

## Los problemas espaciales: una propuesta alternativa para enseñar geometría en la Educación Secundaria Obligatoria

### Spatial problems: an alternative proposal to teach geometry in Compulsory Secondary Education

Carlos Rojas Suárez<sup>1</sup>

Universidad Complutense de Madrid, España

<https://orcid.org/0000-0002-8689-8549>

Tomás Ángel Sierra Delgado<sup>2</sup>

Universidad Complutense de Madrid, España

<https://orcid.org/0000-0003-2731-0028>

#### Resumen

Presentamos un esbozo del problema de investigación que forma parte de un trabajo de tesis. Tras analizar el currículo español de matemáticas y algunos manuales escolares, hemos encontrado una ausencia de las *cuestiones a las que responden* los conocimientos geométricos propuestos para la Educación Secundaria Obligatoria (alumnos de 12 a 16 años). Después de haber revisado diferentes estudios relacionados con la enseñanza de la geometría, postulamos que los problemas espaciales pueden ayudar a encontrar una posible *razón de ser* de esos conocimientos geométricos. Así, pretendemos identificar y abordar algunos problemas espaciales a fin de confirmar dicha hipótesis.

**Palabras-clave:** Teoría Antropológica de lo Didáctico, Geometría elemental, Conocimientos geométricos, Problemas espaciales, Modelización Espacio-Geométrica.

#### Abstract.

We present an outline of the research problem that is part of a doctoral thesis. After analysing the Spanish mathematics curriculum and some textbooks, we have found an absence of the questions to which the geometric knowledge proposed for high school (students aged 12 to 16

---

<sup>1</sup> [carloja@ucm.es](mailto:carloja@ucm.es)

<sup>2</sup> [tomass@edu.ucm.es](mailto:tomass@edu.ucm.es)

years) answer. After reviewing different studies related to the teaching of geometry, we postulate that spatial problems can help to find a possible justification for such geometric knowledge. Thus, we intend to identify and address some spatial problems in order to confirm this hypothesis.

**Keywords:** Anthropological Theory of Didactics, Elementary Geometry, Geometric Knowledge, Spatial Problems, Space-Geometric Modeling.

## **Los problemas espaciales: una propuesta alternativa para enseñar geometría en la Educación Secundaria Obligatoria**

Nuestro estudio ha surgido en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y analiza fenómenos didácticos que se presentan dentro del *paradigma de la visita de las obras* (Chevallard, 2013), donde los saberes aparecen como monumentos u obras de arte que deben ser aceptados e idolatrados por los estudiantes. En nuestro caso, hemos estudiado la problemática que surge en la enseñanza de la geometría tras revisar el currículo de matemáticas (MECD, 2014), y algunos de los manuales escolares<sup>3</sup> propuestos para la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) (alumnos de 12 a 16 años) en España (Rojas & Sierra, 2017).

### **Problema de investigación**

Actualmente, el análisis realizado sobre el saber a enseñar en torno a la geometría pone de manifiesto que en el currículo de matemáticas para la ESO y en los manuales escolares correspondientes se proponen una serie de saberes geométricos a enseñar sin que aparezcan explícitamente las cuestiones a las que responden, es decir, no se explicitan las razones de ser de dichos saberes.

Por tanto, nuestro problema de investigación lo explicitamos así:

*¿Qué tipo de organizaciones matemático-didácticas en torno a los conocimientos geométricos propuestos en la ESO pueden plantearse de modo que los alumnos puedan encontrar en ellas alguna de las razones de ser de dichos conocimientos?*

Con la intención de atender a esta problemática, encontramos que en los trabajos de René Berthelot, Marie-Hélène Salin e Isabelle Bloch (Berthelot & Salin, 1992; Berthelot & Salin, 2000; Bloch & Salin, 2004 y Salin, 2004), y en otros anteriores como Grecia Gálvez (1985) y Guy Brousseau (2000), se explica que existe una importante interrelación entre los

---

<sup>3</sup> Hemos analizado inicialmente libros de texto propuestos para la ESO de las editoriales: SM (Anzola, Bujanda, Mansilla, & Vizmanos, 2008; Vizmanos, Anzola, De los Santos, & Hervás, 2008), Santillana (Álvarez et al., 2008, 2007), y Anaya (Colera & Gaztelu, 2007, 2011; Colera, Oliveira, & Gaztelu, 2012; Colera, Oliveira, Gaztelu, & Martínez, 2012).

problemas espaciales y los conocimientos geométricos.

