El razonamiento lógico

Kemel George
Grupo de Investigación
"Liceo Celedon", Santa Marta

Resumen.

Toda estudiante en educación media sabe las cuatro operaciones aritméticas. Pero seguramente ignora las cuatro operaciones lógicas y por ello, la posibilidad de ampliar su competencia en matemáticas. El enfoque que expondremos en este *Ensayo* es que es un imposible teórico y un error didáctico separar la actividad lógica del contexto matemático; de allí, la necesidad del razonamiento lógico, que es un sistema de conocimiento en el que concurren el lenguaje, las reglas de inferencia y el contexto. Para llevar a cabo lo que nos proponemos mostrar, usaremos el lenguaje del cálculo proposicional; las reglas de inferencia de la Deducción Natural de Gentzen[1] y el contexto es el que provee las estructuras matemáticas y la lengua natural. El entendimiento de una conveniente combinación de representaciones de nuestras operaciones mentales mediante el método conocido como deducción natural, nos puede hacer más competentes en el arte de razonar lógicamente y en la comprensión de nuestra propia lengua.

Palabras claves. Razonamiento. Deducción natural. Inferencia. Introducción y eliminación de conectivos. Teorema. Contexto. Interpretación y lengua natural[2].

Una prueba inconclusa

Para explicar lo que queremos decir, iniciemos con un ejemplo. Al estudiante se le propone que pruebe: "Si un número natural termina en cinco o en cero es divisible por cinco". La siguiente es una posible respuesta. Todo número natural $X \in \mathbb{N}$ se expresa en notación decimal en la forma

$$X = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$$

Como a_0 es el último digito de la expresión decimal, si el número termina en cinco, $a_0 = 5$. Además, $10^n = \left(2 \cdot 5\right)^n = 2^n \cdot 5^n$. Factorizando,

$$X = 5\left(\cdot a_n \left(2^n \cdot 5^{n-1}\right) + a_{n-1} 5 \cdot \left(2^n \cdot 5^{n-2}\right) + \cdots + a_1\ 2\ + 1\right) = 5 \cdot Y$$

Ha sido probado que si $a_0 = 5$, X es divisible por $(\ )$.

Ahora suponemos $a_0 = 0$; es sencillo verificar que nuevamente 5 es factor común, por lo que se cumple en cualquiera de los dos casos.

Aparentemente, la prueba ha finalizado. Pero, nos preguntamos: ¿Qué es lo que hemos probado? Hemos probado dos enunciados separados entre sí.: "Si un número termina en cinco, es divisible por cinco", y "si un número termina en cero, es divisible por cinco".

[1]Gerhard Karl Erich Gentzen (November 24, 1909, Greifswald, Germany – August 4, 1945, Prague, Czechoslovakia).

[2] Agradezco al profesor Xavier Caicedo sus sugerencias de correcciones y aclaraciones, que he atendido y han permitido mejorar este *Ensayo*.

Aquí hay dos premisas: "el número termina en cinco" y "el número termina en cero" y una conclusión: "el número es divisible por cinco".

Pero el enunciado dice: "Si un número natural termina en cinco o en cero es divisible por cinco". Desde el punto de vista lógico, la expresión "el número natural termina en cinco o cero" es una tercera premisa distinta de las otras dos, por lo que no es evidente que podamos hacer caso omiso de las dos premisas y quedarnos con la tercera. La prueba es incompleta.

Esta idea la podemos expresar mejor, si se simboliza con letras los enunciados. Asignemos a las letras p, r, q las siguientes frases: $p \equiv$ "El número termina en 5"; $r \equiv$ "El número termina en 0"; $q \equiv$ "El número X es divisible por 5". El enunciado se simboliza con la fórmula $p \vee r \rightarrow q$. De acuerdo a este simbolismo, hemos probado por separado las dos fórmulas $p \rightarrow q$ y $r \rightarrow q$, pero lo que tenemos que probar es la fórmula $p \vee r \rightarrow q$ y esto no es simple, ya que habría que probar la deducción lógica:

$$p \rightarrow q, r \rightarrow q \vdash p \vee r \rightarrow q$$

El sistema de deducción natural DN le da una explicación satisfactoria a este fenómeno de interpretación de una fórmula lógica en una estructura aritmética. Obsérvese que lo que buscamos no es otra cosa que la aplicación de la regla de inferencia *prueba por casos,* que en la notación del sistema DN se describe con la figura, que más adelante estudiaremos:

$$\frac{p \vee r \quad \begin{array}{c} p \\ \vdots \\ \overline{q} \end{array} \quad \begin{array}{c} r \\ \vdots \\ \overline{q} \end{array}}{q}$$

Esta regla dice: dada la disyunción $p \vee r$, si de la premisa p se deduce q y de la premisa r se deduce q, se hace caso omiso de ambas premisas y de $p \vee r$ se deduce q. Sólo por la aplicación de una regla que simboliza la operación mental prueba por casos, podemos afirmar que, efectivamente, hemos probado la fórmula $p \vee r \rightarrow q$ en la estructura de los número naturales. Con la intervención de la lógica, la prueba ha sido completada.

Un segundo ejemplo. Como es sabido, en lógica proposicional, la afirmación: "Si dos más dos es cuatro, la tierra gira alrededor del sol" se considera verdad, porque tanto el antecedente como el consecuente son verdades. Y la proposición "Si dos más dos es cinco, la tierra gira alrededor del sol" también es verdad, porque aunque el antecedente es falso, el consecuente es verdadero, aunque el lector sabe perfectamente que es poca o nula la relación que tiene la órbita de la tierra con el resultado de sumar dos más dos.

Consideremos ahora la siguiente situación. Sostengo un huevo en la mano y observo que estoy a un metro del piso y nada interfiere entre el huevo y el piso. Afirmo: "Si suelto el huevo, el huevo se rompe". No sabemos de la verdad o falsedad de la afirmación porque si hacemos $p \equiv$ "Suelto el huevo"; $q \equiv$ "El huevo se rompe"; la fórmula $p \rightarrow q$ no siempre es verdadera. Así, si no suelto el huevo p es falso, y el enunciado es verdad, aunque el huevo no se rompa.

Pero otra cosa es lo que ocurre en la vida cotidiana. En efecto, estoy convencido que si suelto el huevo, el huevo se rompe, esto es, acepto como verdadera la proposición, sin que dependa de la verdad o falsedad del antecedente y el consecuente. Y esto no obedece a ningún sistema lógico-matemático, sino al hecho de que en el lenguaje natural también puedo razonar lógicamente.

El lenguaje natural, no sólo es lenguaje, sino *contexto* (ya que las *palabras* tienen *significado* que el hablante *interpreta*), y goza de reglas de inferencia *propias* con las cuales puedo razonar lógicamente. Como esto es ciertamente controvertible, esta parte vamos a considerarla complementaria al *Ensayo*, pero no por ello, menos importante, y más adelante será objeto de nuestra exploración.

El *Ensayo* está organizado de la siguiente forma: vamos a precisar los conceptos de lenguaje formal y contexto. Luego exhibiremos el sistema de deducción natural que nos conduce a razonar lógicamente; con ello probaremos los más conocidos teoremas lógicos del cálculo proposicional. Mostraremos que al interpretar el lenguaje formal, se deducen las *Tablas de Verdad*. Y haremos algunas observaciones sobre el razonamiento lógico en el lenguaje natural.

Lenguaje y contexto

El contexto es el dominio de las estructuras, los modelos del mundo, las interpretaciones, la semántica, el significado, los contenidos, los hechos, los datos, la validez y la verdad de nuestras afirmaciones. El contexto es el universo del discurso. Son ejemplos de contexto: el derecho, la ingeniería, la economía, la pedagogía, la matemática (estructuras aritméticas, algebraicas, geométricas, los conjuntos), la medicina, la religión o la vida cotidiana.

El lenguaje es el dominio de los símbolos, el alfabeto, la sintaxis, las conexiones formales, las palabras, los enunciados, las proposiciones, las fórmulas, el sistema, la argumentación como forma del razonamiento, la inferencia, las deducciones, las inducciones, las abducciones, la prueba de los teoremas. Son ejemplos de lenguaje formal: el cálculo proposicional, el cálculo de predicados, los lenguajes de primer orden; y de lenguaje natural, el castellano, el inglés, el ruso, el chino, o cualquiera otra lengua materna.

