À busca de uma epistemologia do professor: a propósito da construção do número natural

Research to a epistemology of the teacher: in terms of the natural number construction

WILSON PEREIRA DE JESUS[1]

Resumo

Uma digressão acerca do conhecimento e do conhecimento matemático tendo como foco o conceito de número natural e o sistema de numeração decimal. Trata-se de um convite aos professores da educação básica, principalmente para professores dos anos iniciais do ensino fundamental. Discute questões adstritas ao conhecimento matemático; à construção do conceito de número natural respaldando-se em concepções da epistemologia evolucionária e da epistemologia genética. Aplica as concepções epistemológicas da matemática num exemplo baseado em experimentos com estudantes de graduação acerca da construção do número natural e do sistema de numeração decimal utilizando recursos materiais simples.
Palavras-chave: *epistemologia*; *número natural*; *construção do número*

Abstract

A digression about the knowledge and mathematical knowledge focusing on the concept of natural numbers and the decimal numbering system. This is an invitation to teachers of basic education, mainly for teachers from early years of elementary school. One discusses issues assigned to the mathematical knowledge; to the construction of the concept of natural number based on conceptions of evolutionary epistemology and of genetic epistemology. Epistemological conceptions of mathematics are applied to an example based on experiments with undergraduates about the construction of the natural numbers and the decimal numbering system using simple materials resources.
Keywords: *epistemology*; *natural number*; *construction of number*

Introdução

Parece-nos conveniente considerar que toda reflexão acerca do ensino de matemática deve ser precedida por uma reflexão acerca do conhecimento em geral e do conhecimento matemático. Porque toda prática social quando orientada por uma teoria, tem maior chance de mostrar-se fértil. E aquele que teoriza acerca de sua ação, pode entrar num processo cada vez mais refinado de crítica que, refletir-se-á no burilamento do seu pensamento e, na qualidade da sua ação. Por isso, a ausência de

[1] Universidade Estadual de Feira de Santana - wpereira@uefs.br

reflexão histórica e filosófica pode gerar práticas pedagógicas autoritárias no terreno da formação de professores de matemática.

Nossa perspectiva acerca do conceito de número é lastreada em uma concepção de conhecimento proposta por Álvaro Vieira Pinto. Embora não seja uma criação dele foi através de sua pena que tomamos contato com essa bela *weltanschauung*. A partir desse lastro fomos tecendo algo que poderíamos chamar de *epistemologia de professor* para orientar a nossa relação com o conhecimento matemático e com a atividade de transmissão desse conhecimento. Nesse sentido as ideias de Piaget e de Constance Kamii vieram para completar o quadro de referência no processo de compreensão da construção do número pela criança.

O problema do conhecimento

Para Vieira Pinto não há sentido em falar de um *conceito* de conhecimento. Seria isso uma petição de princípio, pois o conceito se define como produto do conhecimento e a simples possibilidade do enunciado do termo *conceito* só se verifica no âmbito do conhecimento já realizado (VIEIRA PINTO, 1979, p.15). Ele ainda aduz que

> o conhecimento existe desde que a organização da matéria começa a tomar o caráter que a diferenciará, enquanto sistema vivo, do resto da natureza, que permanecerá inerte. É um dado indisputável da ciência que a matéria existe e sempre existiu em estado de transformação permanente, que uma parte dela se diferencia num processo particular, que constitui a evolução biológica, geradora de todos os seres vivos (VIEIRA PINTO, 1979, p.16).

A abrangência de tal concepção dá ao conhecimento limites demasiado amplos. E o caracteriza como uma atividade biológica. E, em sendo biológica, será histórica e social.

> O conhecimento é, em toda a sua escala, um modo de atuar do ramo do processo da realidade material que se especializou em forma de vida, e se constitui pela evolução biológica. Por isso o grau que o conhecimento atinge em cada etapa dessa evolução, ou seja nas diversas espécies que se sucedem, representa sempre a característica mais saliente da realidade de cada espécie, na posição evolutiva em que se encontra. No homem, tal característica consiste em que o conhecimento só pode existir como fato social (VIEIRA PINTO, 1979, p.18).

