EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p756-771

# Ostensifs et calcul soustractif à l'école

# Ostensive and subtractive calculus at school

Anne-Marie Rinaldi[1]
Laboratoire Andé Revuz, Université Paris Diderot, France
https://orcid.org/0000-0002-8897-519X

## Résumé

Mon travail de thèse dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique m'a permis de construire une organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif et d'élaborer une ingénierie pour le CE2, en cherchant à rester assez proche des pratiques de l'enseignement ordinaire. L'évolution des productions des élèves et des discours des enseignants sur un ensemble de séquences permet de questionner l'usage d'ostensifs tels que les écritures arithmétiques et les schémas avec la droite numérique dans le but de décrire, valider et évaluer un ensemble de techniques de calcul mental.

**Mots clés :** Ostensif, Techniques de calcul mental.

## Abstract

My thesis work within the framework of the Anthropological Theory of Didactics allowed me to build a mathematical organization of reference around the subtractive calculation and to elaborate an engineering for the CE2, trying to remain rather close to the practices of the teaching ordinary. The evolution of students 'productions and teachers' speeches on a set of sequences makes it possible to question the use of ostensives such as arithmetic writings and diagrams with the number line in order to describe, validate and evaluate a set of techniques of mental calculation.

**Keywords:** Ostensive, Techniques of mental calculation.

[1] anne-marie.rinaldi@u-picardie.fr

## Ostensifs et calcul soustractif à l'école

Notre contribution relève de l'axe 3 dans le sens où nous revenons sur des questions relatives à l'enseignement du calcul soustractif, en réponse à un problème professionnel repéré à partir d'observations de pratiques de classe.

Le calcul soustractif mental et posé est un enjeu majeur de l'enseignement des mathématiques au vu des difficultés d'apprentissages persistantes des élèves notamment en début de cycle 3 (pour des élèves ayant de 8 à 10 ans). En effet si on se réfère aux résultats des évaluations TIMS (2016), aux travaux de Maurel & Sackur (2010), les calculs soustractifs posés ne sont pas maîtrisés par tous les élèves : « *Ils font la soustraction dans le sens où c'est possible, en retranchant le plus petit au plus grand, quelle que soit sa place dans la soustraction posée, en haut ou en bas.* » C'est ainsi que pour effectuer 53–27, ils vont effectuer 7–3 et trouver 34 à la place de 26. Par ailleurs, en calcul mental, pour Denis Butlen et Monique Charles-Pézard (2007), les élèves à qui on n'a pas appris à faire autrement : « *privilégient en premier lieu l'algorithme posé dans la tête, en second lieu des procédures mobilisant des décompositions canoniques des nombres*. » Cela est sans conséquence pour effectuer par exemple 53–21=50–20+3–1 mais problématique pour effectuer le calcul proposé ci-dessus 53–27.

Dans ce contexte, nos travaux de thèse (Rinaldi, 2106) nous ont amené à identifier la nature des savoirs à enseigner pour développer la valence pragmatique et épistémique du calcul (Artigue, 2005) et à analyser comment ces savoirs – les désignations des nombres, les techniques et justifications de techniques — étaient mobilisés dans des séances de calcul (mental et posé) « ordinaires » conduites dans trois classes de CE2. L'analyse des praxéologies observées nous a alors conduit à concevoir une ingénierie — basée sur certains ostensifs et certains types de tâches — et à la mettre en œuvre dans deux des classes observées. Les résultats obtenus permettent de mesurer l'impact sur les apprentissages des élèves d’un travail régulier et progressif sur les écritures arithmétiques. Ils montrent également la nécessité d’accompagner les enseignants dans un changement de pratiques. En ce sens, la recherche étudie l’évolution des praxéologies des professeurs mettant en œuvre une ingénierie didactique favorisant les discours technologiques.

## Cadre théorique et méthodologie

Pour conduire la recherche, nous nous sommes placés principalement dans le cadre de la théorie anthropologique de la didactique. Nous avons intégré le concept d’organisation mathématique qui permet selon Yves Chevallard (1999) de caractériser l’activité mathématique et le concept d’organisation didactique qui renvoie aux différents moments de l’étude. Nous avons également utilisé le concept d’organisation mathématique de référence. L’organisation mathématique de référence selon Marianna Bosch et Josep Gascon (2005) permet au chercheur (pour un sujet donné, ici le calcul soustractif sur les entiers naturels) d’identifier à partir d’une étude épistémologique et didactique l’ensemble des savoirs à enseigner. Dans la recherche, cette organisation mathématique de référence a servi pour construire une organisation mathématique conforme à la référence et comme outil d’analyse.