La lógica matemática nos ejercita teóricamente en razonar, separando y uniendo el lenguaje del contexto; o mejor, en formular las verdades del contexto desde el lenguaje, en interpretar el lenguaje en su contexto y construir modelos con los que exhibimos ejemplos del mundo.

En este Ensayo, nos concentraremos en el cálculo proposicional como lenguaje formal, y en las estructuras matemáticas, como contexto.

Verdad, correspondencia y hecho

> Decir de lo que es que no es, o de lo que no es que es, es falso, mientras que decir de lo que es que es, o de lo que no es que no es, es verdadero." Aristóteles, Metafísica.

La proposición es aquel enunciado del que puede decirse que es verdadero o falso en un contexto determinado. El cálculo proposicional le asigna símbolos o letras a la proposición, y asume que esta asignación tiene un valor de verdad o de falsedad en su contexto.

Pero, ¿qué hace que una proposición, en un determinado contexto, sea verdadera? No hay una respuesta final a esta pregunta. O mejor, hay muchas respuestas o teorías de la verdad. Una de ellas, la que aquí adoptaremos, es la teoría de la correspondencia (originada en Aristóteles, arriba citado): la verdad de una proposición es una cuestión de correspondencia con los hechos. Según Alfred Tarski[3], que es una autoridad en la materia, el enunciado "la nieve es blanca"[4] es verdad, ya que, en la vida cotidiana, todos los que hemos visto la nieve sabemos que es blanca.

Nosotros vamos a ser muy amplios en la representación simbólica de frases, dado que no es propiamente el objeto del sistema que nos ocupa. Un criterio muy práctico es que los símbolos del cálculo proposicional que hagan *referencia* a oraciones, frases, enunciados, proposiciones en cualquier contexto o fórmulas de estructuras matemáticas, <u>expresen ideas claras de lo que queremos decir</u> sobre hechos, circunstancias o situaciones de la vida, sea esta la vida académica, profesional, laboral o simplemente la vida cotidiana. Ejemplos de tales frases son las siguientes, las cuales son admisibles: "El Alcalde cometió un delito"; "La Antártida es un continente"; "dos elevado a la once es número primo", "la tierra gira alrededor de la luna"; "si uno más uno es tres, entonces Dios existe", "las gotas de lluvia son de chocolate", "aquí hay un drógolo y el actual Rey de Francia es calvo[5]". Además de la referencia a Russell, el lector puede profundizar en escritos que hicieron historia[6].

El sistema de deducción natural

El eminente lógico matemático Gerhard Gentzen, en 1932, a la edad de 22 años, introdujo el sistema de deducción natural[7] en el que los símbolos y conectivos lógicos (incluido el símbolo para el absurdo), al seguir ciertas reglas de unirse y separarse (introducción y eliminación de los conectivos), constituyen razonamientos primarios de los cuales se derivan nuevas leyes, por la propia naturaleza de la inferencia[8]. Gentzen mismo declara en

---

[3] A. Tarski, "La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica," A Parte Rei, *Revista de Filosofía*, Traducción Paloma García Abad.
[4] G. Boole, *An Investigation of The Laws of Thought* (1854). Dover Pub. Inc., New York, 1958.
[5] B. Russell, *On denoting*, Revista MIND, 1905.
[6] A. J. Ayer, *Lenguaje, Verdad y Lógica*, Ediciones Martínez, Roca, S.A. Barcelona, 1971.
[7] G. Gentzen, *Investigations into Logical Deduction* (1934), obra citada.
[8] J. Piaget, E. W. Beth, Epistemología Matemática y Psicología, CRITICA, Grupo Editorial Grijalbo, 1980.

Con el teorema se economiza el razonamiento. Con esto queremos decir que en el procedimiento lógico, no es necesario probar todo lo que se enuncia, ya que cualquier fórmula con el *status* de teorema se puede introducir en cualquier momento, sin modificar el procedimiento, porque es una deducción que no depende de las premisas.

Teoremas a la lata

Los siguientes son los teoremas lógicos más conocidos. Algunos los incluimos por su utilidad, y otros, sólo por curiosidad.

<u>*Teorema*</u>. $\left(\alpha \rightarrow \left(\beta \rightarrow \gamma\right)\right) \rightarrow \left(\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma\right)$

La prueba está en notación secuencial, para que el lector establezca, como ejercicio, el *status* de cada fórmula en el razonamiento. Así, en el caso siguiente de dos renglones, las dos primeras fórmulas son premisas, las dos siguientes son deducciones por eliminación de la conjunción, las dos siguientes por eliminación del condicional, y en las que siguen, se eliminan las premisas y se introduce el condicional.

$\alpha \wedge \beta,\ \alpha \rightarrow \left(\beta \rightarrow \gamma\right),\ \alpha,\ \beta,\ \beta \rightarrow \gamma,\ \gamma,$

$\left[\alpha \wedge \beta\right], \alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma,\ \left[\alpha \rightarrow \left(\beta \rightarrow \gamma\right)\right] \vdash \left(\alpha \rightarrow \left(\beta \rightarrow \gamma\right)\right) \rightarrow \left(\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma\right)$

Ejercicio. Pruebe que la fórmula recíproca $\left(\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma\right) \rightarrow \left(\alpha \rightarrow \left(\beta \rightarrow \gamma\right)\right)$ también es teorema, por lo que el bicondicional $\left(\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma\right) \leftrightarrow \left(\alpha \rightarrow \left(\beta \rightarrow \gamma\right)\right)$ es teorema.

<u>*Teorema.*</u> $\left(\alpha \rightarrow \neg\beta\right) \rightarrow \neg\left(\alpha \wedge \beta\right)$

Prueba.

1 $\quad \left(\alpha \rightarrow \left(\beta \rightarrow \gamma\right)\right) \rightarrow \left(\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma\right)$ *Teorema*

2 $\quad \left(\alpha \rightarrow \left(\beta \rightarrow @\right)\right) \rightarrow \left(\alpha \wedge \beta \rightarrow @\right)$ $\gamma \equiv @$

$\left(\alpha \rightarrow \neg\beta\right) \rightarrow \neg\left(\alpha \wedge \beta\right)$

<u>*Teorema.*</u> $\left(\left(\alpha \rightarrow \beta\right) \wedge \neg\beta\right) \rightarrow \neg\alpha$

Prueba.

1 $\quad \left(\alpha \rightarrow \beta\right) \wedge \left(\beta \rightarrow \gamma\right) \rightarrow \left(\alpha \rightarrow \gamma\right)$ *Teorema (Silogismo hipotético)*

2 $\quad \left(\alpha \rightarrow \beta\right) \wedge \left(\beta \rightarrow @\right) \rightarrow \left(\alpha \rightarrow @\right)$ $\gamma \equiv @$

---

3 $\quad \left(\ \rightarrow\ \right) \wedge \neg\ \ \rightarrow \neg$ $\beta \rightarrow \alpha \equiv \neg\beta$

Pasamos ahora a enunciar una a una, las reglas de inferencia primarias, que son la base del razonamiento lógico.

Conjunción

La regla de inferencia consiste en la introducción y eliminación del conectivo *conjunción*. Ya dijimos que el conectivo $\wedge$ en castellano se lee "y". La idea es extremadamente simple. Dados α, β, la expresión $\alpha \wedge \beta$ simboliza una operación mental, que aceptaremos como deducción natural. En otras palabras, dadas las fórmulas α, β, la naturaleza del conectivo $\wedge$ es tal, que por el solo hecho de colocar $\alpha \wedge \beta$, y se lee: "α y β", esta expresión es *fórmula* de la deducción natural de α, β. La figura correspondiente es:

1	α	Premisa
2	β	Premisa
	$\alpha \wedge \beta$	$\wedge I[1,2]$

Esta conjunción puede ser tanto $\alpha \wedge \beta$ como $\beta \wedge \alpha$. Obsérvese que en la línea de la conclusión se coloca $\wedge I$, el símbolo de la regla de inferencia, que se lee "introducción de la conjunción en las líneas 1 y 2". La línea horizontal se lee: "por tanto", o "se deduce", o "en consecuencia". Cada vez que coloquemos la rayita horizontal, la leeremos *Ergo*, en homenaje a Descartes, quien introdujo el más corto razonamiento existente: '*cogito ergo sum*' que es un razonamiento con una sola premisa ('pienso') y una sola conclusión ('existo'). El nexo entre los dos es el *Ergo*.