A caracterização do processo do conhecimento em Vieira Pinto se distingue por três grandes etapas. A dos reflexos primordiais; a do saber; a da ciência. E em todas elas a natureza intrínseca do conhecimento é sempre a mesma:

> é a capacidade que o ser vivo possui de representar para si o estado do mundo em que se encontra, de reagir a ele conforme a qualidade das percepções que tem, e sempre no sentido de superar os obstáculos, de solucionar as situações problemáticas, que se opõem à finalidade a princípio inconsciente, de sua sobrevivência como indivíduo e como espécie, mais tarde tornada plenamente consciente na representação do mais desenvolvido dos seres vivos, o homem (VIEIRA PINTO, 1979, p.20).

Para Vieira Pinto haveria várias etapas no desenvolvimento do conhecimento, e no homem, outras etapas se proliferariam até o nível superior de conhecimento que é o científico dialético.

O conhecimento, por ser próprio da matéria orgânica e por ser decorrente do existir do ser vivo no mundo, seria um processo biológico; mas, também social, como ele mesmo ressalta.

A evolução biológica se caracteriza pelo domínio que todo ser vivo, em alguma medida, exerce sobre o meio em que se encontra. E a condição indispensável para que o indivíduo ou a espécie realize o seu domínio da natureza é conhecer o mundo.

O caráter biológico do processo do conhecimento, como aparece em Vieira Pinto pode ser relacionado também com concepções do biólogo francês André Bourguignon. Este ratifica, em termos biológicos, a evolução do homem na construção da sua racionalidade. Diz Bourguignon:

> é quase desnecessário lembrar que é no nível do SNC (Sistema Nervoso Central) que aparecem as maiores especificidades da espécie humana, não tanto do ponto de vista dos constituintes químicos como no da organização. O SNC humano caracteriza-se antes de tudo por uma imensa desproporção entre as vias reservadas às entradas e às saídas do sistema, que comandam a relação com o mundo exterior, e aquelas destinadas ao tratamento e à estocagem de informação (...) O SNC do homem permitiu-lhe um novo modo de relação com o mundo, sobre o qual tem um domínio real, ainda que parcial. Graças ao SNC, o homem tornou-se o agente de sua própria evolução, enquanto o animal continua a depender de seu ambiente, sujeito à sua influência e seus imperativos, que comandam sua sobrevivência.
>
> Quer por sua diversidade genética quer pela organização de seu SNC, o homem adquiriu meios para se adaptar a todos os ambientes, a todas as circunstâncias, mas talvez tenha perdido, ao mesmo tempo, meios de evoluir de outra forma que não no nível cultural (BOURGUIGNON, 1990, p.163-4).

Falando acerca da abertura e fechamento do SNC, o autor relata que no homem o SNC exibe o maior fechamento, pois as vias de entrada e saída que emparelham o organismo com o mundo externo,

> não representam mais que 0,02% do conjunto, ao passo que as 99,98% restantes são consagradas aos comportamentos próprios do sistema, isto é, ao tratamento da informação, à elaboração das necessidades, dos desejos, das intenções e das escolhas, de que dependem as condutas.(...) Por esse funcionamento em circuito quase fechado, o SNC do homem criou um mundo psíquico relativamente independente, que controla por meio da consciência do eu, último estádio do fechamento do sistema.
> O fechamento relativo criado pela consciência reflexiva e criativa, está associado no homem à abertura pela linguagem, não mais abertura para o mundo inanimado ou para o dos bichos e das plantas, mas para o mundo social, o da cultura, o de seus semelhantes, abertura que multiplicou as capacidades criativas de seu espírito. Infelizmente, como cada um, em virtude de sua especificidade genética e histórica, possui um sistema de referência e de avaliação muito personalizado, a comunicação pela linguagem continua sendo ainda, com demasiada freqüência, fonte de mal-entendidos entre os homens, mal-entendidos simbolizados pela história da torre de Babel (BOURGUIGNON, 1990, p.166).

