Explorando conceitos de Otimização com professores da Educação Básica em um curso de formação continuada: possibilidades para um trabalho em sala de aula

Exploring Optimization concepts with Basic Education teachers in continuing education course: possibilities of classroom work

---

ELENI BISOGNIN[1]

VANILDE BISOGNIN[2]

Resumo

Neste artigo são apresentados resultados de uma investigação que teve como propósito analisar a eficácia da metodologia de Resolução de Problemas para explorar conceitos de Otimização, a partir da realização de uma experiência de sala de aula com alunos de um curso de mestrado em Ensino de Matemática. Os dados foram coletados a partir das estratégias utilizadas pelos alunos nas soluções apresentadas por eles durante o desenvolvimento das atividades, dos registros dos questionamentos e discussões realizadas em sala de aula. Os resultados mostraram que os alunos apresentam dificuldades em analisar informações, fazer conjecturas, criar esquemas gráficos representativos das situações propostas e fazer generalizações. Os resultados evidenciaram, também, a importância de valorizar abordagens gráficas sobre o conteúdo e não somente uma abordagem algébrica.

Palavras-chave: *Resolução de Problemas; Otimização; Ensino e aprendizagem de Matemática.*

Abstract

This article presents results of a research aimed to examine the effectiveness of the Solving Problems methodology for exploring concepts of optimization, through the conduction of an experiment in a classroom with students of a master degree course in Mathematics Education. Data were collected from the strategies used by students in the solutions presented by them during the development of the activities, records of questionings and discussions conducted in the classroom. The results showed that students have difficulties in analyzing information, make conjectures, create graphical schemes representing the proposed situations and make generalizations. The results showed also the importance of valuing graphical approaches on the content and not just an algebraic approach.

Keywords: *Problem Solving; Optimization; Mathematics teaching and learning.*

Introdução

[1] Doutora em Matemática. Centro Universitário Franciscano, Santa Maria - eleni@unifra.br

[2] Doutora em Matemática. Centro Universitário Franciscano – vanilde.bisognin@gmail.com

De modo geral, quando o aluno ingressa na universidade, os professores requerem dele a aprendizagem de conceitos e habilidades que muitas vezes foram trabalhados na Educação Básica de forma rápida e sem muita formalização, sem levar em consideração que alguns conceitos relevantes foram abordados sem o apelo geométrico ou aspectos históricos de sua construção.

Além disso, ao entrar para a universidade, os alunos se deparam com problemas oriundos de diferentes contextos e uma grande quantidade de conceitos novos que necessitam, para sua compreensão, uma capacidade de abstrair, generalizar, utilizar uma linguagem formal, aspectos esses pouco trabalhados na Educação Básica, o que dificulta o trabalho e a discussão de detalhes de cada tópico.

O modo de abordar o conteúdo, juntamente com a grande quantidade de novos conceitos a serem aprendidos pelos alunos, faz com que esses se sintam inseguros, o que explica, em parte, a grande evasão que acontece nos cursos superiores, especialmente na área das Ciências Exatas. A forma de abordar o conteúdo matemático no início da vida universitária pode dificultar o avanço do pensamento matemático e dar origem a uma descontinuidade na difícil transição do ensino básico para o ensino de uma Matemática avançada.

Nos cursos de Licenciatura em Matemática, é na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral que os alunos têm, pela primeira vez, o contato com problemas de Otimização que necessitam, em geral, de representações geométricas. Apesar do conceito de Otimização ser descrito de modo natural em sala de aula, em geral há uma discrepância entre a ideia intuitiva e a linguagem formal, sobressaindo esse último aspecto.

Esse artigo é fruto do trabalho realizado com alunos de um curso de formação continuada, Mestrado em Ensino de Matemática, que concluíram há pouco tempo sua formação inicial. São descritos resultados de uma pesquisa que teve como propósito investigar a eficácia da metodologia de Resolução de Problemas no ensino de Matemática. Os dados foram coletados a partir das estratégias utilizadas pelos alunos nas soluções apresentadas por eles durante o desenvolvimento das atividades e dos registros dos questionamentos e discussões realizados em sala de aula.