Sea α "la tierra es un planeta" y β "la luna es satélite de la tierra". Razonamos así (y vamos a considerarlo nuestro primer razonamiento primario):

1	"La tierra es un planeta";	Premisa
2	"La luna es satélite de la tierra",	Premisa

Ergo,

"La tierra es un planeta y la luna es satélite de la tierra"; $\wedge I[1,2]$

o si se prefiere:

Por tanto,

"la luna es satélite de la tierra y la tierra es un planeta".

La siguiente regla es la inversa de la anterior, pues lo que hace es eliminar el conectivo $\wedge$. La regla es: siempre que se tenga la conjunción de dos premisas, se deduce cualquiera de las dos. Le corresponde la figura,

1	$\alpha \wedge \beta$	Premisa
	α	$\wedge E[1]$

Obsérvese que en la línea de la conclusión se coloca $\wedge E[1]$, el símbolo de la regla de inferencia, que se lee "Eliminación de la conjunción en la línea 1". La formula deducida puede ser tanto α como β, y se puede hacer uso de cualquiera de ellas.

Ejercicio. Deduzca la ley conmutativa $\alpha \wedge \beta \quad \vdash \quad \beta \wedge \alpha$

Disyunción

La regla de inferencia siguiente consiste en la introducción y eliminación del conectivo $\vee$ denominado *disyunción*. Esta regla nos da cuenta de la naturaleza de la disyunción: siempre que se tenga una premisa, deduzco la disyunción de ella con cualquier otra fórmula,

1	α	Premisa
	$\alpha \vee \sigma$	$\vee I[1]$

Aquí, la regla se representada con el símbolo $\vee I$ que se lee "introducción de la disyunción". El símbolo σ no es una premisa, sino cualquier fórmula del lenguaje. Esta deducción puede ser tanto a la derecha, $\alpha \vee \sigma$, que se lee: "α ó σ", como a la izquierda, $\alpha \vee \sigma$. "Hoy es lunes". *Por tanto*, infiero que "Hoy es lunes o martes".

Pero también, si "tengo dolor de muelas", razonamos así (y vamos a considerarlo un razonamiento lógico): "tengo dolor de muelas", *Por tanto,* "ha dejado de llover o tengo dolor de muelas".

Una notación usada en los textos de lógica, consisten en colocar las premisas y la conclusión en línea horizontal, separando ambas con el símbolo $\vdash$. Al procedimiento se le llama *derivación*. En el caso de la regla de inferencia de introducción de la conjunción, es $\alpha, \boldsymbol{\beta} \vdash \alpha \wedge \beta$, mientras que en el de la introducción de la disyunción, es $\alpha \vdash \alpha \vee \sigma$. Usaremos ambas notaciones y de vez en cuando, diremos que la última fórmula ha sido *derivada* de las primeras. Por supuesto, el símbolo $\vdash$ puede verse, pero no puede leerse (salvo que le llamemos *ergo*, como es nuestra sugerencia).

Ejercicios. Explique lo correcto o incorrecto de cada uno de los siguientes razonamientos lógicos (o lo que es lo mismo, fíjese en lo correcto o no, de las siguientes derivaciones):

$$\alpha, \alpha \wedge \alpha \quad \vdash \quad \alpha$$

$$\alpha, \beta, \alpha \wedge \beta, (\alpha \wedge \beta) \wedge \beta, ((\alpha \wedge \beta) \wedge \beta) \wedge \alpha \quad \vdash \quad \beta \wedge \alpha$$

$$\alpha, \beta, \alpha \wedge \beta, (\alpha \wedge \beta) \wedge \beta, \delta \quad \vdash \quad \delta \vee (\beta \wedge \alpha)$$

$$\alpha \wedge \beta, \beta, \delta \vee \beta, \alpha \wedge (\beta \vee \alpha) \quad \vdash \quad \delta$$

$$\alpha, \beta, \sigma, \alpha \wedge \beta, (\alpha \wedge \beta) \wedge \sigma, \alpha \vee \delta, \sigma \wedge (\alpha \vee \delta) \quad \vdash \quad \sigma$$

$$\alpha \wedge \beta, \beta, \delta \vee \beta, \alpha \wedge (\beta \vee \alpha) \qquad \alpha \vee \beta$$

Prueba por casos

La siguiente es la regla que Gentzen denomina "distinción de casos" (también se puede llamar 'prueba por casos'). Es la regla de eliminación de la disyunción, y la tratamos por separado, dada la importancia que tiene en la deducción natural y porque la hemos colocado como primer ejemplo en el *Ensayo*. Al observar cuidadosamente la regla, lo que hace es eliminar la disyunción, como vemos a continuación,

1	$\alpha \vee \beta$	Premisa
2	α	[Premisa]
$\vdots$		
n	σ	Deducción
$n+1$	β	[Premisa]
$\vdots$	σ	Deducción
	σ	$\vee E$

Ambas premisas llevan a la misma conclusión y son eliminadas como premisas (lo que se indica colocando corchetes o tachándolas). En la tercera columna se coloca el *status*[12] de la fórmula. Nótese que el *status* de $\alpha \vee \beta$ es distinto que el de σ. La primera es una premisa, la segunda es una deducción.

<u>*Ejercicio.*</u> Compare la anterior notación con el simbolismo de Gentzen:

$$\dfrac{\alpha \vee \beta \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots\end{matrix}}{\sigma} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\beta]\\ \vdots\end{matrix}}{\sigma}}{\sigma}$$

Introducción del condicional

La siguiente regla trata de la introducción del condicional $\rightarrow$ como conectivo del lenguaje. La regla dice que si en una colección de premisas, al introducir α se deduce β, podemos suprimir α como premisa y deducir el condicional $\alpha \rightarrow \beta$, que se lee: "α entonces β". La letra α se llama el 'antecedente' y β, el 'consecuente'. La supresión de α como premisa se indica $[\alpha]$. La figura correspondiente es:

1	$[\alpha]$	[Premisa]
$\vdots$		
n	β	Deducción

[12] R. Duval. *El funcionamiento cognitivo y la comprensión de los procesos matemáticos de la prueba,P.* Boero Ed. , (2007)

$$\alpha \rightarrow \beta \qquad \rightarrow I$$

La expresión $\rightarrow$, indica el orden de la regla, que no es el mismo que el de la expresión $\beta \rightarrow \alpha$ llamada inversa o recíproca, porque en la regla del condicional, el antecedente es la premisa y el consecuente, la conclusión. Obsérvese que en la línea de la conclusión se coloca $\rightarrow I$, el símbolo de la regla de inferencia, que se lee *introducción del condicional*.

En la deducción: $\alpha, \alpha \wedge \alpha \quad \vdash \quad \alpha$, el *status* de α es distinto en la primera fórmula (premisa) que en la segunda y tercera (deducciones). Al aplicar la introducción del condicional y eliminar la premisa, obtenemos la deducción $\rightarrow$.

<u>Ejercicio.</u> De la inferencia $\alpha \wedge \beta \quad \vdash \quad \alpha$ logre la deducción $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$. ¿Cuantas premisas quedan en el último razonamiento?

Ejemplo: de la deducción "te has ganado la lotería. *Por tanto*, te has ganado la lotería" obtenemos el condicional "si te has ganado la lotería entonces te has ganado la lotería". Es una deducción, sin que sepamos si la persona se ha ganado o no se ha ganado la lotería. Y la fórmula $E = mc \rightarrow E = mc$ ha sido deducida sin necesidad de conocimiento alguno de la teoría especial de la relatividad.

<u>Ejercicio.</u> Pruebe la ley asociativa $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \quad \vdash \quad \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.

La introducción del condicional es una regla muy sutil y es seguramente una de las reglas de inferencia más utilizadas (y menos comprendidas) en la deducción matemática: podemos deshacernos de las premisas, siempre que ellas pasen como antecedente del condicional.