A convergência que encontramos entre as idéias de Vieira Pinto e Bourguignon é bastante plausível. E comportaria um estudo à parte, vez que os dois pensadores, separados por um tempo considerável, se encontram, mesmo partindo de tempos e pontos diferentes, cremos, nas considerações acerca da evolução da espécie humana.

Considerações de Yehuda Rav (1993) podem ser postas lado a lado com as de Bourguignon e de Vieira Pinto. Rav, utiliza-se de uma citação de Donald Campbell, retirada de um trabalho em honra a Sir Karl Popper:

> Uma EE [epistemologia evolucionária] seria no mínimo uma epistemologia tomando conhecimento de e compatível com o status do homem como um produto de evolução social e biológica. No presente ensaio é também sustentado que evolução – mesmo em seus aspectos biológicos – é um processo de conhecimento (...) (CAMPBELL, 1974, p.413 *apud* RAV, 1993, p. 82)

A epistemologia evolucionária foi, independentemente, concebida por Lorenz, um biólogo; Campbell, um psicólogo; e Vollmer, um físico e filósofo. A expressão "epistemologia evolucionária" aparece, segundo Rav, pela primeira vez em um ensaio de Campbell.

Por outro lado, gostaríamos de evocar uma reflexão de Kant quando afirma que:

> Não resta dúvida de que todo o nosso conhecimento começa pela experiência; efetivamente, que outra coisa poderia despertar e pôr em ação a nossa capacidade de conhecer senão os objetos que afetam os sentidos e que, por um lado, originam por si mesmos as representações e, por outro lado, põem em movimento a nossa faculdade intelectual e levam-na a compará-las, ligá-las ou separá-las, transformando assim a matéria bruta das impressões sensíveis num conhecimento que se denomina experiência? Assim, na ordem do tempo, nenhum conhecimento precede em nós a experiência e é com esta que todo o conhecimento tem o seu início (KANT,1989, p.36).

Mas ao longo da sua reflexão, Kant pondera que se todo o conhecimento se inicia com a experiência, não quer isso dizer que todo ele derive da experiência. E a reflexão kantiana se dirige no sentido de categorizar o conhecimento em dois tipos: independente da experiência e de todas as impressões dos sentidos, ao qual ele denomina de *a priori*; e aquele cuja origem se dá na experiência, isto é, *a posteriori*.[2]

A partir desse lastro tecemos uma *epistemologia de professor* para orientar a nossa relação com o conhecimento matemático e com a atividade de sua transmissão. Nesse sentido as ideias de Piaget e de seguidores seus vieram para completar o quadro. Constance Kamii é uma referência importante no processo de compreensão da construção do número pela criança. E é em *A criança e o número* que encontramos inspiração para uma parte dessa construção nas nossas apresentações para professores da educação básica.

O conceito de número natural fora algo que, sendo tão "natural" pouco ou quase nada preocupara aos meus professores da educação básica. Contudo, cedo tive a intuição de que compreender esse ente e o sistema de numeração decimal seria muito importante para uma significativa iniciação das nossas crianças à matemática.

Para Pitágoras *tudo é número*. E número, na perspectiva dos pitagóricos, era visto como a porção ínfima constitutiva de tudo o que existe. Poderíamos conjecturar acerca da certeza intuitiva de Pitágoras em meio ao nosso mundo digital. E número aqui pode ser uma determinada frequência, ou um conjunto de dimensões. E nesse caso o número dá conta de estados vibracionais e não de arranjos espaciais como ocorre aos números triangulares, quadrangulares, poligonais, dos pitagóricos.