1. A Resolução de Problemas

Resolver problemas tem sido um dos focos centrais para ensinar Matemática, mas apenas nos últimos anos os educadores matemáticos perceberam que a criação e resolução de problemas merece especial atenção.

Polya, um dos precursores da utilização da metodologia de Resolução de Problemas, sempre salientou seus benefícios para a aprendizagem da Matemática, pois essa metodologia coloca "o problema" como atividade central para o aluno. Para o autor, os problemas são divididos em duas categorias de acordo com suas abordagens; assim, têm-se problemas de rotina e problemas não rotineiros.

De acordo com Polya (1985), os problemas de rotina são formados pela adição de dados diferentes para problemas já resolvidos e sua solução consiste apenas na aplicação de um algoritmo cujos passos são conhecidos. O problema de rotina ocorre quando o aluno sabe a maneira adequada de encontrar a solução utilizando recursos computacionais ou fórmulas aplicáveis. Embora os problemas de rotina não sejam os mais recomendados, sua resolução desempenha um papel importante no desenvolvimento de habilidades computacionais.

Os problemas não rotineiros ou não convencionais requerem, do solucionador, uma organização, uma classificação, um estabelecimento de relações entre os dados, além de habilidades computacionais. Os problemas não rotineiros são aqueles que o solucionador não sabe como resolver e não é capaz de antever a solução, porque ela não é óbvia.

De acordo com Resnik e Collins (1996), um problema pode apresentar características diversas como, por exemplo, não ter solução óbvia, ser desconhecido o caminho da solução, necessitar ser analisado sob diferentes ópticas; muitas vezes a resposta não é única, pode haver muitas formas de resolver e pode não ter uma melhor solução.

Um problema deve apresentar uma verdadeira dificuldade para o aluno, um obstáculo a ser transposto e, portanto, não é independente do sujeito que vai resolvê-lo. Assim, ao se propor um problema, deve-se levar em conta a diversidade dos alunos, seus interesses e suas experiências, bem como os objetivos que se quer atingir. Essa sugestão está de acordo com Polya (1995):

> O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolve, pelos seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter. (p.5).

Para Schoenfeld (1998), ao se propor um problema deve-se procurar que esse possa ser resolvido de várias maneiras, que seja acessível, que propicie a introdução e exploração de ideias matemáticas. Um problema deve estimular o raciocínio matemático do aluno e não ser uma mera aplicação de um algoritmo, situações-problema apresentadas devem interligar diferentes ideias matemáticas. Para esses autores citados, o foco central para fazer Matemática está na Resolução de Problemas, pois esta metodologia auxilia no desenvolvimento do pensamento lógico, oportuniza a criação, a descoberta, a investigação e isto significa ensinar o aluno a pensar.

De acordo com Stanic e Kilpatrick (apud NASCIMENTO, 2004, p.34), têm-se três pontos importantes que caracterizam o papel da Resolução de Problemas no ensino de Matemática. O primeiro deles refere-se à Resolução de Problemas como meio para se atingir um fim; o segundo, como competência e o terceiro, como arte. No primeiro ponto, os autores destacam ainda subitens que caracterizam a utilização da Resolução de Problemas no ensino: a) a Resolução de Problemas como justificativa para se ensinar Matemática; b) como motivação para despertar o interesse do aluno; c) como recreação para possibilitar aos alunos algum divertimento com a Matemática; d) como veículo por meio do qual novos conceitos são aprendidos; e) como prática para reforçar conceitos ensinados.

Outro aspecto importante, intimamente relacionado com o processo de ensino e aprendizagem da Matemática e destacado por Nascimento (2004), é a formulação de problemas. De acordo com o National Council of Teachers of Mathematics (apud NASCIMENTO 2004, p.25) "Aos alunos deve ser dada a oportunidade para formular problemas a partir de situações criadas e através de modificações das condições de um dado problema", isto é, a formulação de problemas pode ser a criação de novos problemas ou a reformulação de problemas conhecidos.