<u>Ejercicio.</u> Confirme lo correcto de la siguiente inferencia:

$$\alpha, \beta, \alpha \wedge \beta, \beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta) \quad \vdash \quad \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha \wedge \beta)$$

Modus ponens

La siguiente regla es la inversa de la introducción del condicional, pues se trata de eliminar el conectivo $\rightarrow$. Esta regla de *eliminación del condicional* se denomina universalmente el *modus ponens* y dice así: siempre que se tengan las premisas α y $\rightarrow$, se deduce β. Su figura es,

1	α	Premisa
2	$\rightarrow$	Premisa
	β	$\rightarrow E$

Obsérvese que el *modus ponens* es representado con el símbolo $\rightarrow E$. De las dos premisas, ha sido removido el antecedente de la segunda. El *modus ponens* es la más

$\vdash$

importante regla de inferencia del mundo y su origen data de miles de años. Ejemplo. “Si me gano la lotería entonces recorreré América”; “Me he ganado la lotería”, *Por tanto*, “Recorreré América”. “Si coloco en OFF el interruptor de la habitación, el bombillo se apaga”; “Coloco en OFF el interruptor de la habitación”, *Por tanto*, “El bombillo se apaga”. “Todo número que finaliza en 0 es divisible por 5”; “720 es un número que finaliza en 0”, *Por tanto*, “720 es divisible por 5”.

En notación secuencial, el *modus ponens* se escribe $\alpha, \alpha \to \beta \vdash \beta$. Cuidado: en el caso $\alpha, \beta \to \alpha \vdash \beta$, no hay regla alguna (la primera premisa es el consecuente del recíproco de $\alpha \to \beta$), y la no observancia de esto es fuente de muchos errores, como en el siguiente: “Todo número que finaliza en 0 es divisible por 5”; “720 es divisible por 5”, *Por tanto*, “720 es un número que finaliza en 0”; esto es un razonamiento incorrecto, aunque efectivamente, 720 finaliza en 0.

Ejercicios.

1. Compruebe que el *dilema constructivo* $\alpha \vee \beta, \alpha \to \sigma, \beta \to \sigma \quad \vdash \quad \sigma$ es una aplicación de la *prueba por casos* y el *modus ponens*, apoyado en el siguiente razonamiento:
$$\alpha \vee \beta, \alpha, \beta, \alpha \to \sigma, \beta \to \sigma, \sigma \quad \vdash \quad \sigma$$
2. En el siguiente *dilema constructivo*, pruebe la *derivación*
$$\alpha \vee \beta, \alpha \to \sigma, \beta \to \delta \quad \vdash \quad \sigma \vee \gamma$$

Contradicción y reducción al absurdo

Hemos presentado un par de reglas –*introducción* y *eliminación*- para cada uno de los conectivos lógicos (conjunción, disyunción, condicional). Ahora nos ocuparemos de las reglas de inferencia que introducen y eliminan la negación.

Para ello, apelaremos al símbolo @, del cual hemos dicho es que es el símbolo que representa el absurdo. Y precisamente, tal símbolo nos permite definir la negación $\neg\alpha$ de cualquier fórmula α como el sinónimo del condicional $\alpha \to @$. Esto quiere decir que donde se vea $\neg\alpha$ se lee ‘no α’ y se coloca $\alpha \to @$ como sinónimo de $\neg\alpha$. Cuando ocurre que una fórmula es sinónimo de la otra, se utiliza el símbolo $\equiv$ (se lee “quiere decir”) porque una *sustituye* a la otra. Así, podemos escribir (ojalá no haya confusión): $\neg\alpha \equiv \alpha \to @$. Puede parecer curioso que la negación de una fórmula sea el nombre de otra fórmula, pero veremos que esto es de gran utilidad.

El que la negación de una fórmula se defina como un condicional que tiene como antecedente la fórmula y como consecuente el absurdo, es posible porque @ es un símbolo del lenguaje y ya sabemos introducir -y eliminar- el condicional. La negación de una fórmula tiene diversas lecturas: $\neg\alpha$ se puede leer ‘no α’, ‘no es verdad que α’, o ‘no es el caso que α’, etc. En caso que se produzca una segunda negación, el símbolo $\left(\quad \alpha\right)$ quiere decir $\left(\alpha \rightarrow @\right) \rightarrow @$. En otras palabras, $\neg\left(\neg\alpha\right) \equiv \left(\alpha \rightarrow @\right) \rightarrow @$.

De acuerdo a la sustitución $\neg\alpha \equiv \alpha \rightarrow @$ tenemos que $\alpha \wedge \neg\alpha \equiv \alpha \wedge \left(\alpha \rightarrow @\right)$. Cuando tengamos una fórmula como $\alpha \wedge \neg\alpha$ diremos que dicha fórmula es una *contradicción*.

He aquí nuestro primer resultado de aplicar la regla del *modus ponens;* dada una contradicción $\alpha \wedge \left(\alpha \rightarrow @\right)$ tenemos la siguiente *derivación*,

1	$\alpha \wedge \left(\alpha \rightarrow @\right)$	Premisa
1	α	$\wedge E[1]$
2	$\alpha \rightarrow @$	$\wedge E[1]$
	$@$	$\rightarrow E$

Esta es una deducción muy importante (no es una regla primitiva). Se razona así: toda contradicción nos conduce al absurdo. Y esto nos permite introducir la regla de inferencia del absurdo (o *regla de la contradicción*). Dice que del absurdo se deduce cualquier fórmula:

1	$@$	Premisa
	α	$@I$

De la fórmula de arriba, tenemos que, una vez obtenida una contradicción, podemos deducir cualquier fórmula:

1	$\alpha \wedge \left(\alpha \rightarrow @\right)$	Premisa
1	α	$\wedge E[1]$
2	$\alpha \rightarrow @$	$\wedge E[1]$
3	$@$	$\rightarrow E$
	σ	$@I$

Ejemplo. “La vida tiene y no tiene sentido”; *Por tanto*, $2+2=5$.

Es notable que de estas reglas elementales se pueda inferir una regla universal, denominada *reducción al absurdo* o también *reductio ad absurdum,* cuando de una premisa se deduce una contradicción:

1	α	Premisa
$\vdots$		
n		Deducción
$n+1$	β	$\wedge E[n]$

$n+2$	$\beta \to @$	$\wedge E[n]$
$n+3$	$@$	$\to E[n+1, n+2]$
	$[\alpha]$	[Premisa]

$$\alpha \to @ \qquad \to I[1, n+3]$$

Pero $\alpha \to @$ es precisamente $\neg\alpha$, luego, si una premisa conduce a una contradicción, se elimina la premisa y se deduce la negación de la premisa original!. La regla de de reducción al absurdo es una derivación de la aplicación de la regla de inferencia de eliminación del condicional. Siguiendo la tradición, se le denota como RAA.

Ejercicio. Aplique la regla RAA para probar que no existe un número primo que sea el mayor de todos. Sugerencia: dada la proposición "P es el número primo mayor de todos", sea $P!$ el producto de todos los primos en orden ascendente, desde 2 hasta P. Pruebe que $P!+1$ es número primo.

No se debe confundir aplicar la regla de la contradicción (que es una regla de inferencia) que aplicar la regla de reducción al absurdo RAA (que es una *derivación* pues resulta de una aplicación de otra regla de inferencia) porque en la RAA, se elimina la premisa y se deduce su negación, mientras que en la primera, se deduce cualquier fórmula.

Ejercicio. Deduzca $\neg\sigma$ de las premisas $\sigma \to \gamma$, $\sigma \to \neg\gamma$

Hemos llegado al final de las reglas de inferencia (introducción y eliminación de los cuatro conectivos lógicos) que constituyen la base del sistema de la deducción natural. Con estas pocas reglas, vamos a razonar lógicamente, sin hacer referencia a contexto o significado alguno. Aunque en algunos casos hemos ilustrado como se aplican las reglas y hemos mencionado unos contextos, es el momento de una intervención sistemática, general, del método y la didáctica de la deducción natural.

Procedimiento deductivo

Se llama *procedimiento deductivo* a la forma didáctica de representar el razonamiento lógico. También se le llama *argumentación* y en otros textos, *inferencia o derivación.* Llamaremos *prueba* al procedimiento que nos conduce a una deducción.

Dados cuatro símbolos $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ y dos fórmulas $\alpha \to \beta$, $\sigma \to \gamma$ probaremos que de ellas se infiere $\alpha \wedge \sigma \to \beta \wedge \gamma$.