Nous avons également utilisé les concepts de contrat, d’habitude et de régularité des pratiques empruntés à Aline Robert (2013) pour connaître les pratiques de trois enseignants de CE2 et le concept de zone proximale de développement des pratiques pour concevoir l’organisation de l’étude sans trop nous éloigner des pratiques de l’enseignement ordinaire.

Un autre concept, celui d’ingénierie (Artigue, 2011) nous a servi à définir une méthodologie générale de mise à l’épreuve et d’analyse.

Cette présentation générale étant faite, il nous semble important de revenir précisément sur la composition de l'organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif car celle-ci est la clef de voute de notre recherche.

**Organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif**

L'organisation propre au calcul soustractif sur les entiers naturels est fédérée autour de quatre organisations mathématiques locales :

*La première organisation OM1* regroupe les tâches propres à la production de calculs. Tâches qui permettent essentiellement à l'école élémentaire de modéliser les situations additives en référence aux travaux de Gérard Vergnaud (1990). Par exemple : j'avais 132 € avant de dépenser 58 €, combien me reste-t-il ?

*La seconde organisation OM2* regroupe les tâches qui consistent à associer ou transformer des représentations sémiotiques. Parmi ces représentations sémiotiques, nous retenons les écritures arithmétiques, les schémas et les expressions langagières. Cette organisation est motivée par OM1 et OM3. Par exemple : traduire la différence entre cent-trente-deux et cinquante-huit par une écriture arithmétique.

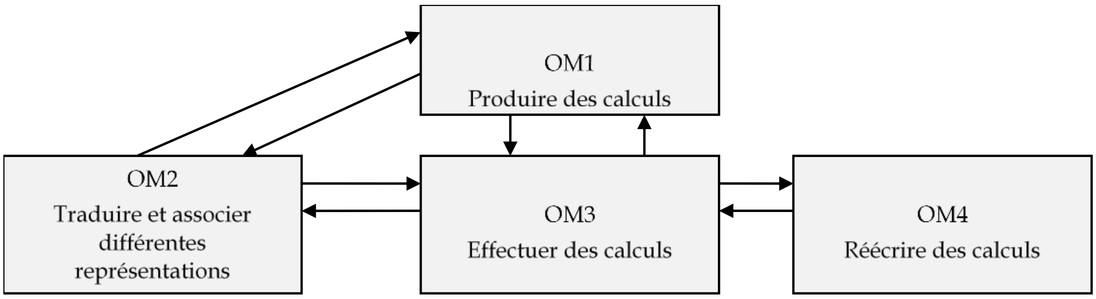
*La troisième organisation OM3* regroupe les tâches qui vont consister à effectuer un calcul. Par exemple : calculer 132–58.

*La dernière organisation OM4* est associée à la réécriture de calculs. C'est celle qui va permettre de montrer quelles sont les propriétés des nombres et des opérations qui sont mobilisées donc de développer la valence épistémique du calcul au sens d'Artigue (2005). Exemple : réécrire 137–58 en décomposant le nombre 58.

Le schéma ci-dessous met en avant les liens entre les différentes organisations mathématiques locales :

Figure 1

*Liens entre les organisations locales propres au calcul soustractif*




En rapport avec la recherche, nous avons particulièrement développé l'étude de l'organisation propre à l'effectuation de calculs (OM3). Nous avons identifié différents types de tâches. Ces types de tâches sont soustraire un nombre à un chiffre (Ta−□), soustraire un multiple de dix (Ta−ϒ0), soustraire un nombre à deux chiffres (Ta−ϒϒ) puis soustraire un nombre à trois chiffres (Ta−ϒϒϒ).

Pour chaque type de tâches, nous avons ensuite recensé les techniques potentielles en nous appuyant sur les travaux de Fuson et al. (1997), Carpenter et al. (1998), Klein et al. (1998) et Thompson (1999). Nous avons regroupé les techniques citées autour de quatre technologies savantes.