Schoenfeld (1998) coloca que uma tarefa pode ser um problema para uma pessoa e ser um mero exercício para outra. Ainda, o mesmo autor afirma que "se alguém tem acesso a um esquema de solução para a tarefa matemática, essa tarefa é um exercício e não um problema". (SCHOENFELD,1985, p.74).

Polya, o primeiro matemático a apresentar uma organização do processo de resolução de problemas, dividiu esse processo em quatro etapas:

a) compreensão do problema;

b) construção de uma estratégia de resolução;

c) execução da estratégia;

d) reflexão sobre o trabalho realizado.

A última etapa corresponde à análise da solução obtida e a verificação dos resultados e dos argumentos utilizados.

A heurística indicada por Polya (1995) para resolução de um problema coloca sempre a indagação: é possível imaginar um problema mais acessível relacionado com o problema original? Essa reformulação propicia o desenvolvimento da criatividade do aluno e melhora sua capacidade de resolver problemas. A formulação de novos problemas pode ser um meio que propicia a análise do pensamento e das experiências matemáticas dos alunos.

Segundo Onuchic (1999), a metodologia de Resolução de Problemas, no Brasil, passou a ser valorizada como metodologia para a sala de aula a partir da década de oitenta do século XX. Desde então, essa abordagem passou a ser recomendada em documentos oficiais que tratam da Educação Básica e Superior, como pode ser visto nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio (BRASIL, 1998, 2002) e nas Diretrizes Nacionais para formação de professores de Matemática (BRASIL, 2001). Também, nessa década, muitos pesquisadores da área de Educação Matemática começaram a desenvolver pesquisas sobre a eficácia de sua utilização em sala de aula.

De acordo com a autora,

> Colocando o foco na Resolução de Problemas, defendemos que o ponto de partida das atividades matemáticas não é a definição, mas o problema; que o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória; que aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema e que, num outro momento, o aluno utiliza o que já aprendeu para resolver outros problemas; que o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas; que a Resolução de Problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem. (ONUCHIC, 1999, p.215)

A Resolução de Problemas visa um trabalho centrado no aluno, em que ele participa da construção do conhecimento e, ao final do processo, fará a formalização das ideias e dos conceitos construídos, utilizando a notação e terminologia adequadas. A autora salienta que o ponto de partida é o problema e não a definição, o teorema, lema e corolários.

Onuchic (1999) salienta a importância do professor ao trabalhar com a Resolução de Problemas e afirma que ele deve ter conhecimento dessa metodologia, pois ele é o responsável pela condução das atividades na sala de aula e esta deve transcorrer em um ambiente estimulante e motivador. A metodologia de Resolução de Problemas pode ser interpretada como forma de pensar, em que alunos e professores buscam diversas maneiras de resolver uma determinada situação e reconhecem a importância e relevância de justificar suas respostas com diferentes argumentos. É importante reconhecer também que, a partir de um problema, é possível estendê-lo a outras situações, fazendo novas conjecturas e formulando novas indagações.

De acordo com Trigo (2008), esse ponto de vista vem ao encontro dos princípios fundamentais do desenvolvimento do pensamento matemático, pois, segundo o autor, "um aspecto central no desenvolvimento do pensamento matemático é que os alunos adquiram os caminhos, estratégias, recursos e a disposição de envolverem-se em atividades que reflitam o fazer matemática". (p. 162).

Um dos papeis do professor, ao utilizar a metodologia de Resolução de Problemas em sala de aula, é de criar condições para gerar um ambiente que favoreça e desenvolvimento dos valores do fazer matemática em sua disciplina. Schoenfeld (1992, p.345), salienta que "as salas de aula devem ser comunidades nas quais o sentido matemático que se quer que os alunos desenvolvam, seja praticado." Portanto, utilizar a Resolução de Problemas para o desenvolvimento do pensamento matemático significa reconhecer a importância de relacionar o processo de desenvolvimento de uma determinada disciplina, em qualquer nível de ensino, com a construção do conhecimento matemático e com a aprendizagem dos alunos.