Línea	*Fórmula*	*Status*
1	$\alpha \to \beta$	Premisa
2	$\to$	Premisa

4	$\alpha \wedge \sigma$	Premisa
5	α	$\wedge E[4]$
6	σ	$\wedge E[4]$
7	β	$\rightarrow E[1,5]$
8	γ	$\rightarrow E[2,6]$
9	$\beta \wedge \gamma$	$\wedge I[7,8]$
10	$[\alpha \wedge \sigma]$	[Premisa]
	$\alpha \wedge \sigma \rightarrow \beta \wedge \gamma$	$\rightarrow E[\quad]$

Y efectivamente, hemos deducido que de la conjunción de los antecedentes de los condicionales se deduce la conjunción de sus consecuentes. En notación secuencial, hemos probado $\alpha \quad \beta, \sigma - \quad \gamma \vdash \alpha \quad \sigma \quad \beta \quad \gamma$.

Silogismo disyuntivo

El siguiente razonamiento lógico se denomina silogismo disyuntivo y se expresa así: dada una disyunción $\alpha \vee \beta$ y la negación de una de las dos fórmulas de la disyunción, se deduce la otra fórmula. La prueba (por casos) es la siguiente:

Línea	*Fórmula*		*Status*
1	$\alpha \vee \beta$		Premisa
2	$\neg\beta$		Premisa
3		$[\beta]$	[Premisa]
4		@	Contradicción
5		α	Deducción
6		$[\alpha]$	[Premisa]
7		α	Deducción
	α		

Obsérvese que de ambas premisas se deduce la fórmula α, por lo que se eliminan las premisas (*prueba por casos*) que conducen a α. En notación secuencial: $\alpha \vee \beta, \neg\beta \quad \vdash \alpha$.

Hemos colocado en la figura las nuevas premisas un poco hacia la derecha, antes de la columna de *status*, como un recurso didáctico, para mostrar que son premisas adicionales.

Ejemplos de silogismo disyuntivo: "El tren llega a la estación a tiempo o la mercancía se pudre"; "Pero la mercancía no se ha podrido", *Por tanto,* "El tren llega a la estación a tiempo". "Todo número racional es fracción o es entero"; "Pero el número 0.24 no es entero", *Por tanto*, "0.24 es fracción".

Doble negación

Como $\neg\alpha$ no es otra cosa que $\alpha \to @$, la fórmula $\neg\neg\alpha$ es $(\alpha \to \quad) \to$. Tenemos,

1	α	Premisa
2	$\alpha \to @$	Premisa
3	$@$	$\to E[1,2]$
4	$[\alpha \to @]$	[Premisa]

____

$(\alpha \to @) \to @$ RAA

Hemos probado la deducción $\alpha \quad \vdash \quad \neg(\neg\alpha)$.

El silogismo hipotético

Admitamos como premisas dos condicionales $\alpha \to \beta$, $\beta \to \gamma$, en las que el consecuente de la primera es el antecedente de la segunda. Se trata de lograr un procedimiento con el que se deduzca el condicional $\alpha \to \gamma$, cuyo antecedente es el antecedente de la primera y el consecuente es el consecuente de la segunda. El procedimiento es el siguiente:

1	$\alpha \to \beta$	Premisa
2	$\beta \to \gamma$	Premisa
3	α	Premisa
4	β	$\to E$ (1, 3)
5	γ	$\to E$ (2, 4)

6	$[\alpha]$	[Premisa 3]

	$\alpha \to \gamma$	$\to I$ (6, 5)

En notación secuencial, $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \vdash \alpha \to \gamma$

Ley distributiva

La regla de inferencia *prueba por casos* nos permite descifrar el procedimiento por el cual se prueba la ley distributiva del cálculo proposicional, que es el caso en que la disyunción ‘distribuye’ la conjunción: $(\alpha \wedge \beta) \vee \sigma \to (\alpha \vee \sigma) \wedge (\beta \vee \sigma)$:

Línea	*Fórmula*	*Status*
1	$(\alpha \wedge \beta) \vee \sigma$	Premisa
2	$\alpha \wedge \beta$	Premisa
3	α	$\wedge E[1]$
	β	$\wedge E[1]$
4	$\alpha \vee \sigma$	$\vee I$ (2)
5	$\beta \vee \sigma$	$\vee I$ (2)
6	$(\alpha \quad \sigma) \quad (\beta \quad \sigma)$	$\wedge I$ (3, 4)
7	σ	Premisa
8	$\alpha \vee \sigma$	$\vee I$ (6)
9	$\beta \vee \sigma$	$\vee I$ (6)
10	$(\alpha \vee \sigma) \wedge (\beta \vee \sigma)$	$\wedge I$ (7, 8)
11	$(\alpha \vee \sigma) \wedge (\beta \vee \sigma)$	*Prueba por casos*
12	$[(\alpha \wedge \beta) \vee \sigma]$	[Premisa]

$(\alpha \wedge \beta) \vee \sigma \to (\alpha \vee \sigma) \wedge (\beta \vee \sigma)$ $\quad \to E[12,10]$

El teorema lógico

Hemos llegado a la parte capital del *Ensayo*: el concepto de *teorema*. El método de la deducción natural permite eliminar todas las premisas en el procedimiento, de modo que la deducción produzca fórmulas sin el condicionamiento de las premisas. En otras palabras, se producen fórmulas *autónomas*.

Este tipo de fórmulas que se generan independientemente de las premisas, adquieren una importancia fundamental en la lógica matemática: tales fórmulas se denominan *teoremas*. Son teoremas lógicos, o sea, válidos para todo contexto o estructura matemática, y así deben ser llamados, para distinguirlos de los teoremas propios de cada estructura (Teoremas de Euclides o de Pitágoras, en geometría; teorema de Fermat, en aritmética; teorema de Euler en análisis).

Repetimos: un teorema es una fórmula que se deduce de un procedimiento en el que se eliminan las premisas. El procedimiento por el cual el teorema se deduce, se denomina *prueba del teorema*. En el sistema de la deducción natural, la deducción de teoremas es distinta a la deducción por axiomas, que es el llamado método axiomático y del cual hay excelentes textos que remitimos al lector[13].

Cuando la fórmula σ es teorema, se escribe $\vdash \alpha$ indicando con ello que no hay premisas. También se usa la expresión $\varnothing \vdash \alpha$ donde ambas indican que la fórmula ha sido deducida "sin premisas".

He aquí un primer ejemplo de teorema generado por una deducción. Obsérvese como se deduce la fórmula $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$. En lo sucesivo, siempre que no genere confusión y para ahorrar espacio, usaremos la forma secuencial para la prueba de teoremas.

<u>Teorema</u> $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$. Prueba. $\alpha \wedge \beta, \alpha, \left[\alpha \wedge \beta\right] \vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$

La única que tiene *status* de premisa ha sido eliminada, por lo que la fórmula $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$ se ha deducido sin que esté condicionada por las premisas. Este resultado se escribe $\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$. Esto y no otra cosa quiere decir la frase "$\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$ es un teorema".

La regla de inferencia denominada *introducción del condicional*, nos permite probar de manera extremadamente sencilla varios teoremas, pues si tenemos el procedimiento $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_i, \cdots, \alpha_n \vdash \beta$, aplicando dicha regla reiteradamente, podemos trasladar cada una de las premisas al lado derecho de la secuencia obteniendo $\alpha_1, \alpha_2, \left[\alpha_i\right], \cdots, \alpha_n \vdash \alpha_i \rightarrow \beta$, y así sucesivamente, obteniendo condicionales.

[13] Xavier Caicedo F. *Elementos de Lógica y Calculabilidad*, Una Empresa Docente, Universidad de los Andes, 1989.

Así, de la regla de inferencia $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$ hemos obtenido el teorema $\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$. De modo similar, las siguientes fórmulas son teoremas obtenidos de reglas de inferencia y de procedimientos anteriormente probados, en los que se eliminaron las premisas, y se escriben así.

Ejercicio. Cada una de las siguientes fórmulas son teoremas, obtenidos mediante la regla de inferencia de introducción del condicional. Pruébelo.