La première technologie $\Theta_{DD}$ s'appuie sur la décomposition des deux nombres, la recomposition d'un nombre, les répertoires additifs et soustractifs, le principe décimal et le principe de position de la numération décimale, les propriétés de la soustraction sur N. Elle génère deux techniques de décomposition $\tau_{1010}$ et $(\tau_{1010})'$. $\tau_{1010}$ est une technique par décomposition canonique des deux nombres qui consiste à calculer des différences partielles sur des multiples de 100, de 10, de 1 et à les ajouter : 168-23=(100+60+8)-(20+3)=(100)+(60-20)+(8-3). $(\tau_{1010})'$ est une technique par décomposition du premier nombre et décomposition canonique du nombre à soustraire qui se rapproche de $\tau_{1010}$ : 165-27=(100+50+15)-(20+7)=(100)+(50-20)+(15-7).

La seconde technologie $\Theta_D$ s'appuie sur les mêmes propriétés que la première. Elle nécessite de décomposer un seul des deux nombres (le plus petit). Elle génère trois techniques séquentielles $\tau_{N10}$, $\tau_{A10}$ et $\tau_{N10C}$. $\tau_{N10}$ est une technique séquentielle qui consiste à décomposer canoniquement le nombre à soustraire : 125-23=125-(20+3)=(125-20)-3. $\tau_{A10}$ est une technique séquentielle où on décompose le nombre à soustraire afin d'obtenir des calculs soustractifs intermédiaires plus simples à effectuer : 125-27=125-(25+2)=(125-25)-2 ou 123-70=123-(20+50)=(123-20)-50. $\tau_{N10C}$ est également une technique séquentielle où on remplace le nombre à soustraire *b* par un multiple de dix ou de cent supérieur à *b* et où on compense le surplus : 125-47=(125-50)+3.

La troisième technologie $\Theta_{SOU/ADD}$ s'appuie sur la définition de la soustraction comme opération inverse de l'addition sur les entiers naturels et génère la technique $\tau_{SOU/ADD}$. $\tau_{SOU/ADD}$ est une technique par inversion qui consiste à remplacer une soustraction par une addition à trou. Par exemple : pour calculer 125-47, on cherche le complément de 47 à 125.

La dernière technologie $\Theta_{AN}$ s'appuie sur la propriété de conservation des écarts. Elle génère une technique de calcul mental $\tau_{AN}$ et l'algorithme de la soustraction par compensation qui consiste à ajouter aux deux termes du calcul si, besoin est, un ou plusieurs multiples de dix. $\tau_{AN}$ est une technique par translation qui consiste à ajouter (respectivement soustraire) un même nombre à chaque terme du calcul soustractif de façon à transformer le plus petit en un multiple de dix ou de cent.

Parallèlement, nous avons cherché quels ostensifs, objets sensibles permettant d'évoquer les concepts selon Marianna Bosch et Yves Chevallard (1999) pouvaient être utilisés pour mettre en avant les différentes fonctions des technologies (expliquer, évaluer, valider, motiver) en référence à l'article de Corine Castella et Avenilde Romo Vasquez (2011).

En nous basant sur les études de Teppo et Van den Heuvel-Panhuizen (2014), Ernest (1985), Gravemeijer (1994), Bobis et Bobis (2005), Van den Heuvel-Panhuizen (2008) nous avons émis plusieurs hypothèses. La droite numérique vide (DNV) aiderait à visualiser les différentes étapes d'un calcul donc à expliquer le mode d'emploi des techniques séquentielles. La droite numérique graduée (DNG) aiderait à visualiser l'écart dans le cadre de la mesure. Les écritures chiffrées (EC) et les arbres permettant eux de valider toutes les techniques.

Le cadre théorique fixé, nous avons opté pour une méthodologie dont nous énonçons les grands axes dans le paragraphe suivant.

## Méthodologie

Après avoir construit l'organisation mathématique de référence, nous avons utilisé et mis à l'épreuve cet outil théorique pour analyser les manuels et les pratiques spécifiques de trois enseignants. Ainsi, nous avons pu nous appuyer sur cette étude et sur une connaissance des contrats et habitudes des trois enseignants « observés » pour nourrir l'organisation didactique de l'ingénierie. L'organisation mathématique étant elle fondée sur l'organisation mathématique de référence. Pour finir, deux des trois enseignants ont accepté d'expérimenter l'ingénierie dans leurs classes respectives.