Esta interrelación indica que la búsqueda de solución a dichos problemas espaciales puede hacer que emerjan necesariamente ciertos conocimientos geométricos. Así, tenemos el caso de la búsqueda de la solución mediante la *modelización espacio-geométrica* (Berthelot & Salin, 2000; Bloch & Salin, 2004 y Salin, 2004), caracterizada porque va más allá de lo inmediato, y por la construcción de un modelo coherente mediante conocimientos geométricos, que permite dar solución a la cuestión central del problema tratado.

En nuestro estudio, nos interesan los problemas espaciales y su solución mediante la modelización espacio-geométrica. Creemos que de este modo podría justificarse la presencia de algunos de los conocimientos geométricos que actualmente se proponen para la ESO. Por ello, decidimos revisar nuevamente el currículo y algunos manuales escolares de España para rastrear la presencia de este tipo de problemas, a la luz del modelo que propone la TAD. Este modelo:

Describe el conocimiento matemático en términos de *organizaciones o praxeologías matemáticas* [...] cuyos componentes principales son *tipos de tareas*, T; *técnicas*,  $\tau$ ; *tecnologías*,  $\theta$  y *teorías*,  $\Theta$ . [...] Las organizaciones matemáticas se componen de un bloque práctico “saber-hacer” formado por los tipos de tareas y las técnicas [T/ $\tau$ ] y por un bloque teórico o “saber” formado por el discurso tecnológico-teórico [ $\theta/\Theta$ ] que describe, explica y justifica la práctica. (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004)

En nuestra revisión (Rojas & Sierra, 2017), encontramos principalmente que:

- El currículo de secundaria no presenta el estudio de los conocimientos geométricos a partir de tipos de problemas o tareas, donde la mejor solución pase por utilizar dichos conocimientos, sino donde los datos, fórmulas y la técnica que conducen a ella, vienen dados de antemano.

- La mayoría de las tareas propuestas, invitan a replicar la misma técnica  $\tau$  (i.e., ver, reproducir, aplicar una fórmula)

- Algunas de las situaciones presentes en los manuales escolares que vinculan datos y eventos reales resultan situaciones pseudo reales, es decir, no constituyen *verdaderos* problemas espaciales, puesto que en el mismo texto se sugiere el conocimiento geométrico a utilizar.

- Las tareas y técnicas propuestas en los manuales escolares se justifican entre sí, por lo que aparentemente su aplicabilidad y sentido están limitadas a ellas mismas. Por ejemplo, se definen las razones trigonométricas y se usan para calcular la medida de los lados o ángulos en un triángulo rectángulo.

Concluimos que los problemas espaciales no se contemplan como una alternativa para justificar la presencia de los conocimientos geométricos que actualmente se proponen para la ESO.

### **Los problemas espaciales y los conocimientos geométricos**

M. H. Salin (2004) explica qué son los conocimientos espaciales y geométricos y la relación que existe entre ellos. Así, indica que los conocimientos geométricos pueden surgir como herramientas para resolver los problemas espaciales. Los problemas espaciales, pueden caracterizarse como sigue:

(a) Se presentan dentro del espacio sensible, que según Yves Chevallard y Michel Jullien (1991) es el espacio que contiene objetos, y que nos es accesible a través de los sentidos;

(b) Contemplan acciones como fabricar, desplazar o representar objetos, etc., situarse, desplazarse, o también comunicaciones sobre dichas acciones; y

(c) Su solución es verificable mediante la comparación del resultado obtenido y el esperado.

Son tipos de tareas a las que se suelen enfrentar el cristalero, carpintero, fontanero, etc. en su labor diaria.

Guy Brousseau (2000), plantea que los problemas espaciales son aquellos “en cuya solución [se] requiere efectivamente de la implementación de un conocimiento que el observador reconoce como bien descrito por un saber de naturaleza espacial y más particularmente geométrica” (p. 6)<sup>4</sup>. Por ejemplo, la situación en la que un estudiante necesita una ficha trapezoidal de un rompecabezas y debe describírsela a su compañero –quien la ve junto con otras piezas– para obtenerla, depende de ciertas circunstancias precisas. Así, si solo hay una pieza para elegir, la descripción sobra; si las que hay conforman pequeños grupos, bastará con pedir el trapecio, sin que ello esté indicando que se conozcan sus propiedades; pero, “si la pieza que falta se debe dibujar y cortar en un cartón, los conocimientos espaciales y una cierta cultura geométrica resultan esenciales para ambos niños” (p. 6)<sup>5</sup>.