$\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

$\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$

$\vdash \alpha \rightarrow \alpha \vee \sigma$

$\vdash \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$

$\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \wedge \alpha$

$\vdash \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$

$\vdash (\alpha \wedge \beta) \vee \sigma \rightarrow (\alpha \vee \sigma) \wedge (\beta \vee \sigma)$

$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$

Este es el momento de introducir el familiar conectivo denominado *doble condicional*, cuyo símbolo es $\leftrightarrow$. Dada la fórmula $\alpha \rightarrow \beta$ el doble condicional $\alpha \leftrightarrow \beta$ es la conjunción $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$de una fórmula y su recíproca. Cuando se vea $\alpha \leftrightarrow \beta$, se entenderá que es un sinónimo de la fórmula $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$. Por la regla de introducción de la conjunción, es claro que si las fórmulas α, β son teoremas, también $\alpha \leftrightarrow \beta$ es teorema. Así, la fórmula $\alpha \wedge \beta \leftrightarrow \beta \wedge \alpha$ es teorema. Un doble condicional también se llama *bicondicional.*

Ejercicio. Explique por qué la fórmula $(\alpha \wedge \beta) \vee \sigma \leftrightarrow (\alpha \vee \sigma) \wedge (\beta \vee \sigma)$ es teorema.

La economía del teorema

Algunos lectores se sorprenderán de que el uso de la palabra *teorema* sea un poco diferente en lógica que en matemáticas. Y así es. En matemáticas se usa la palabra 'teorema' para referirnos a un enunciado propio del contexto en consideración que se va a demostrar o probar, por ejemplo, teoremas en álgebra, geometría o análisis. Por, eso se les llama teoremas *propios*.

En lógica, el teorema es una fórmula del lenguaje formal y precisamente en esto reside su importancia, porque el teorema lógico es universalmente válido, ya que se aplica en toda área de la matemática cuyo lenguaje se formalice lógicamente, y no depende del modelo matemático que se le considere.

Con el teorema se economiza el razonamiento. Con esto queremos decir que en el procedimiento lógico, no es necesario probar todo lo que se enuncia, ya que cualquier fórmula con el *status* de teorema se puede introducir en cualquier momento, sin modificar el procedimiento, porque es una deducción que no depende de las premisas.

Teoremas a la lata

Los siguientes son los teoremas lógicos más conocidos. Algunos los incluimos por su utilidad, y otros, sólo por curiosidad.

<u>*Teorema*</u>. $\left(\alpha \to \left(\beta \to \gamma\right)\right) \to \left(\alpha \wedge \beta \to \gamma\right)$

La prueba está en notación secuencial, para que el lector establezca, como ejercicio, el *status* de cada fórmula en el razonamiento. Así, en el caso siguiente de dos renglones, las dos primeras fórmulas son premisas, las dos siguientes son deducciones por eliminación de la conjunción, las dos siguientes por eliminación del condicional, y en las que siguen, se eliminan las premisas y se introduce el condicional.

$\alpha \wedge \beta,\ \alpha \to \left(\beta \to \gamma\right),\ \alpha,\ \beta,\ \beta \to \gamma,\ \gamma,$

$\left[\alpha \wedge \beta\right], \alpha \wedge \beta \to \gamma,\ \left[\alpha \to \left(\beta \to \gamma\right)\right] \vdash \left(\alpha \to \left(\beta \to \gamma\right)\right) \to \left(\alpha \wedge \beta \to \gamma\right)$

Ejercicio. Pruebe que la fórmula recíproca $\left(\alpha \wedge \beta \to \gamma\right) \to \left(\alpha \to \left(\beta \to \gamma\right)\right)$ también es teorema, por lo que el bicondicional $\left(\alpha \wedge \beta \to \gamma\right) \leftrightarrow \left(\alpha \to \left(\beta \to \gamma\right)\right)$ es teorema.

<u>*Teorema.*</u> $\left(\alpha \to \neg\beta\right) \to \neg\left(\alpha \wedge \beta\right)$

Prueba.

1	$\left(\alpha \to \left(\beta \to \gamma\right)\right) \to \left(\alpha \wedge \beta \to \gamma\right)$	*Teorema*
2	$\left(\alpha \to \left(\beta \to @\right)\right) \to \left(\alpha \wedge \beta \to @\right)$	$\gamma \equiv @$
	$\left(\alpha \to \neg\beta\right) \to \neg\left(\alpha \wedge \beta\right)$	

<u>*Teorema.*</u> $\left(\left(\alpha \to \beta\right) \wedge \neg\beta\right) \to \neg\alpha$

Prueba.

1	$\left(\alpha \to \beta\right) \wedge \left(\beta \to \gamma\right) \to \left(\alpha \to \gamma\right)$	*Teorema (Silogismo hipotético)*
2	$\left(\alpha \to \beta\right) \wedge \left(\beta \to @\right) \to \left(\alpha \to @\right)$	$\gamma \equiv @$
3	$\left(\ \to\ \right) \wedge \neg\ \ \to \neg$	$\beta \to \alpha \equiv \neg\beta$

Recordemos que en cada prueba con notación secuencial, el lector debe establecer el *status* de cada fórmula en el razonamiento, así: cuales son premisas, deducciones, introducción o eliminación por reglas de inferencia, o teoremas.

En el siguiente teorema, obsérvese como se intercambia el *status* de cada una de las fórmulas, donde algunas son premisas, y luego, las mismas, son deducciones:

Teorema. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

Prueba:

$$\alpha, \beta, \alpha \rightarrow \alpha, \alpha, [\beta], \beta \rightarrow \alpha, [\alpha] \vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

Una aplicación del teorema anterior es la siguiente: sea σ una fórmula cualquiera y Π el símbolo de una fórmula que sea teorema. Entonces:

Teorema. $\sigma \rightarrow \Pi$

Prueba:

1	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$	*Teorema*
2	$\Pi \rightarrow (\sigma \rightarrow \Pi)$	$\alpha \equiv \Pi$
3	Π	*Teorema*

$\sigma \rightarrow \Pi$

Teorema. $\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$

Prueba:

$$\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta), \alpha, \alpha \rightarrow \beta, \beta, [\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)], \alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$$

En el teorema anterior, reemplazando $\beta \equiv @$ obtenemos una aplicación al siguiente,

Teorema. $\underline{\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)}$

Prueba:

1	$\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$	*Teorema*
2	$\alpha \wedge (\alpha \rightarrow @) \rightarrow @$	$\beta \equiv @$
3	$\wedge \neg \quad \rightarrow @$	

___

$\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

Ejercicio. Pruebe el teorema $(\alpha \wedge \beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$

Teorema. $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$

Prueba.

$\alpha,\ \alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma,\ \beta,\ \gamma,\ [\alpha],\ \alpha \to \gamma,$

$[\beta \to \gamma],\ (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma),\ [\alpha \to \beta] \vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$

Finalizamos con un par de pruebas. Una de ellas, consideradas una de las reglas más útiles de la lógica: el *modus tollendo tollens*. Esto ocurre cuando se sustituye en el teorema anterior el símbolo @ en todas las ocurrencias de la fórmula γ.

Teorema. $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

Prueba:

1	$(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$	*Teorema*
2	$(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to @) \to (\alpha \to @))$	$@ \equiv \gamma$

___

$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$.

Ejercicio. Pruebe el teorema recíproco $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$ del *modus tollendo tollens*. Esto quiere decir que la fórmula $(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \to \neg\alpha)$ es teorema.

Ejercicio. Confirme la doble deducción $\alpha \to \beta \vdash \neg\alpha \vee \beta$ y $\neg\alpha \vee \beta \vdash \alpha \to \beta$ precisando, en los siguientes procedimientos secuenciales, el *status* de cada fórmula:

1. $\alpha \to \beta,\ \alpha,\ \beta \quad \vdash \quad \neg\alpha \vee \beta$
2. $\neg\alpha \vee \beta,\ \alpha,\ \neg(\neg\alpha),\ \beta,\ [\alpha] \quad \vdash \quad \alpha \to \beta$

Esto indica que el condicional $\alpha \to \beta$ es equivalente a la disyunción $\neg\alpha \vee \beta$. Lo que quiere decir que la fórmula $\alpha \to \beta \leftrightarrow \neg\alpha \vee \beta$ es teorema.

Tertium non datur

El *tertium non datur* (*una tercera cosa no se da*) tiene origen en Aristóteles, y es conocido como el principio del *tercero excluido*. *O se es o no se es*. Su fórmula lógica es $\alpha \vee \neg\alpha$ y el lector recordará que *Shakespeare* la volvió eterna con su sentencia: *to be or not to be, that is the question*.