Ao tratar da Resolução de Problemas, Onuchic (1999) enfatiza que esta é uma metodologia de ensino, aprendizagem e avaliação, significando que esse último processo deve estar integrado ao ensino para melhorar a aprendizagem e deve estar mais centrado no processo de resolução e no progresso dos alunos do que no resultado final. Nesse sentido, segundo Kilpatrick e Silver (2000), quando a avaliação está associada e integrada ao ensino, ela se torna um instrumento valioso para que o professor aprenda sobre o modo como os alunos entendem determinados conceitos.

2. Pensamento Matemático Elementar *versus* Pensamento Matemático Avançado

Para Tall (1991), a passagem do pensamento elementar para o avançado envolve uma transição importante, que é da descrição para a definição, o de provar de forma lógica baseando-se nas definições. Essa transição requer um repensar do percurso no início do Ensino Superior, em que o aluno se depara com uma Matemática avançada que é construída por meio de deduções e definições formais.

Segundo Vinner (1991), construir um novo conhecimento matemático partindo-se de definições formais pode causar um conflito entre a estrutura da Matemática, do modo como é concebida pelos matemáticos, e o processo de aquisição de um conceito. Pesquisas desenvolvidas por Tall e Vinner (1981), Vinner (1983) e Vinner e Dreyfus (1989), mostram que existe um conflito entre a definição do conceito e a imagem do conceito. Os autores defendem que, para a introdução de um novo conceito, deve-se primeiramente explorar a construção de diferentes imagens do conceito.

De acordo com Tall e Vinner (1981), a imagem do conceito

> [...] descreve a estrutura cognitiva que está associada ao conceito, inclui todas as figuras mentais e propriedades associadas. Ela é desenvolvida ao longo dos anos através de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (p.152).

Para Tall e Vinner (1981, p.152), definição do conceito é "um conjunto de palavras usadas para descrever o conceito".

A imagem do conceito inclui todas as figuras mentais, bem como o conjunto de todos os pensamentos produzidos pela mente de um indivíduo em relação a um dado conceito, prevalecendo sempre a interação entre o sujeito e o tópico matemático em suas múltiplas representações.

Diferentes trabalhos de pesquisas têm abordado os conflitos cognitivos que surgem, ao tratar de um determinado tópico matemático, entre a definição do conceito e a imagem do conceito. Nos trabalhos de Tall (1977), Vinner (1992), Tall e Vinner (1981), Santos (2005), entre outros, os pesquisadores, ao tratar de um determinado conteúdo matemático, apontam ser desejável que primeiramente sejam construídas diferentes imagens do conceito e, a partir disso, seja construída a definição.

Segundo Vinner (1983), os conceitos devem ser adquiridos por meio da construção de diferentes imagens e esta construção inclui diferentes representações, como exemplos e contra exemplos, situações de problemas matemáticos que sejam desafiadores aos alunos, esquemas gráficos, figuras, tabelas e qualquer outro objeto matemático de natureza visual ou não, relacionado com o conceito.

Nesta direção, acredita-se que, por meio da Resolução de Problemas, é possível a criação de imagens do conceito que podem contribuir para a aprendizagem de novos conceitos matemáticos. As múltiplas representações, que o processo de resolução de problemas pode proporcionar, permitem que os alunos, em diferentes momentos, possam evocá-los e assim novos conteúdos podem se aprendidos.

Neste trabalho, explorou-se o tema Otimização a partir da proposição de um problema e, para sua resolução, foram seguidas as etapas sugeridas por Polya (1995). No processo de resolução, os alunos construíram diferentes imagens de conceito relacionadas ao tema e tiveram a oportunidade de vivenciar a aplicabilidade da metodologia de Resolução de Problemas para o estudo desse conteúdo.