La relación que se establece entre los problemas (Salin, 2004) o las situaciones (Brousseau, 2000) espaciales y los conocimientos geométricos, forma parte importante de nuestro estudio; primero, porque se perfila como una vía de solución a la problemática que encontramos, tras revisar el currículo y algunos de los manuales de matemáticas propuestos para la ESO; y segundo, porque el proceso de modelización espacio-geométrica presente en dicha relación, coincide con las problemáticas que están en juego en la enseñanza de la geometría (Berthelot & Salin, 2000; Bloch & Salin, 2004), a las que no se suele atender de manera global en la escuela, a saber:

- una problemática práctica,
- una geométrica,
- y una de modelización, que busca trascender las soluciones

---

<sup>4</sup> Traducción propia.

<sup>5</sup> Traducción propia.

inmediatas mediante el uso de conocimientos geométricos con la intención de generar modelos comunicables y reproducibles, en términos propios de las matemáticas.

Veamos un ejemplo que ilustra esta relación:

A un cristalero se le encomienda la tarea de construir un cristal rómbico que equivale a plantearle la siguiente cuestión:

*Q<sub>1</sub>: ¿Cómo proceder para construir el cristal?*

El tipo de tareas  $T = \text{“construir un cristal”}$ , podría llevarse a cabo de manera práctica. En el caso de la tarea  $t_1 = \text{“construir un cristal rómbico (no cuadrado)”}$  puede utilizarse la técnica  $\tau_{10} = \text{“trazar sobre una pieza de papel la forma y tamaño que debe tener el cristal”}$ . Además de requerir materiales auxiliares y una destreza especial para dibujar un rombo que encaje en el hueco correspondiente,  $\tau_{10}$  corre el riesgo de conducir a la construcción de un cristal que no tenga las medidas adecuadas.

Otra técnica posible es  $\tau_{11} = \text{“tomar la medida de un lado del rombo y de uno de los ángulos”}$ . Pero esta técnica es poco fiable ya que en la práctica es difícil medir con precisión la amplitud de un ángulo.

Podemos realizar también  $t_1$  mediante la técnica  $\tau_{12} = \text{“medir las diagonales del rombo y dibujarlas sobre un cristal de manera que se corten perpendicularmente en sus puntos medios”}$ . De este modo tendremos determinados los cuatro vértices del rombo y podremos trazarlo y cortar el cristal. Así,  $\tau_{12}$  requiere utilizar los conocimientos geométricos necesarios para garantizar que un cuadrilátero convexo sea rombo.

Una variación de esta técnica consiste en construir un rectángulo cuyos lados midan igual que las longitudes de las diagonales del rombo. Para ello disponemos de un instrumento para trazar perpendiculares. Entonces bastará con encontrar los puntos medios de los lados de este rectángulo que coincidirán con los vértices del rombo. Obviamente, estas dos técnicas

adolecerán necesariamente de ciertas imprecisiones propias de todo proceso de medición efectiva, pero serán menores que en el caso de las técnicas anteriores.

El discurso tecnológico de  $\tau_{12}$ , que llamaremos  $\theta_{12}$ , se apoya en la caracterización de la forma y el tamaño de un rombo (Gascón, 2004).

Esta tarea forma parte de un tipo de tareas que se puede formular del siguiente modo:

Dado un cuadrilátero del que se conoce su “tipo de forma” (rectángulo, rombo, paralelogramo, trapecio, cometa, etc.) cómo reproducirla (forma y tamaño) sobre una superficie plana si solo disponemos de un instrumento para medir longitudes y de otro para trazar perpendiculares. No disponemos de un instrumento para medir ángulos de manera fiable.

Para resolver alguna de las tareas de este tipo será necesario variar la técnica  $\tau_{12}$  incluyendo, en entre otras cosas, el uso del teorema de Pitágoras.

### **Pregunta de investigación y primera hipótesis**

Con base en lo enunciado hasta ahora, planteamos la siguiente hipótesis:

Existen problemas espaciales que pueden constituirse en una posible razón de ser de algunos de los conocimientos geométricos escolares referidos en el currículo la ESO.