La fórmula $\alpha \vee \neg\alpha$ <u>no es deducible de ninguna de las reglas de inferencia del sistema</u>, como el propio Gentzen lo aclara, afirmando que esto es lo propio de la *lógica intuicionista*. Por ello, (siempre que aceptemos una lógica no intuicionista) se introduce como nueva regla de inferencia primitiva la *doble negación*: $\neg\neg\alpha \vdash \alpha$. Como anteriormente hemos probado que la fórmula $\alpha \to \neg\neg\alpha$ es teorema, la introducción de la nueva regla de inferencia equivale a aceptar que $\neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha$ es teorema.

En este caso, es posible derivar el *tertium non datur* así:

<u>*Teorema*</u>. $\alpha \vee \neg\alpha$
Prueba:

1	$\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$	Premisa
2	α	Premisa
3	$\alpha \vee \neg\alpha$	$\vee I[2]$
4	$(\alpha \vee \neg\alpha) \wedge \neg(\alpha \vee \neg\alpha)$	$\wedge I[1,3]$
5	@	Absurdo
6	$\neg\alpha$	RAA 2
7	$\alpha \vee \neg\alpha$	$\vee I[6]$
8	$(\ \ \vee \neg\ \ ) \wedge \neg(\ \ \vee \neg\ \ )$	$\wedge I$ (1, 7)
9	@	Absurdo
10	$(\alpha \vee \neg\alpha)$	Doble negación
11	$\neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \leftrightarrow (\alpha \vee \neg\alpha)$	Π

$\alpha \vee \neg\alpha$

<u>*Ejercicios.*</u>

Pruebe las leyes de Morgan: $\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$, $\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$.

La Interpretación en contexto

Hemos dicho que el sistema de la deducción natural consiste en un lenguaje, unas reglas de inferencia y un contexto. Vamos a concentrarnos en el contexto. Al fijar un contexto, el lenguaje es interpretado, o sea, adquiere significado. En el lenguaje del cálculo proposicional, la interpretación es la asignación de un contenido de verdad o de falsedad a los símbolos y fórmulas lógicas del lenguaje en el contexto considerado. Esto es denominado interpretación *bivalente,* o sea, de dos valores, que es a la que aquí son limitaremos.

En lógica bivalente se le asigna un "valor de verdad o falsedad" a la fórmula interpretada, y esto es posible, porque en cada contexto, tenemos criterios para decidir si dicha fórmula es verdadera o falsa en su contexto. Se llama *tautología* a toda fórmula cuyo valor de verdad es verdadero, independiente de la interpretación considerada.

La asignación del valor de verdad o falsedad de una interpretación, la denotaremos, como es usual, con la letra f de función, así que si α es una fórmula, se asigna a cada fórmula uno sólo de dos valores $f(\alpha)=V$, ó $f(\alpha)=F$ tales que:

1. Siempre ocurre que $f(@)=F$ y si $f(\alpha)=F$ entonces $f(\neg\alpha)=V$, siendo esta última la condición del *tercero excluido* (si es verdad la formula negada, el valor de la fórmula original es falso).

Así, por ejemplo, al interpretar las siguientes fórmulas en distintos contextos,

1. $\alpha \equiv$ La recta que pasa por el centro del círculo lo divide en dos partes iguales.
2. $\beta \equiv$ Hay infinitos números primos.
3. $\delta \equiv$ La función asigna a cada valor del dominio, dos valores en el rango.
4. $\sigma \equiv$ La luna es satélite de la tierra.
5. $\lambda \equiv$ El incesto es un delito en todas las sociedades
6. $@ \equiv 1 = 2$

Podemos convenir que $f(\alpha)=V$, $f(\beta)=V$, $f(\delta)=F$, $f(\sigma)=V$, $f(\lambda)=F$, (el valor de verdad del símbolo @ del absurdo, siempre es $f(@)=F$). Lo que no es nada claro es que podamos afirmar el valor de verdad de la expresión de fórmulas como $(\alpha \wedge \delta) \rightarrow \lambda$. Esta fórmula interpretada se lee: "Si la recta que pasa por el centro del círculo lo divide en dos partes iguales y la función asigna a cada valor del dominio, dos valores en el rango, entonces el incesto es un delito en todas las sociedades". Tampoco es evidente el valor de verdad de $f((\alpha \rightarrow \sigma) \vee (\neg\beta \wedge (\lambda \rightarrow \delta)))$. En este último caso, dada la fórmula $(\alpha \rightarrow \sigma) \vee (\neg\beta \wedge (\lambda \rightarrow \delta))$, una pregunta obvia es: ¿podemos saber si es verdad o falsa de acuerdo a la verdad o falsedad de cada una de los símbolos que la componen?

Validez

Dado una interpretación en un sistema de deducción natural, la interpretación se denomina válida, si se cumple que en todo procedimiento deductivo del sistema, <u>de premisas verdaderas se obtiene una conclusión verdadera</u> (recordemos que en el sistema de deducción natural, las premisas no tienen un valor de verdad, por lo que, una vez se tiene una interpretación, las premisas pueden ser verdaderas o falsas, ya que la deducción no depende tanto del valor de verdad de las premisas, como de la regla de inferencia que se usa).

Se ha erigido en principio universal de la lógica, desde Aristóteles, que de premisas verdaderas no puede deducirse otra cosa que una conclusión verdadera (en otras palabras, que la interpretación sea válida). Estamos interesados en las interpretaciones que siguen este principio y en dilucidar, lo que haremos enseguida, qué es lo que hace que una interpretación sea o no sea válida.

Tablas de verdad

Casi todos los textos de lógica introducen las familiares tablas de verdad asignándole un valor de verdadero o falso a cada uno de los conectivos, obteniéndose un resultado como el siguiente:

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \to \beta$	$\neg \alpha$
V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	
F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	

Además de que parece un método arbitrario, no es muy didáctico que digamos, ya que el estudiante se limita a memorizarlos, sin encontrar una relación entre los conectivos distinta a que así lo parece indicar el significado de las letras “y”, “o”, “si, entonces”, y “no” en el lenguaje natural.

El siguiente es un resultado fundamental de nuestro *Ensayo*: dada una interpretación válida, toda fórmula tendrá una y una sola asignación de verdad o falsedad. En otras palabras, en la deducción natural, las familiares tabla de verdad son las que son y no puede haber otras.

Para probar este resultado fundamental, fijamos una interpretación válida (de premisas verdaderas se deducen conclusiones verdaderas), y aplicamos cada una de las reglas de inferencia del sistema (teniendo en cuenta que todo lo que se infiere es verdad, siempre que las premisas sean verdad). El procedimiento se escribe en forma secuencial.

Iniciemos con la regla de introducción de la conjunción, $\alpha, \beta \vdash \alpha \wedge \beta$. Asumimos que ambas premisas son verdad. Esto quiere decir que $f(\alpha)=V$, $f(\beta)=V$; por tanto, $f(\alpha \wedge \beta)=V$; por otra parte, por la regla de eliminación de la conjunción, $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$. De modo que si $\alpha \wedge \beta$ es verdad, ambas premisas son verdad. En todo otro caso, $\alpha \wedge \beta$ es falso. Resumiendo, toda interpretación de la conjunción cumple necesariamente,

α	β	$\alpha \wedge \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
V	F	F

Esta se denomina *Tabla de Verdad* de la conjunción. En los textos escolares de lógica, la tabla se define así, sin más explicación y aquí hemos confirmado que no hay otra posibilidad para toda interpretación válida de la conjunción.