3. Análise das Atividades

A questão central desta pesquisa foi propor atividades de modo que sua exploração despertasse a curiosidade e o interesse dos alunos na busca de solução. Os alunos, em um total de oito, são professores de escolas da Educação Básica, participantes de um curso de Mestrado em Ensino de Matemática. A atividade foi desenvolvida em sala de aula, com os alunos reunidos em grupos, trabalhando em duplas, aqui designadas por Dupla A, Dupla B, e assim por diante, e a tarefa da professora foi de estimular a discussão, a interação e a colaboração entre eles.

Foi proposto o seguinte problema: *um funcionário de uma empresa de energia elétrica anota mensalmente o gasto de cada residência numa rua. Determine o percurso que minimiza a distância a ser percorrida pelo funcionário.*

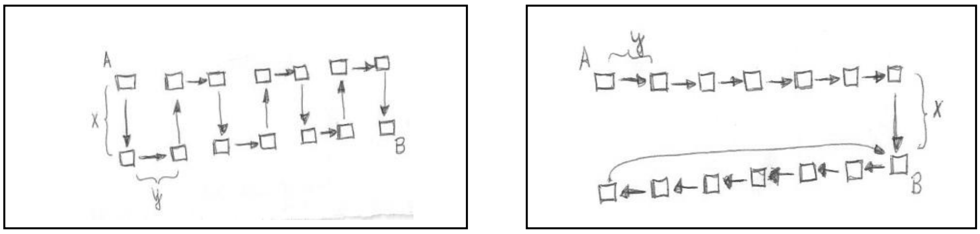
De acordo com Polya, o primeiro passo para solucionar o problema é compreendê-lo para, posteriormente, tentar solucioná-lo.

Inicialmente os alunos começaram a discutir algumas possibilidades, mas não chegaram a um consenso. Vendo a dificuldade dos alunos a professora lhes sugeriu considerarem um caso particular. Isto está de acordo com Polya (1995), que questiona se é possível imaginar um problema mais acessível relacionado com o problema original. Ela lhes sugeriu considerarem uma rua medindo *x* unidades de largura, tendo sete residências em cada lado distantes *y* unidades de medida umas das outras e determinar, nesse caso, qual a menor distância percorrida pelo funcionário.

Para responder à questão, foi sugerido aos alunos que fizessem um esquema representativo dos possíveis percursos.

Um aluno indagou se o funcionário poderia iniciar o percurso em qualquer residência. A professora respondeu com uma pergunta: que hipóteses podem ser consideradas neste caso? Eles discutiram, enfaticamente, sobre o modo de representar os esquemas, os pontos de partida e de chegada do funcionário e tentaram explicitar o raciocínio utilizado para suas conclusões.

Os alunos da Dupla A sugeriram que, primeiramente, o funcionário partisse de uma residência indicada por A, no início da rua, e chegasse à última residência indicada por B, do outro lado da rua; fizeram representações de dois possíveis percursos, D_1 e D_2, como mostrados na Figura 1, a seguir.



$D_{1}=7x+6y$ $D_{2}= x+18y$

Figura 1- esquemas representativos dos percursos elaborados pela Dupla A

A professora sugeriu aos alunos para descreverem as estratégias por eles utilizadas para determinação dos percursos. Ao ver os esquemas, indagou: qual desses percursos minimiza a distância percorrida pelo funcionário?

Os alunos analisaram os dois percursos. Um aluno comentou que achava o percurso D_1 maior porque tinha sete vezes a largura da rua e outro aluno, da Dupla D, lembrou que a largura da rua era a mesma e que o enunciado do problema dizia que a distância entre as residências era igual. Essa compreensão do problema permitiu que eles comparassem os percursos. Concluíram que o percurso D_1 é menor desde que seja satisfeita a condição

7x+6y < x+18y e que essa desigualdade só é verdadeira se x < 2y, isto é, a largura da rua deve ser duas vezes menor do que a distância entre as residências.

Tall (1994) aponta que estudantes, em geral, apresentam dificuldades em fazer a conexão entre as representações analítica e gráfica. O autor afirma que isto pode estar relacionado ao tipo de trabalho de sala de aula, em que prevalecem os aspectos técnicos.