En correspondencia con esta hipótesis, hemos propuesto algunas preguntas a las que pretendemos dar respuesta con nuestra investigación, a saber:

*¿Cuáles son los tipos de problemas espaciales a los que se enfrentan las personas en las distintas profesiones manuales? ¿Qué técnicas permiten resolverlos y cuál es su dominio de validez y su grado de eficacia? ¿Cuáles de estas técnicas hacen referencia a los conocimientos geométricos? ¿Cuáles son los elementos tecnológicos que permiten explicar, justificar y hacer más comprensibles dichas técnicas?*

La identificación y estructuración de los problemas espaciales que hagan de los conocimientos geométricos una necesidad resulta una tarea difícil, máxime si tenemos en



cuenta que:

Una característica importante de la enseñanza del espacio y la geometría en la escuela primaria [y en la secundaria], es la de subestimar la dificultad en la adquisición de los conocimientos espaciales, y dejar al alumno la responsabilidad de establecer las relaciones adecuadas entre el espacio y los conceptos que se le enseñan. (Salin, 2004, p. 51)

Actualmente nos encontramos en esta búsqueda, que, por el momento, nos está llevando al estudio y análisis de un tipo de tareas del ámbito del oficio de cristalero o de otros oficios, con el objetivo de diseñar e implementar un recorrido de estudio e investigación con alumnos de un Instituto de Educación Secundaria de Getafe (Madrid, España).

### **Agradecimientos**

Esta investigación se ha desarrollado en el marco del proyecto I+D+i “Propuestas para una enseñanza basada en el paradigma del cuestionamiento del mundo” (Q-mundo): RTI2018-101153-A-C22 del Programa Estatal de I+D+i Orientada a los Retos de la Sociedad.

### **Referencias**

- Álvarez, M. D., Gaztelu, A. M., González, A., Hernández, J., Miranda, A. Y., Moreno, M. R. & Serrano, E. (2008). *Matemáticas: 4 ESO. Opción B*. Madrid, España: Santillana Educación, S.L.
- Álvarez, M. D., Hernández, J., Miranda, A. Y., Moreno, M. R., Parra, S., Redondo, M. & Serrano, E. (2007). *Matemáticas: 2 ESO*. Madrid, España: Santillana Educación, S.L.
- Anzola, M., Bujanda, M. P., Mansilla, S., & Vizmanos, J. R. (2008). *Matemáticas - Esfera: 1 ESO*. Madrid, España: Ediciones SM.
- Berthelot, R. & Salin, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* (Doctoral dissertation). Université Sciences et Technologies-Bordeaux I.
- Berthelot, R. & Salin, M. H. (2000). L'enseignement de la géométrie au début du collège— Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive. *Petit x*, 56, 5-34.
- Bosch, M., Fonseca, C., & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24(2-3), 205-250.

- Bloch, I. & Salin, M. H. (2004). Espace et géométrie : Géométrie dans le méso-espace à l'école primaire et au début du collège. En *Actes du 30e Colloque de la COPIRELEM Avignon 2003*.
- Brousseau, G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie. En *Actes du 2e colloque de didactique des mathématiques*. Université de Crète (département de l'éducation), (pp. 67-83). Obtenido de <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515110/document>
- Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *REDIMAT*, 2(2), 161-182. doi: 10.4471/redimat.2013.26
- Chevallard, Y. & Jullien, M. (1991): Autour de l'enseignement de la géométrie au collège, première partie. *Petit x n°27*, 41-76.
- Colera, J., & Gaztelu, I. (2007). *Matemáticas 2: Educación Secundaria*. Madrid, España: GRUPO ANAYA, S.A.
- Colera, J., & Gaztelu, I. (2011). *Matemáticas 1: Educación Secundaria*. Madrid, España: GRUPO ANAYA, S.A.
- Colera, J., Oliveira, M. J. & Gaztelu, I. (2012). *Matemáticas 4: Educación Secundaria. Opción B*. Madrid, España: GRUPO ANAYA, S.A.
- Colera, J., Oliveira, M. J., Gaztelu, I. & Martínez, M. (2012). *Matemáticas 4: Educación Secundaria. Opción A*. Madrid, España: GRUPO ANAYA, S.A.
- Gálvez, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria*. (Tesis doctoral). Centro de Investigaciones del IPN, México.
- Gascón, J. (2004). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria II. La clasificación de los cuadriláteros convexos. *Suma*, 45, 41-52.
- MECD. (2014). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. España: Boletín Oficial del Estado.
- Rojas, C., & Sierra, T., (2017). *Análisis del currículo y de manuales escolares para el caso de los conocimientos espaciales y geométricos en la educación secundaria obligatoria*. Comunicación presentada al XXI Simposio de la Sociedad de Investigación en Educación Matemática, Zaragoza, España.
- Salin, M. H. (2004). La enseñanza del espacio y la geometría en la enseñanza elemental. En J. López (Coord.), *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 37-80). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Vizmanos, J. R., Anzola, M., De los Santos, I. & Hervás, J. C. (2008). *Matemáticas - Esfera: 4 ESO. Opción A*. Madrid, España: Ediciones SM.