la cuadrícula de las hojas del cuaderno. Observamos un uso, en general, poco crítico de las escalas en los alumnos, abusando de la escala con unidad el lado de la cuadrícula, aunque pueda ser más recomendable utilizar otras unidades para visualizar mejor las propiedades de la función.

Deficiencias relacionadas con las características de las funciones

Encontramos en 10 alumnos (un 34%) deficiencias en el dominio de funciones crecientes, como pueden ser $y = +\sqrt{x}$ o $y = \log(x)$, cuya representación gráfica en la parte final del trazado de la rama infinita no asintótica se realiza paralela al eje de abscisas o, incluso, decreciente. Es cierto que la tasa de crecimiento que tienen las dos funciones anteriores (en las que se detecta esta deficiencia) es cada vez más pequeña al aumentar x , pero un estancamiento tan pronunciado podría producir confusión, al observar la gráfica, sobre si la rama es infinita no asintótica o asintótica. En la figura 6 observamos esta deficiencia, además del mal uso de las escalas.

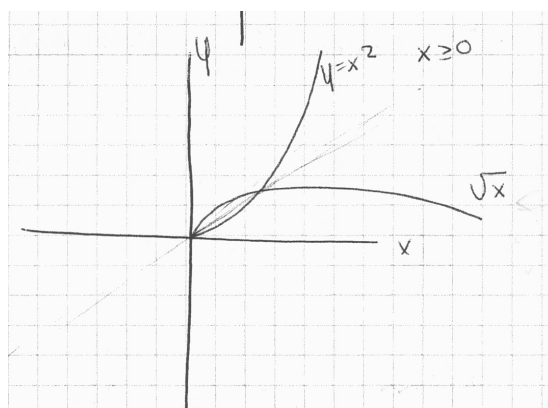


Figura 6. Ejemplo 1 de deficiencias relacionadas con las características de las funciones

Otra deficiencia fue la representación gráfica de funciones cuadráticas en las cuales la gráfica tiene una forma pronunciada de “pico” en el entorno del vértice de la parábola. Se detectó en ocho alumnos (un 28%), siete de ellos pertenecientes a una misma aula. En la figura 7 se evidencia esta deficiencia (en la parte superior), que puede dificultar la asimilación posterior del concepto de derivabilidad. Otro aspecto que puede oscurecer el comportamiento de la función en un entorno del vértice de la parábola es la representación del punto que marca el vértice con un tamaño demasiado grande.

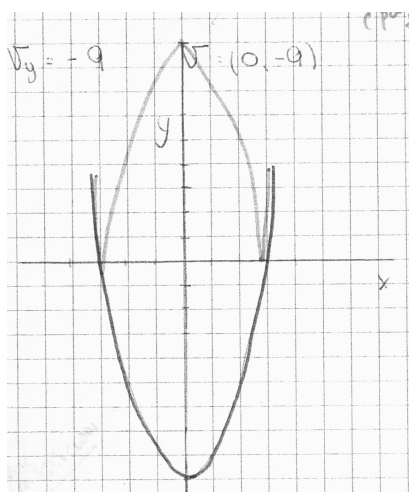


Figura 7. Ejemplo 2 de deficiencias relacionadas con las características de las funciones

En la figura 7 también podemos observar las deficiencias, detectadas en seis alumnos (un 21%), al representar la simetría respecto del eje de abscisas, de los valores negativos de una función f para representar $y = |f(x)|$.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Establecemos varias causas para la aparición de las deficiencias identificadas, de diferente naturaleza, que requerirían un tratamiento distinto para su superación.

- ◆ Pueden estar causadas por problemas del alumno al reproducir, a través de un deficiente trazado en la representación gráfica de la función sobre el papel, el comportamiento o propiedades de la función o sus elementos, que el alumno tiene correctamente interiorizados en sus esquemas conceptuales.
- ◆ Pueden reflejar un desconocimiento de cómo se traducen ciertas propiedades de la función en su representación gráfica.
- ◆ Pueden reflejar la existencia de errores en el esquema conceptual que el alumno tiene de conceptos como el de función, asíntota, o las características de determinados tipos de funciones.

El docente, a través de ciertos errores didácticos, puede provocar una mayor aparición de estas deficiencias. Por ejemplo, los picos en funciones suaves pueden proceder de dibujar en la pizarra las ramas infinitas no asíntóticas partiendo de un mismo punto (como el vértice en una parábola).

Una función puede determinarse completamente a través de su representación gráfica, pero existen dificultades, en algunas funciones, para visualizar o extraer cuál es su comportamiento o propiedades a través únicamente de su representación gráfica en papel; por ejemplo, para discriminar entre la existencia de

una rama asintótica o una rama infinita no asintótica en funciones como $y = \log(x)$. Estas dificultades pueden magnificarse con un trazado poco preciso, y pueden convertirse en un obstáculo si el alumno no tiene interiorizadas las propiedades de un tipo o modelo determinado de función en sus esquemas cognitivos, lo que le puede llevar, en ese caso, a deducir propiedades incorrectas al visualizar su representación gráfica. Como recomendación didáctica para los docentes, sugerimos plantear tareas donde se proponga la formulación de propiedades de una función a través únicamente de su representación gráfica, con la presencia de casos donde exista alguna de las dificultades comentadas, y que posibilite la aparición de estas limitaciones y su concienciación sobre ellas. Normalmente la representación gráfica de una función suele realizarse tras estudiar sus propiedades. Con los mismos objetivos comentados, proponemos también la utilidad de una visión retrospectiva, donde se estudie hasta qué punto la representación gráfica refleja las propiedades conocidas de la función, y si esta puede mejorarse. También pueden proponerse tareas por parejas donde se intercambien representaciones gráficas elegidas por el docente, y los alumnos tengan que indicar cuáles son sus propiedades (solo con la información de su representación gráfica) y compararlas con las propiedades reales de la función. Para disminuir la problemática puede ser recomendable el uso de símbolos gráficos que caractericen y ayuden a discriminar las propiedades, como el uso de la flecha en las ramas asintóticas.