A professora lembrou aos alunos que essa condição era válida para esse caso particular, porém eles não podiam afirmar sua validade para qualquer número de casas. Os alunos responderam que poderiam considerar outros casos para verificar a validade da conjectura. Consideraram, primeiramente, uma rua com oito casas, depois com dez casas de cada lado, fizeram novos esquemas e refizeram os cálculos, obtendo sempre a mesma condição.

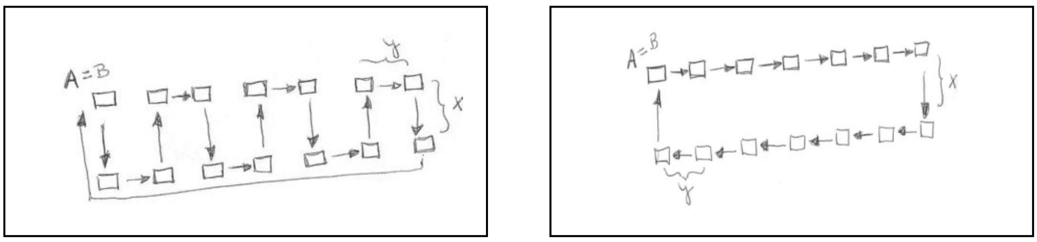
A professora, então, indagou: e se a rua tiver n casas de cada lado?

A partir da análise dos casos particulares, os alunos determinaram os dois percursos, D_1= nx + (n-1)y e D_2 = x+3(n-1)y, mantendo o mesmo ponto inicial e final dos casos particulares. Assim, analisando a desigualdade nx + (n-1)y < x+3(n-1)y chegaram à mesma condição, ou seja, x < 2y, e concluíram que essa condição é válida qualquer que seja o número de casas de cada lado da rua.

A busca de generalizações também é uma das etapas do processo de resolução de problemas.

Os alunos da Dupla C colocaram que a condição foi obtida considerando que o funcionário parte da primeira casa no início da rua e termina na última casa do outro lado da rua e conjecturaram: será que, no caso particular de sete casas de cada lado da rua, com o funcionário partindo de uma casa e retornando até ela, vamos obter a mesma condição?

Para essa nova situação, os alunos esquematizaram duas possibilidades de percurso, como mostradas nos esquemas da Figura 2, a seguir.



$R_1 = 8x + 12y$ $R_2 = 2x + 12y$

Figura 2: esquemas do percurso com 7 casas de cada lado da rua feitos pela Dupla C.

Para o caso de haver sete casas de cada lado da rua, com a condição de partir e chegar à mesma residência, os alunos obtiveram os percursos $R_1=8x + 12y$ e $R_2 = 2x+12y$, de acordo com os esquemas da Figura 2.

Os alunos observaram que a condição dos casos anteriores não se repetia e, em ambos os percursos obtidos, aparecia sempre o mesmo termo em y. A professora perguntou: o que isso significa?

Eles responderam que a solução dependia somente da variável x e não dependia da variável y.

A professora questionou: mantendo-se a mesma hipótese, se tivermos oito casas de cada lado da rua, a que conclusão pode-se chegar?

Os alunos esquematizaram os percursos e obtiveram que $R_1 =8x +14y$ e $R_2 = 2x +14y$ e concluíram, como anteriormente, que a solução dependia apenas da varável x.

A professora voltou a indagar: é possível generalizar para o caso de haver n casas de cada lado da rua?

No caso de ter n casas de cada lado da rua, os alunos não conseguiram fazer uma generalização e foi preciso a intervenção da professora que os instigou a analisar separadamente os casos em que havia um número par e um número impar de casas de cada lado da rua.