## Présentation de l'ingénierie

L'ingénierie vise l'explicitation des éléments théoriques en jeu dans l'effectuation de calculs et à agréger les organisations mathématiques locales (voir figure1) pour permettre aux élèves de développer la valence pragmatique et épistémique du calcul. Etant donné qu'elle s'appuie sur une meilleure connaissance des pratiques enseignantes, et vise indirectement à faire évoluer leurs pratiques, nous allons donner quelques éléments prélevés suite à l'observation conduite dans trois classes de CE2 avant de présenter les premières séquences de l'ingénierie, celles qui introduisent les écritures arithmétiques.

## Éléments prélevés suite aux observations de classe

La valence pragmatique du calcul est prédominante dans le sens où les enseignants cherchent avant tout à ce que les élèves calculent vite et bien. Les corrections étant là surtout pour valider les résultats. Peu de synthèses autour des techniques sont mises en place. Par ailleurs, dans les séances de calcul mental que nous avons observées, les enseignants proposaient des séries de calcul pour s'entrainer à soustraire sept, soustraire des multiples de dix, soustraire un nombre à deux chiffres, donc des tâches non isolées et toutes d'un même type. Le travail en calcul mental était conduit essentiellement à l'oral, et par là même ne facilitait pas la réécriture de calcul. Sur l'ensemble des techniques enseignées, on ne retrouvait pas de technique s'appuyant sur la propriété de conservation des écarts. Un dernier point : les enseignants alors qu'ils n'étaient pas demandeurs initialement d'un autre projet d'enseignement ont accepté dans un premier temps de mettre en œuvre des *scénarii* que nous leur avions proposé (entre autres sur la propriété de conservation des écarts) et dans un second temps d'expérimenter l'ingénierie dont nous présentons ci-dessous les deux premières séquences.

## Introduction des écritures arithmétiques

Le premier bloc d'enseignement correspond à l'étude de deux types de tâches : soustraire un nombre inférieur à dix (Ta−ϒ) et soustraire un multiple de dix (Ta−ϒ0). Les moments correspondants à cette étude sont des moments de reprise au sens de Larguier (2009) car les élèves ont déjà rencontré ces types de tâches. Il s'agit alors de « ne pas reprendre totalement l'étude du thème et de s'efforcer de faire apparaitre le « nouveau à étudier » par rapport à « l'ancien ». La mise en scène choisie est directement inspirée de l'observation de la pratique d'un enseignant. Trois séries de quatre calculs sont données à chercher individuellement. Entre deux séries, un temps de restitution face au groupe classe est effectué.

En revanche, la consigne donnée aux élèves est modifiée. L’élève ne doit pas se contenter d’écrire le résultat. L’élève doit écrire le résultat et décrire la technique mise en œuvre pour effectuer le calcul. La nature des quatre calculs de chaque série est un début d’assortiment (Genestoux, 2002). En effet sur les quatre calculs, j’ai fait en sorte d’assortir les trois premiers. C’est ainsi, que dans la première série composée des quatre calculs suivants 48–5 ; 59–2 ; 328–6 et 70–6, pour les trois premiers calculs, le nombre à soustraire est volontairement inférieur au chiffre des unités du nombre auquel on soustrait. $t_{1010}$ est donc applicable. En revanche, pour le dernier, cette technique n’est pas applicable. La présence de ce calcul doit ainsi amener l’élève à évaluer la technique $t_{1010}$ et à prendre en compte la portée de cette technique.

Les productions et leurs évolutions sur plusieurs séquences vont permettre alors d’analyser la nature des techniques, des ostensifs et des éléments théoriques utilisés par les élèves et parallèlement les éléments institutionnalisés par les enseignants.

Dans le paragraphe suivant, nous donnons des éléments d’analyse à la suite des expérimentations conduites dans les classes A et B.

## Analyse de l’ingénierie

Les expérimentations ont commencé alors que les enseignants des classes A et B n’avaient pas encore abordé le calcul soustractif. Ils avaient travaillé sur le calcul additif et la numération (lecture, écriture et décomposition des nombres). Les séquences de l’ingénierie se sont enchainées, sept séquences de deux voire trois séances de 45 minutes chacune. Les données dont nous disposons sont toutes les productions écrites des élèves et les enregistrements vidéo d’une à deux séances par semaine dans chaque classe. Elles nous amènent à questionner l’usage des écritures arithmétiques à différents moments de l’étude.