Mas esse ente sem peso, cheiro ou cor pode dar conta de quase tudo em nossas referências às coisas dos mundos físico ou não físico. É análogo ao átomo da química, parte constituinte de tudo o que há no mundo físico; e talvez, seja mesmo anterior porque há quem ponha o número *entre* forma e matéria. Mas essa é uma questão mais adstrita a um exercício de especulação criativa do que ao processo de iniciação dos nossos professores à iniciação das crianças ao mundo da ciência, da racionalidade, do domínio e construção de habilidades intelectuais no espaço do conhecimento escolar.

[2] Essa reflexão fora elaborada por mim no período do meu processo de doutoramento em educação, sob a orientação do professor A. M., meu orientador e inspirado por idéias dos professores C. C. B. (na graduação) e dos professores C. B. e L. F. S. (na pós-graduação).

O conceito de número

Em *Qué es la matemática?* assim começam Courant e Robbins:

> *Los números son la base de la matemática moderna. Ahora bien: qué es un número? Qué significado tiene decir1/2+1/2=1,1/2.1/2=1/4 y (-1)(-1)=1? (...)*
> *Por suerte, los matemáticos no tienen que ocuparse del aspecto filosófico de la transición que da el paso de colecciones de objetos concretos al concepto abstrato de número.* (COURANT e ROBBINS, 1955, p.8)

Os filósofos da matemática, os educadores matemáticos, os psicólogos, e alguns pedagogos são os que muito se ocupam com o processo da formação do conceito de número em nossas crianças. Buscando encontrar em Trejo (1978), na monografia *El concepto de numero* alguma outra abordagem que fosse diferente da de Courant e Robbins, deparamos com a estrutura axiomática da teoria de conjuntos permeando a apresentação dos números naturais. Nesse sentido a axiomática de Peano e Dedekind é já clássica.

A nossa busca é por uma estratégia de discurso que não desconheça os sistemas dedutivos que sustentam a estruturação dos conjuntos numéricos, mas que seja anterior a esse processo, passe por ele e o leve em conta no bojo de suas considerações, tendo em perspectiva, motivações sócio-históricas e ou pedagógicas, que de alguma maneira considerem a dimensão cultural do processo de construção do conceito de número.

Tal conceito não é algo lá muito firme, mesmo em ex-alunos dos cursos de licenciatura em matemática. E mais uma nossa pergunta é por que as pessoas têm tantos elementos vagos na exposição de suas concepções de número. E quando falamos de número aqui, estamos a falar de números naturais, aqueles que, por abuso de notação, explicitamos o referido conjunto assim: N={0, 1, 2, 3, ...}.

Desse modo, a pergunta geradora de tantos mal-entendidos num processo de esboço de um provável mapa conceitual das pessoas envolvidas com a iniciação das nossas crianças e adolescentes, à matemática é: O que é número?

Ainda nessa nossa busca, já um tanto preocupante, por um tratamento dos números fora da alta densidade abstrata, ou seja, descolado de aspectos ontológicos, encontramos em Toranzos (1949, p.81) o seguinte:

> *El número natural puede introducirse como concepto primitivo o como derivado de la teoría de las clases. En el primer caso, debe fundamentarse axiomáticamente; tal es el camino seguido, entre otros, por Peano. En el segundo caso se define el número por abstracción partiendo del cálculo de clases. Entonces las propriedades del número resultan teoremas deducidos de los de ese cálculo; este camino, iniciado por Cantor y seguido por Frege, ha sido perfeccionado por Russell y Whitehead, los cuales lo exponen en forma completa en la obra "Principia Mathematica".*