No caso de n ser um número par, os alunos descreveram os percursos $R_1= nx + 2(n-1)y$ e $R_2 = 2x+2(n-1)y$. Neste caso, da comparação entre os dois percursos, concluíram que os termos em y são iguais e, como x é positivo encontraram a condição $n < 2$, o que é impossível porque n é um número natural e isto indicaria que a rua não tem casas. No caso de n ser ímpar, os percursos foram descritos por $R_1= (n+1)x+2(n-1)y$ e $R_2 = 2x+2(n-1)y$ e, comparando os dois percursos, obtiveram a condição $n < 1$, o que também é impossível.

Os alunos sentiram dificuldades para interpretar esta condição e compreender seu significado. Foi necessário discutir em grande grupo para concluir que estas condições são impossíveis e, portanto, o percurso R_2 é preferível, quaisquer que sejam os valores de x e de y, ou seja, a solução independe dessas variáveis.

A professora indagou: esse resultado poderia ser obtido pela análise da representação geométrica?

A partir das questões propostas, os alunos iniciaram uma discussão sobre outras possibilidades para representar os percursos. Observou-se que eles haviam construido uma imagem do conceito, do menor percurso que o funcionário poderia percorrer para fazer a distribuição, pois conseguiram trabalhar este conceito em uma situação concreta.

Não lhes foi difícil entender o resultado no caso particular e a representação gráfica dos esquemas auxiliou-os a compreender o problema. Isto indica que a representação dos esquemas gráficos permitiu a construção de imagens conceituais relacionadas com a Otimização do percurso. Isto está de acordo com o que afirmam Tall e Vinner (1981), sobre a importância de utilizar diversas representações para construção de imagens do conceito.

Durante o desenvolvimento da atividade, a professora percebeu que os alunos estavam entusiasmados, indagando, questionando e colaborando na busca de solução do problema. Mostraram-se criativos e participativos e isto está de acordo com Polya (1985, p.14), quando afirma que: "o problema que não se resolve por rotina exige um certo grau de criação e originalidade por parte do aluno".

Percebendo o entusiasmo dos alunos, a professora desafiou-os a tentarem responder o problema proposto considerando outras formas de efetuar o percurso. Essas questões ficaram como desafios para os alunos continuarem seus trabalhos, fazendo novas conjecturas e buscando novas soluções.

4. Considerações finais

Da análise das respostas dos alunos ao problema, observou-se que eles se sentiram desafiados e, apesar de algumas dificuldades iniciais para a compreensão do problema, se mostraram criativos na busca da solução. Foi possível verificar que os esquemas desenhados auxiliaram os alunos a compreenderem o significado do conceito matemático e a busca de generalização. Observou-se, também, que os alunos criaram imagens do conceito de Otimização que contribuíram para a sua compreensão.

As imagens do conceito estão relacionadas com o trabalho realizado em sala de aula. O problema proposto não estava centrado no desenvolvimento de algoritmos e de regras, mas na utilização de representações gráficas que desafiaram e motivaram os alunos para o estudo.

A forma como os conceitos são ensinados em sala de aula faz com que os alunos se sintam capazes de utilizá-los na resolução de atividades que envolvem estes conceitos em outros contextos. De acordo com Pinto (2009, p.33), “uma vez constituída a imagem de um conceito, é a esta imagem que nos referimos, ao ouvirmos o nome do conceito”.

Em relação ao objetivo deste trabalho, constatamos que a maioria dos alunos sentiu-se desafiado e a aplicação dessa atividade trouxe um impacto sobre a concepção que cada um tinha sobre a eficácia da metodologia de Resolução de Problemas para ensinar Matemática. O modo de ensinar foi visto não mais como algo monótono e passivo, mas de modo participativo e motivador. Os alunos envolveram-se totalmente na busca da solução das questões propostas, integrando-se e responsabilizando-se pelo trabalho a ser realizado. A situação desafiadora apresentada permitiu que eles falassem, argumentassem, discutissem e escrevessem os resultados matemáticos encontrados, contribuindo dessa forma com a sua autonomia.

A aplicação dessa atividade trouxe, também, um impacto sobre a prática docente, pois problemas que favorecem os alunos a se expressarem de modo escrito e oral permitem a identificação do raciocínio desenvolvido por eles ao solucionarem o problema proposto.