### Analyse relative à l'étude de Ta−ϒ

Le type de tâches qui consiste à soustraire un nombre inférieur à dix (Ta−ϒ) a été abordé lors de la première séquence. Dans la classe A, pour effectuer le calcul 48–5 (premier calcul de la première séance), comme l'enseignant n'avait pas précisé aux élèves qu'ils ne devaient pas poser d'opérations en colonne, presque les trois quarts des élèves (3/17) vont s'emparer de l'algorithme. A l'inverse, dans la classe B, seulement 2 élèves sur 29 posent leur calcul en colonne.

Par ailleurs, sur beaucoup de productions la technique n'est pas identifiée car les élèves se contentent d'indiquer qu'ils « enlèvent cinq à quarante-huit » pour obtenir quarante-trois. On observe également que la technique attendue, basée sur la décomposition est présente dans les deux classes. En effet, nous nous sommes basées sur les discours des élèves pour l'affirmer. Deux types de discours sont présents. Un type de discours où les nombres sont pris chiffre à chiffre. Un autre type où le nombre de départ 48 est décomposé additivement. Pour illustrer ce propos, nous avons sélectionné les productions suivantes :

Figure 2

*Exemples de discours associés au calcul de 48-5*

| Nombres considérés chiffres à chiffres | Nombres décomposés additivement |
|---|---|
| dans l'unittée de 8 j'ai enlever 5 et j'ai trouver 3 donc 43<br>8-5= 3, 48-5= 43<br>48 - 5<br>$\boxed{3}$ | Je vait tes que ~~8-3=~~ ~~3-~~ 3-5=3 et aprés je rajoute 40.<br>C'est 43 car 8 c'est 3+~~8~~-5 alor on enlève le 5 et on garde le 40 on rajoute le trois au 40 et ça fait 43 |

Associé à ces productions, il est intéressant d'analyser les échanges entre enseignant et élève pour montrer les éléments théoriques mis en avant.

*Premier échange :*

L'enseignant a écrit le calcul à effectuer en ligne 48−5 au tableau.

Elève : 8 moins 5 ça fait 3 du coup ça fait 43. L'enseignant écrit la réponse 43 et relie le 8 au 5.

Enseignant : 8 moins 5, ça fait 3 dans les unités. Tu ne changes pas le 4.

Elève : Parce qu'il n'y a pas de changement de dizaine.

Enseignant : Là il n'y a pas de dizaines. L'enseignant montre l'espace devant le 5. Donc rien ne change au niveau des dizaines. Il montre le « 4 » de 48 et le « 4 » de 43.

*Second échange :*

Elève : Moi j'ai fait quarante plus huit après j'ai fait moins cinq et ça fait quarante-trois.

Enseignant : Vous avez compris ce qu'il a fait. Il sait que quarante-huit, c'est quarante plus huit, ensuite il a juste fait huit moins cinq. Tu as fait huit moins cinq. Tu as trouvé trois, tu as ajouté quarante. Tu trouves quarante-trois.

En considérant le premier échange, notons que le fait de relier les chiffres 8 et 5 permet de « montrer » comment la technique s'applique sans pour autant justifier celle-ci.

*A contrario*, dans le second échange, le fait d'indiquer que quarante-huit est égal à quarante plus huit est un début de justification. Cependant cette justification n'est pas menée jusqu'au bout car il n'y a pas de tâche propre à la réécriture de proposée. 48–5=40+8–5 n'est pas une égalité numérique notée au tableau.

**Analyse relative à l'étude de Ta−ϒ0**

En nous basant sur l'ensemble des analyses relatives à l'étude du type de tâches soustraire un multiple de dix, nous constatons que la majorité des élèves de chaque classe utilise une décomposition du nombre à soustraire. Cela peut s'expliquer par le fait qu'ils ont travaillé au préalable sur des techniques séquentielles privilégiant le passage à la dizaine entière inférieure pour effectuer des calculs tels que 42–7. Les difficultés rencontrées quand elles existent sont liées au choix du nombre pivot. C'est ainsi que pour calculer 437–50, certains élèves vont commencer par soustraire 37 pour « arriver » à une centaine entière et être bloqués pour calculer le complément de 37 à 50 ou pour soustraire, une fois effectué ce calcul, 13 au nombre 400. Par ailleurs, l'utilisation de la droite numérique n'est pas forcément d'une aide majeure. Elle permet à l'élève de s'engager dans un calcul, de le commencer sans lui permettre de le mener jusqu'au bout. En ce sens elle fait illusion, écran.