> *En el concepto de número natural están involucrados dos aspectos que no se contienen el uno al otro, sino que son complementarios, el* cardinal *y el* ordinal. *Más adelante precisaremos estos aspectos. Por ahora sólo diremos que el número, en su aspecto cardinal y referido a un conjunto de objetos, responde a la pregunta de cuántos objetos?, y aparece como un atributo del conjunto caracterizado mediante la correspondencia de conjuntos. El número ordinal responde a la pregunta: Cuál?, y depende de una relación de orden entre los objetos del conjunto.*
> *De acuerdo a lo dicho anteriormente, hay dos formas de establecer la Aritmética del número natural; estudiando primeramente la teoría ordinal del número y, posteriormente, deduciendo la teoría cardinal, o viceversa. Estos dos caminos pueden hacerse corresponder, respectivamente, a las dos anteriormente indicadas para fundamentar el concepto de número (Esto no es esencial; Hobson estudia el número ordinal derivado directamente de la teoría de conjuntos). Tenemos así que el sistema de Peano es axiomático y ordinal en su iniciación y posteriormente desarrolla la teoría cardinal; mientras que el de Russell desarrolla la Aritmética Cardinal como capítulo de la teoría de las clases y, posteriormente, introduce el número ordinal.* (TORANZOS, 1949, p.81-82)

De posse dessas informações talvez nos reste uma outra alternativa além da de sairmos por aí a inquirir das pessoas, como fizera ilustre grego no florescimento, do que insisto em chamar de a forma característica do pensar ocidental. Quiçá seja mais fácil buscarmos resposta acerca de o que é a matemática. E como Omnès (1996, p.136) concluirmos que *as matemáticas são um produto do cérebro humano, e são feitas por homens que vivem em sociedade*. Ou como Wittgenstein, afirmarmos que *a matemática é uma atividade*. Esta, possuidora de algo idiossincrático: os números. Mas não queremos nos ater a idéias muito sofisticadas destes. Basta-nos a idéia de número natural. Pois bem, o que é este alicerce, este fundamento, fruto do poder criador da mente de homens que vivem em sociedade?

A forma como na escola as crianças lidam com a idéia de número leva mais a um condicionamento para operar com um determinado sistema de numeração do que à elaboração do conceito, tão fundamental e crucial para a matemática, ao lado do conceito de forma, o que torna essa ciência indispensável para os demais campos de atuação humana, seja na ciência *pura*, seja na ciência *aplicada* e na tecnologia.

Os estudos de Piaget acerca do desenvolvimento intelectual da criança abordam dois aspectos:

> o aspecto psico-social, quer dizer, tudo o que a criança recebe do exterior, aprende por transmissão familiar, escolar educativa em geral; e depois, existe o desenvolvimento que podemos chamar espontâneo, que chamarei psicológico, para abreviar, que é o desenvolvimento da inteligência mesma: o que a criança aprende por si mesma, o que não lhe foi ensinado, mas o que ela deve descobrir sozinha; e é isso essencialmente que leva tempo (PIAGET, 1983, p. 211)

> é sobre o aspecto espontâneo da inteligência que estudarei, sendo o único do qual falarei, porque sou psicólogo e não educador; e também, porque do ponto de vista da ação do tempo, é precisamente esse desenvolvimento espontâneo que constitui a condição preliminar evidente e necessária para o desenvolvimento escolar, por exemplo. (PIAGET, 1983, p. 212)

Piaget atém-se ao processo de construção das estruturas de pensamento na criança, estruturas essas pré-requisitos para o desenvolvimento escolar, intelectual das crianças. Consideramos que esse pensador, juntamente com os seus colaboradores têm muito a dizer para os professores de matemática no que se refere ao desenvolvimento dos estudantes na sua iniciação à matemática; embora o seu foco não fosse a aprendizagem em matemática, mas o processo de construção do conhecimento.

Atentemos para a concepção de matemática esboçada por Piaget no seu *Epistemologia Genética* quando atém-se a considerações acerca da epistemologia das matemáticas:

> (...) porque as novidades incessantes engendradas pelo trabalho das matemáticas não são nem descobrimentos, visto que se trata de realidades não dadas de antemão, nem de invenções, visto que uma invenção comporta uma margem apreciável de liberdade, ao passo que cada nova relação ou estrutura matemática se caracteriza por sua necessidade tão logo é construída: esta "construção necessária" suscita pois a questão de seu mecanismo construtivo. Ora, o interesse da dimensão genética é de mostrar nesta questão certa convergência entre o que dela dizem os matemáticos e o que a análise dos estágios elementares revela, donde as hipóteses possíveis sobre as raízes psicológicas e mesmo biológicas de tais construções. (PIAGET, 1983, p. 45)