Nesse sentido, cabe ao professor compreender como se processa o raciocínio dos alunos, principalmente em tópicos abstratos de Matemática, o que pode provocar mudanças para melhoria de sua prática pedagógica.

Por meio da atividade proposta, em que conceitos relacionados à teoria da Otimização foram explorados, procurou-se apresentar aos alunos, professores da Educação Básica, formas de expandir sua capacidade de realizar a mediação pedagógica incorporando novos conceitos que, em geral, não são explorados no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Além disso, proposta pedagógica como a apresentada nesse artigo permite a aprendizagem dos próprios professores, pois a metodologia da Resolução de Problemas propicia uma interação entre professor e alunos num processo dinâmico de construção do conhecimento.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais:* Matemática. Brasília, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Ensino Médio. Brasília, 2002.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. *Parecer nº 1.302 de 6 de novembro de 2001 – CNE/CES.* Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>. Acesso em 20 set. 2013. out. 2006.

NASCIMENTO, M. J. T. *Programação Linear:* uma proposta de intervenção didáctica no ensino secundário. 2004. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática), Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Portugal.

KILPATRICK, J; SILVER, E. A. Unfinished Business: Challenge for Mathematics Educators in the Next Decades. In: BURKE, M. J; CURCIO, F. (Org.). *Learning Mathematics for a New Century*, Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, 2000. p.223-235.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática:* concepções e perspectivas. São Paulo: Ed. UNESP, 1999. p.199-220.

PINTO, M. M. F. Revisitando uma teoria: o desenvolvimento matemático de estudantes em um primeiro curso de Análise Real. In: FROTA, M. C. R. NASSER, L. (Org.). *Educação Matemática no Ensino Superior*. Recife: SBEM, 2009. p. 27-42. Biblioteca do Educador Matemático. Coleção SBEM.

POLYA, G. A. O Ensino por Meio de Problemas. *Revista do Professor de Matemática*, n.7, p.11-16, 2. sem. 1985.

POLYA, G. A. *A arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

SANTOS, M. G. *Um estudo sobre a convergência de sequências numéricas com alunos que já tiveram contato com a noção de limite*. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SCHOENFELD, H. H. *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press, 1985.

SCHOENFELD, H. H. Porquê toda essa agitação acerca da resolução de problemas? In: ABRANTES,P .; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (Orgs.). *Investigar para Aprender Matemática*. Lisboa: APM, 1998. p.61-71.

SCHOENFELD, H. H. Learning to Think Mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in Mathematics. In: GROWS, D. A. (Ed). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, 1992. p. 1-102.

RESNIK, L.; COLLINS, A. Cognición y Aprendizaje. *Anuario de Psicología*, n. 69, p. 189-197, 1996.

TALL, D. *Cognitive conflict and the learning of mathematics*. 1977. Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1977a-cog-confl-pme.pdf> . Acesso em: 20 abril 2011.

TALL, D. The Psycology of Advanced Mathematical Thinking. In: TALL, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, 1991. p.3-21.

TALL, D. *Cognitive difficulties in learning analysis*. 1994. Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1994h-analysis-talum.pdf >. Acesso em: 20 abril 2011.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, n.12, p.151-169, 1981.

TRIGO, M. S. La Resolución de Problemas Matemáticos. Avanços y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica. In: LUENGO GONZÁLEZ, R.; GÓMEZ ALFONSO, B.; CAMACHO NACHBIN, M; BLANCO NIETO, L. J; (Coord.). *Investigación en Educación Matemática.* Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 2008. p. 159-187.

VINNER, S. Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Education in Science and Tecnology*, v.14, p.293-305, 1983.

VINNER, S: DREYFUS, T. Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, v.20, p.356-366, 1989.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning mathematics. In: TALL, D. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer, 1991. p.65-81.

VINNER, S. The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. In: HAREL, G.; DUBINSKY, E. (Orgs). *The Concept of Function:* aspects of epistemology and pedagogy**.** Washington: Mathematical Association of America, 1992. p. 195-213.