Otra limitación del papel es la imposibilidad de realizar *zoom* en una representación gráfica para analizar el comportamiento de una función visualizando una zona más reducida o más amplia. Estas representaciones son posibles con el uso de Computer Algebra System (CAS), pero este puede provocar alguna dificultad para el estudio global de funciones por una pérdida de la idea de representación cartesiana (cuando desaparecen los ejes), pudiendo, también, crearse conflictos con la imagen mental de la gráfica que tiene el alumno (Leinhardt et al., 1990). Además, el efecto del pixelado al hacer un “zoom” excesivo puede causar problemas relacionados con los conceptos de función, asíntota y discretización. Todo ello hace necesaria una instrucción adecuada en su uso.

Las limitaciones del papel hacen que aumente la importancia de la elección de la escala y sus efectos en la construcción de gráficos. Coincidimos con Leinhardt et al. (1990) en que un gráfico no puede interpretarse completamente sin tener en cuenta sus escalas, apareciendo las tareas relacionadas con el escalado como un tipo de tareas a plantear a los alumnos en el estudio de funciones y su representación gráfica. Hemos constatado en este análisis que los alumnos no dedican demasiada atención a las escalas. Destacamos la aparición frecuente de gráficas sin escala, el uso abusivo de la escala implícita en la cuadrícula de la hoja y la utilización de escalas no proporcionales en algún eje (deficiencias relacionadas con la asignación y uso de escalas en los ejes cartesianos). Estas deficiencias pueden estar relacionadas con un déficit en la concepción global de las

funciones que tienen los alumnos, causado por un exceso en el uso de tablas de valores y la focalización de la gráfica en torno a esos puntos (problemas de discretización ya comentados en los antecedentes). Los cambios en la escala provocan ciertos cambios en el aspecto de una función, que hacen que el trazado y visualización de sus propiedades y características sea más o menos difícil. Las limitaciones del papel para la representación gráfica hacen necesario escoger una escala razonable que nos facilite ese trazado y visualización, evitando los efectos contraproducentes que puede tener la consideración de valores excesivamente grandes de abscisas y ordenadas (que hagan los trazados de las ramas infinitas no asintóticas prácticamente verticales u horizontales) o el uso de escalas con unidad demasiado pequeña al trazar ramas asintóticas (que favorece la aparición de fenómenos de equidistancia, deficiencias relacionadas con el concepto de asíntota). Por ello, recomendamos a los docentes proponer tareas donde los alumnos visualicen las diferencias que provoca la elección de escalas en la representación gráfica de una función y tareas donde, tras presentar una función verbalmente o a través de su expresión analítica, se discuta cuál es la escala más adecuada para su representación gráfica “óptima”. Este tipo de tareas también favorece la concepción global del concepto de función.

Debido a que el estudio de las representaciones gráficas no era inicialmente un objetivo de nuestra investigación global, no podemos determinar, con los datos recogidos, en qué casos nos encontramos ante errores de trazado, asociados a la traducción entre sistemas de representación o errores causados por esquemas cognitivos inadecuados. Consideramos necesario seguir investigando esta problemática, con investigaciones específicas centradas en ella (estudios en aulas con grabaciones y entrevistas a los alumnos) que nos permitan conocer las causas que provocan estas deficiencias y la creación de tareas o situaciones adaptadas que nos permitan reajustar los esquemas cognitivos inadecuados en cada caso.

AGRADECIMIENTOS

El primer autor de este trabajo es becario del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España (Referencia FPU12/02241).

REFERENCIAS

- Andréu, J. (s.f.). *Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada*. Descargado de <http://public.centrodeestudiosandaluces.es/pdfs/S200103.pdf>.
- Azcárate, C. (1995). Sistemas de representación. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 4, 53-61.
- Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido* (2ª ed.). Madrid, España: Akal.

- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y Modelización. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: ICE-Horsori.
- Deulofeu, J. (1995). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre distintas gráficas de funciones. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 4, 6-16.
- Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Relime*, 7(3), 195-218.
- Duval, R. (1993). Sémosis et Noésis. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas: Escuela Francesa* (pp. 118-144). México DF, México: Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.
- Fabra, M. y Deulofeu, J. (2000). Construcción de gráficos de funciones: continuidad y prototipos. *Relime*, 3(2), 207-230.
- Kidron, I. (2011). Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(6), 1261-1279.
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Barcelona, España: Paidós.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.
- Ortega, T. (1998). Algunos apuntes sobre el uso de gráficas cartesianas. En E. Lacasta. y J. Pascual (Eds.), *Actas del segundo simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 155-164). Pamplona, España: SEIEM.
- Pecharromás, C. (2008). *Aprendizaje de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Valladolid, España.
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez. y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática* (pp. 69-108). México DF, México: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). La Laguna, España: SEIEM.
- Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Este trabajo fue publicado originalmente como Arce, M. y Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de Bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 147-155). Bilbao, España: SEIEM.

Matías Arce
Universidad de Valladolid
arcesan@am.uva.es

Tomás Ortega
Universidad de Valladolid
ortega@am.uva.es

Recibido: Septiembre de 2013. Aceptado: Octubre de 2013.
Handle: <http://hdl.handle.net/10481/29577>