Nosso estudo busca pois fundamentar-se na Epistemologia Genética, com suas teorias acerca dos estágios de desenvolvimento intelectual da criança e os seus desdobramentos na educação matemática; e fundamentar-se na filosofia da matemática presente em Frege (1974), no seu *Fundamentos da Aritmética*. Porque embora as preocupações de Piaget repousem sobre o processo de elaboração das estruturas de pensamento e as preocupações de Frege digam respeito à formalização dos fundamentos da aritmética, tanto um quanto o outro, direta ou indiretamente, estão presentes nas aulas de matemática na escola da educação básica. A concepção de matemática de Piaget é de conotação formalista; o que pode ser ratificado pelo que ele declara acerca da fecundidade do método axiomático:

> Os três problemas principais e clássicos da epistemologia das matemáticas mostram com toda clareza por que são indefinidamente fecundos ao

partirem de conceitos ou axiomas pouco numerosos e relativamente pobres; porque se impõem de maneira necessária e permanecem pois constantemente rigorosos, malgrado seu caráter construtivo que poderia ser fonte de irracionalidade; e porque entram em acordo com a experiência ou a realidade físicas, não obstante sua natureza totalmente dedutiva. (PIAGET, 1983, p. 44-45)

O próprio Frege afirma, a propósito do conceito de número:

> minhas considerações tornaram-se por isso, é certo, bem mais filosóficas do que pode parecer apropriado a muitos matemáticos; mas uma investigação radical do conceito de número deverá sempre resultar, um tanto filosófica. Essa tarefa é comum à matemática e à filosofia. (...)
> A instabilidade e indeterminação de todas estas configurações opõem-se firmemente à determinação e estabilidade dos objetos e conceitos matemáticos. Na verdade, pode ser útil examinar as representações, e a alternância das representações, que aparecem no pensamento matemático; mas que a psicologia não imagine poder contribuir em algo para a fundamentação da aritmética. Ao matemático enquanto tal são irrelevantes estas imagens internas, sua gênese e modificações (FREGE, 1974, p. 205-6).

Ao considerarmos as filosofias da matemática (não fundamentalistas) consideraremos concepções de matemática e de número, em alguns aspectos diametralmente opostas àquela de Frege. A título de exemplo, há concepções de matemática que consideram as questões vinculadas aos processos de descoberta tão legítimas quanto as questões vinculadas à justificação do conhecimento.
Consideremos o que Frege expõe de vários autores acerca do conceito de número:

> Atentando agora aos objetos primitivos da aritmética, distinguimos os números singulares 3, 4, etc., do conceito geral de número. Ora, já nos decidimos em favor da idéia de que o melhor a fazer é derivar os números singulares a partir do um e do aumento em um, à maneira de Leibniz, Mill, H. Grassmann e outros, (FREGE, 1974, p. 224).

> Newton quer entender por número não tanto um conjunto de unidades como a proporção abstrata entre cada grandeza e uma outra da mesma espécie, tomada por unidade. Pode-se conceder ser assim descrito satisfatoriamente o número em sentido mais amplo, que inclui também as frações e os números irracionais; contudo, são aí pressupostos os conceitos de grandeza e proporção entre grandezas (...) Newton talvez pretendesse entender por grandezas, o número sendo definido como proporção entre elas, não apenas grandezas geométricas, mas também conjuntos. (FREGE, 1974, p. 224-225)

> Leibniz tende a encarar o número, ao menos de modo aproximado, como uma idéia adequada, isto é, como uma idéia tão clara que tudo que nela aparece é por sua vez claro.