## Analyse relative à l'étude de Ta−ϒϒ

En nous basant sur les productions écrites des élèves et sur les moments de restitution filmés à l'occasion de la sixième séquence, nous constatons que le fait d'introduire puis d'utiliser régulièrement un nouveau type de tâches qui consistait à décrire la technique utilisée pour effectuer un calcul en utilisant les écritures arithmétiques ou des schémas avec appui sur la droite numérique a permis à l'élève d'être mieux outillé pour expliquer aux autres les différents calculs qu'il a été amené à enchainer. L'enseignant, pour sa part, peut amener le groupe d'élèves à évaluer la technique et décider de l'institutionnaliser ou non. C'est ainsi que les enseignants des classes A et B qui jusqu'alors reprenaient uniquement à l'oral les propositions des élèves sans rien noter au tableau, s'engagent davantage dans un travail de réécriture. Ce travail de réécriture permet de mettre en avant les décompositions des nombres et les propriétés des opérations utilisées. Il permet d'engager un travail sur la validation des techniques mises en œuvre.

De surcroit, on constate que les techniques exposées sont variées. Pour illustrer ce dernier point, voici des éléments de discours recueillis dans la classe B au sujet du calcul 52–16. Ces éléments sont retranscrits dans l'ordre chronologiques et révèlent :

L'utilisation de $\tau_{AN}$

Elève : « J'ai rajouté quatre aux deux nombres »
Enseignant : « Pourquoi as-tu ajouté quatre ? Quel nombre dois-tu regarder pour savoir combien ajouter ? »
Elève : « Seize »
Enseignant : « Oui, elle s'est dit seize c'est près de vingt. Soixante-deux plus quatre égal soixante-six moins vingt, quarante-six »
Le nouveau calcul est noté au tableau : 66–20=46.

L'utilisation de $\tau_{A10}$

Elève : « J'ai fait un schéma ». L'enseignant trace un trait horizontal.
Enseignant : « Je ne sais pas combien d'étapes tu as fait. »
Elève : « J'en ai fait trois. J'ai fait soixante-deux moins deux. J'arrive à soixante. »
L'enseignant marque un premier bond sur le schéma.
Elève : « J'ai fait moins quatorze ».
Enseignant : « Tu arrives à le faire d'un coup ? »
Elève : « J'ai fait moins dix. J'arrive à cinquante. Cinquante moins quatre, quarante-six. »

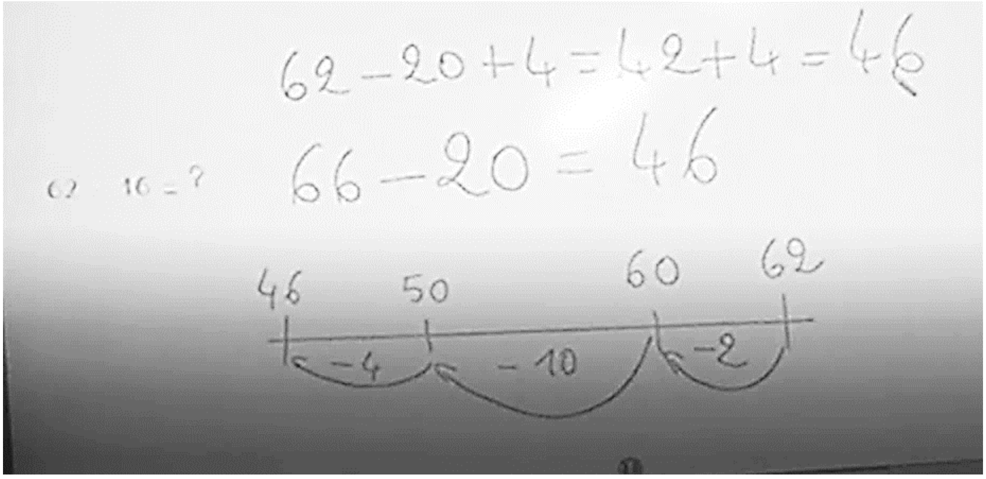
L'utilisation de $\tau_{N01C}$

Elève : « Moi j'ai fait soixante-deux plus vingt moins quatre ». Ce à quoi l'enseignant réplique qu'il peut le noter.