A continuación, vamos a construir la *Tabla de Verdad* de la disyunción. Aplicamos la regla de introducción de la disyunción $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$. Esto dice que si una premisa es verdad, la disyunción es verdad. O sea que ya tenemos tres valores en los que $\alpha \vee \beta$ es verdad. La pregunta es: ¿Qué pasa si tanto α como β son falsas? Ahora aplicamos el silogismo disyuntivo $\alpha \vee \beta, \neg\beta \vdash \alpha$, que es un razonamiento y, por tanto, se aplica la interpretación válida. Asumamos que el valor de verdad de α y β es falso pero que la disyunción $\alpha \vee \beta$ es verdad. Como β es falso, $\neg\beta$ es verdad, luego α es verdad, contrario a lo supuesto. O sea que la disyunción no puede ser verdad. La *Tabla de Verdad* de la disyunción es

α	β	$\alpha \vee \beta$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La *tabla de verdad* del condicional $\alpha \rightarrow \beta$ es la siguiente. Dada la interpretación válida, tenemos la doble deducción $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg\alpha \vee \beta$, $\neg\alpha \vee \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Esto quiere decir que cuando la premisa es verdad, la deducción es verdad, o sea que el valor de verdad $f\left(\alpha \rightarrow \beta\right)$ es idéntico al valor de verdad $f\left(\neg\alpha \vee \beta\right)$. Por tanto, *la tabla de verdad* del condicional es idéntica a *la tabla de verdad* de la disyunción, lo que quiere decir que,

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Por último, para calcular la *tabla de verdad* de la negación, recordemos que toda interpretación cumple con lo siguiente: si $f(\alpha)=F$ tenemos que $f(\neg\alpha)=V$. Supongamos ahora que $f(\alpha)=V$. Apliquemos la regla de eliminación del condicional, a un consecuente absurdo. Tenemos que, $\alpha, \alpha \rightarrow @ \vdash @$. Cuando la interpretación es válida, si las dos premisas son verdad, $f(@)=V$, lo que es absurdo, luego $f(\neg\alpha)=F$ es falso. Tenemos así que,

α	$\neg\alpha$
V	F
F	V

No queremos finalizar nuestro *Ensayo* sin antes explorar la posibilidad, varias veces enunciada, de establecer un vínculo entre el razonamiento lógico matemático que acabamos de exponer, y el familiar razonamiento que producimos los hablantes del lenguaje natural.

¿Qué es razonar lógicamente?

Entre todas las teorías y métodos que exponen y explican el razonamiento humano, se destaca uno que ha sido considerado universalmente como *exacto:* es el razonamiento lógico matemático y sus diversos sistemas de deducción formal. Aquí hemos expuesto uno solo de ellos, el *Sistema de Deducción Natural*, que es razonamiento lógico matemático que consiste en dejar de lado el método axiomático, delimitando de manera precisa las reglas de inferencia primarias, de modo que todas las demás fórmulas lógicas se prueben como reglas derivadas de ellas.

Es propio de la deducción lógica llevarla cabo en contexto, esto es, en la estructura matemática, y esto también es considerado un razonamiento exacto. Así, en la estructura aritmética dada por los conocidos *axiomas de Peano*, se derivan todas las demás fórmulas conocidas de la aritmética.

Probemos el teorema $2+2=4$. Este es un teorema propio de la estructura aritmética, y su prueba es muy sencilla (recordemos que $S(1)=2$ quiere decir que el sucesor de la unidad se simboliza con el número dos).

1. $S(1)=2$ Definición
2. $S(2)=3$ Definición
3. $S(3)=4$ Definición
4. $2+2=S(1)+S(1)$
5. $S(1)+S(1)=S(S(1)+1)$ Operación de suma
6. $S(S(1)+1)=S(2+1)$

7. $S(2+1) = S(S(2))$
8. $S(S(2)) = S(3) = 4$

$\overline{}$

$2+2=4$

No parece nada fácil encontrar en el lenguaje ordinario un razonamiento lógico exacto como el anterior (seguramente no lo hay) pero no por ello, debemos excluir que en el lenguaje se razone lógicamente, sin que ello signifique que se siga un sistema de deducción lógica matemática.

Hay abundante literatura que confirma el esfuerzo de varias décadas por darle un *status* científico al razonamiento lógico en el lenguaje natural[14] y es por esto que nos permitimos hacer algunos comentarios.

Una primera aproximación consiste en aceptar que en la estructura sintáctica y gramatical de la lengua materna hay reglas de inferencia dadas por *el uso del lenguaje* que nos permiten hacer afirmaciones sobre *hechos* considerados irrefutables, tales como: "la tierra gira alrededor del sol"; "en el año 2011 hay más de mil millones de personas vivas"; "Hay gallinas que ponen huevos"; "la sociedad moderna prohíbe el incesto". Aceptamos estos hechos en los que el lenguaje es su propio *contexto*. Posiblemente no convenga denotar las anteriores fórmulas del lenguaje como "teoremas" propios del contexto, pero sí podemos aceptarlos como *probados* por reglas de inferencia dadas.

La siguiente es una regla de razonamiento lógico en el lenguaje natural, que brinda una idea del método que estamos exponiendo, y que dice así:

> *Dado un condicional, simbolizado como $\alpha \rightarrow \beta$, se asume el antecedente como premisa inicial y se aplican fórmulas con status de fórmulas probadas por el uso del lenguaje, hasta lograr, si ello es posible, inferir el consecuente. En cuyo caso, decimos que hemos razonado lógicamente.*

Vamos aplicar esta regla en el siguiente ejemplo.

"Si suelto el huevo, el huevo se rompe". Esta fórmula es un condicional y la podemos considerar razonamiento lógico, una vez que separemos el antecedente del consecuente, conduciendo el uno al otro, así:

1. Suelto el huevo
2. La distancia al piso es un metro
3. Nada se interpone entre el huevo y el piso
4. No es un huevo duro
5. Al soltarlo, pega al piso con mucha fuerza
6. [Suelto el huevo] [eliminación de la premisa]

---

[14] Gilbert Harman, *The Logic of Ordinary Language*, Princeton University, August 11, 2000

Por tanto,

Si suelto el huevo, el huevo se rompe.

Ejercicio

Estudie estos fragmentos extraídos de medios impresos de comunicación. Considere si es posible el procedimiento que justifique que se ha razonado lógicamente.

> Al Presidente Bush, el New York Times le demanda que pruebe que había una relación entre Irak y Al Qaeda. Bush responde: “La razón por la que sigo sosteniendo que había una relación entre Irak y Al Qaeda es porque existía una relación entre Irak y Al Qaeda” (El Tiempo, 18/06/04, página 1-8).
>
> Al director de la polémica película *Fahrenheit 9/11*, Michael Moore, le pregunta un periodista: “Su documental ha sido acusado de tener hechos incorrectos”, y Moore responde: “Cada hecho de la película es verdadero. Desafío a cualquiera a que se encuentre un solo hecho de la película, que no sea verdad” (El Tiempo, 11/07/04, página 3-5).
>
> Con el título “Ganador del Nobel dice que calentamiento global es la mayor preocupación económica,” se publica una entrevista al Nobel de economía Tomas Schelling, quien declara: “... hay un bloque de hielo en la Antártica. Está sujeto por varias islas, pero el calentamiento del agua puede hacer que se deslice al océano. Se estima que eso subiría el nivel del mar en aproximadamente 6 metros. Eso significaría que se podría ir de la Casa Blanca al Capitolio en barco. Sería una gran catástrofe”.
>
> “Si la economía crece entre 4 y 5%, se crearán 600 mil empleos al año”, afirma el Ministro de Hacienda, Juan Carlos Echeverry (Hoy Diario del Magdalena, 3 de febrero 2011).
>
> “El que tiene rabo de paja no se acerca al fuego, y yo no tengo rabo de paja” declara Luis Eduardo Garzón, copresidente del Partido Verde, el jueves 3 de febrero de 2011, ante los medios televisivos.
>
> En unas elecciones, 430.170 ciudadanos dejaron de asistir a las urnas a pesar de estar habilitados para hacerlo. “Si el 4.06% de estas personas se hubiesen motivado y hubieran votado en blanco, se hubiese obtenido el 50% más un voto y las elecciones se habrían repetido” Análisis sobre las elecciones en Cartagena, domingo, 30 de octubre de 2005.
>
> “Si el Dane no suministra las bases de datos del censo y de las encuestas de hogares, y monopoliza esta información, la investigación social en el país se paralizará[15]”.
>
> “Si las razones humanitarias hubiesen sido las principales motivadoras de esa liberación, los secuestrados hubieran sido entregados a una comisión de la Cruz Roja Internacional e inmediatamente devueltos a sus familiares en Bogotá[16]”.
>
> “Si el déficit fiscal no se reduce y la deuda del Gobierno central continúa creciendo, podríamos exponernos a una crisis fiscal”, José Darío Uribe, Gerente del Banco de la República, *El Tiempo*, 12/12/04, página 1-1
>
> Si Montoya no tiene ningún inconveniente físico y no existe molestia alguna, volvería a ser titular de la escudería” El Tiempo, Primera página, 05/05/05

Con esto finaliza el *Ensayo*.

---

[15] Alejandro Gaviria, Decano de Economía de la Universidad de los Andes”
[16] Alfredo Rangel. Columnista de EL TIEMPO. Enero 06/08

Volver al índice Cursos