> Esta parece ser a opinião de M. Cantor quando chama a matemática de ciência empírica, na medida em que começaria pelo exame de objetos do mundo exterior. Apenas por abstração a partir de objetos surgiria o número. (FREGE, 1974, p. 225)

> E. Schroedere faz com que o número copie a realidade efetiva, sendo dela extraído mediante a figuração das unidades por uns. É o que chama de abstração do número. (FREGE, 1974, p. 225-26)

> Baumann rejeita a idéia de que os números sejam conceitos extraídos das coisas exteriores: "Porque as coisas exteriores não nos apresentam unidades em sentido rigoroso; elas apresentam agrupamentos e pontos sensíveis delimitados, mas temos a liberdade de considerá-los, por sua vez, como múltiplos". (FREGE, 1974, p. 226)

> Locke diz: "O número aplica-se a homens, anjos, ações, pensamentos, a toda coisa que existe ou pode ser imaginada". Leibniz rejeita a opinião dos escolásticos de que o número seja inaplicável a coisas incorpóreas, e diz ser o número uma espécie de figura incorpórea, surgida da reunião de coisas quaisquer, por exemplo Deus, um anjo, um homem e um movimento, que juntas são quatro. Por isso considera que o número é absolutamente geral e pertence à metafísica. Em outro local diz: "Não pode ser pesado o que não tem força nem potência; o que não tem partes não tem conseqüentemente medida; mas não há nada que não admita o número. Assim, o número é como uma figura metafísica". (FREGE, 1974, p. 227)

Bertrand Russell, no seu *Introdução à filosofia da matemática*, afirma:

> A pergunta "que é número?" tem sido com freqüência feita, mas só foi corretamente respondida em nossa própria época. A resposta foi dada por Frege em 1884, em seus *Grundlagen der Arithmetik*. Conquanto esse livro seja bem pequeno, não seja difícil, e seja da mais alta importância, quase não atraiu atenção alguma e a definição de número que contém permaneceu praticamente desconhecida até que foi redescoberta por este autor em 1901. (RUSSELL, 1981, p. 18)

Para Gerdes (1989), a origem do conceito de número é histórica e desenvolvera-se conforme as mudanças sociais; ele afirma que:

> *... As propriedades de um número consistem nas suas relações com os outros números, tal como, em geral, uma abstração tirada da sua base concreta não tem significado em si própria; ela existe apenas nas suas relações com os outros conceitos. Isto coloca algumas questões. Como foram nascendo historicamente as relações entre os números? E quais foram as conseqüências para o desenvolvimento do conceito de número?* (GERDES, 1989, p.42)

A dicotomia que acirra discussões intrigantes acerca da matemática, a saber, descoberta *versus* invenção ou, descoberta *versus* construção – para explicitar essa dimensão da constituição do *homo faber* –, pode ser considerada tendo em perspectiva as concepções de matemática que permeiam as nossas salas de aula, seja na Escola Básica, seja na Universidade.

Frege é antagônico ao empirismo e ao psicologismo nas considerações acerca do conhecimento matemático ou do conceito de número. Isso significa que ele reprovaria as metáforas que costumamos estabelecer em nossas aulas de matemática com a intenção de aproximar esse conhecimento das mentes intuitivas das nossas crianças nos anos iniciais da educação básica. Mas a sua presença aqui é para mostrar que acerca de uma ideia tão básica e tão fértil quanto é a ideia de número, por seu turno nada consensual, mesmo no interior das matemáticas, não poderia ser diferente nos espaços de educação, onde a diversidade parece ser a regra.

Num momento de simulação

Há um contexto pré-numérico que deve ser considerado antes mesmo de considerarmos os números naturais ou o sistema de numeração decimal (SND) cujo valor posicional é de importância inestimável. E o arcabouço teórico anteriormente apresentado foi o lastro sobre o qual busquei desenvolver ações que integrassem uma abordagem do conhecimento matemático que considerasse simultaneamente aspectos históricos, filosóficos e metodológicos.

Atividades de laboratório, visando proporcionar a professores da educação básica uma compreensão significativa acerca do SND, foi desenvolvida há alguns anos com professores de escolas da Zona Rural do semi-árido que participavam de um projeto de extensão de uma universidade no interior da Bahia.