Nous présentons ci-dessous la photographie du tableau, suite à cette série d'échanges.

Figure 3

*Utilisations des écritures chiffrées et de la droite numérique pour calculer 62-16*




Cette trace écrite permet d'expliciter avec d'autres ostensifs que les mots de la langue française les différentes étapes qui ont conduit à trouver le résultat d'un calcul. Les ostensifs que sont les écritures arithmétiques ont l'avantage d'être très économiques, et par là même, voués à être de plus en plus utilisés dans la suite de la scolarité.

## Conclusion

La confrontation entre les résultats obtenus à l'évaluation diagnostique et à l'évaluation finale permet de mesurer les effets positifs d'un travail régulier et progressif à partir des écritures arithmétiques sur les apprentissages des élèves. En effet, plus des trois quarts des élèves, les deux classes confondues, arrivent à indiquer avec précision la technique qu'ils choisissent de mettre en œuvre. Ce n'était pas le cas avant d'avoir entamé l'étude. Ils se contentaient alors, de noter le résultat et utilisaient bien souvent le comptage pour le trouver. Ce n'était pas non plus le cas au tout début de l'étude car les enseignants des classes A et B pratiquaient beaucoup d'échanges oraux et n'engageaient pas un travail de réécriture. Le contrat didactique a évolué car la volonté d'expliciter les savoirs mathématiques qui se cachent derrière chaque calcul soustractif a été affirmée. Les *scenarii* proposés aux enseignants – par le chercheur – s'appuyaient sur l'utilisation des écritures arithmétiques, d'arbres à calculs et de la droite numérique pour décrire, mettre en œuvre et éventuellement valider les techniques attendues pour chaque calcul. Ces *scenarii* qui ont servi d'appui aux enseignants pour conduire les séances de calculs soustractifs méritent d'être questionnés davantage et retravaillés. La mise en relation par exemple des ostensifs n'est pas assez explicite et leur valence instrumentale et sémiotique peu discutées. En ce sens, le travail d'accompagnement des changements de pratiques de l'enseignement du calcul en CE2 amorcé par le chercheur – dans son travail de thèse – est à poursuivre et à enrichir avec d'autres travaux qui s'intéressent à la théorie anthropologique du didactique et à la professionnalisation du métier d'enseignant.

## Références


Artigue, M. L'intelligence du calcul. *Actes de l'Université d'été de mathématiques*, Saint Flour, 2005

http://www.ac-clermont.fr/disciplines/fileadmin/user_upload/Mathematiques/pages/site_math_universite/CD-UE/Texte_02.doc

Artigue, M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. In *: En amont et en aval des ingénieries didactiques,* Grenoble : la Pensée Sauvage, p.15-25, 2011.

Bobis, J., BobiS, E. *The empty number line : Making children's thinking visible*. 2005. file:///C:/Users/camille/AppData/Local/Microsoft/Windows/INetCache/IE/CFI21X57/Bobis%20J%20and%20E%202005.pdf

Bosch, M., Chevallard, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), p. 77-124, 1999.

Bosch, M., Gascon, J. La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In : *Balises pour la didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage, p. 107-122, 2005.

Butlen, D., Charles-Pezard, M. Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental entre sens et technique. *Grand N*, 79, p. 7-32, 2007.

Carpenter, T.-P., Franke, M.- L., Jacobs, V.-R., Fennema, E., Empson, S.-B. A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education*, 29(1), p. 3-20, 1997.

Castela, C., Romo Vazquez, R. Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 31(1), 7, p. 9-130, 2011.

Chevallard, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), p. 221-265, 1999.

Ernest, P. The number line as a teaching aid. *Educational studies in Mathematics,* 16, P. 411- 424, 1985.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J., Human, P., Murray, H., Olivier, A., Carpenter, T.-P., Fennema, E. Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, p. 130-162, 1997.

Gravemeijer, K. Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, p. 443-471, 1994.

Genestoux, F. (2002). Les assortiments didactiques. *Actes de la XIème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage, p. 177-186, 2002.