Atividades similares foram desenvolvidas com professores da educação básica em zona urbana na região de Campinas-SP entre 1998 e 1999. Posteriormente as mesmas atividades foram desenvolvidas com professores da educação básica de escolas municipais e estaduais de uma cidade da Bahia, e junto a estudantes de Licenciatura em Pedagogia e de Licenciatura em Matemática. E esse contexto foi o cenário que me proporcionou reflexões acerca da iniciação das nossas crianças ao conhecimento matemático.

Algumas das razões que me levam a propor essa atividade têm a ver com as minhas vivências a propósito desse tema ao longo da minha vida acadêmica. Mas a razão principal diz respeito à forma de desenvolvimento do trabalho. As atividades "práticas" de cunho aparentemente didático metodológico são permeadas por digressões de cunho epistemológico, considerando questões no âmbito da teoria do conhecimento e da epistemologia da matemática. As discussões são permeadas por contribuições de outras áreas do conhecimento tais como Filosofia da Matemática, História da Matemática, Educação Matemática, Etnomatemática, etc. A atividade se caracteriza por reflexões conjecturais em torno das ações dos envolvidos. As considerações dos participantes são replicadas sempre para que sejam justificadas de forma plausível.

E tudo começa com um monte de objetos, de naturezas formas e cores distintas, amontoados no chão: madeira, plástico, metal, pedras, sementes, etc. O primeiro movimento é perguntar à assistência: "o que é isto?", atacando com um "por quê?" para qualquer que seja a resposta. O segundo passo é solicitar a voluntários que dêem um *jeito* naquilo. E, didaticamente, lentamente, refletidamente e com muitas negociações, aos poucos vamos nos encaminhando para conceitos fundamentais que antecedem à construção da contagem sem números e da contagem não posicional e, finalmente, posicional. Nesta, a base 10, *conhecida* de todos é a referência para a exploração das peculiaridades de um sistema posicional de base qualquer maior ou igual a 2.

Quando desenvolvo essa atividade com alunos da graduação em Licenciatura em Matemática ou em Pedagogia, fico intrigado com o fato de eles não terem manipulado ábacos ou sorobans durante seus estudos nos anos iniciais (1º ao 5º anos do Ensino Fundamental).

O contexto pré-numérico é simulado num grupo de cinco professores da educação básica, a partir de objetos simples[3], variados, dispostos no chão, amontoados. E é pedido aos participantes da atividade que *deem um jeito* naquilo. Eles arrumam os canudos num copo de iogurte, as tampinhas metálicas em outro e as tampinhas plásticas num terceiro; os pregadores de roupa em um quarto copo, os pauzinhos de sorvete em um quinto copo, etc.

Quando perguntados por que fizeram aquilo e o que fora aquilo que fizeram, respondem que deram uma *organizada* no material. Perguntados por quê, respondem: "para dar uma ordem, para ter um controle".

É-lhes dito então que a mente racional costuma pôr *estrutura* nas coisas, e a partir daí as *manipula*. Que a estrutura do mundo é a estrutura que a mente racional lhe *impõe*; e tal perspectiva filosófica pode ancorar atividades de aprendizagem. Consideramos de fundamental importância algumas digressões de cunho epistemológico naquele processo especulativo em torno da construção do conceito de número.

[3] Canudinhos plásticos coloridos, pauzinhos de sorvete, tapinhas de garrafa metálicas, tapinhas plásticas coloridas, bloquinhos de madeira, pregadores de roupa, copos plásticos, sementes variadas, contas variadas, pedrinhas, etc.

É discutido acerca dos *critérios* utilizados para dispor os objetos como os dispuseram e conclui-se que foi utilizado o conceito de *Classe de Equivalência*. Porque a mente *classifica* tudo que abarca no seu campo.

Em seguida, comparando duas classes de equivalência, foi solicitado que dissessem a classe que possuía *mais* membros, sem contá-los. Responderam estabelecendo a correspondência *um-a-um* entre os membros das duas classes.

Digressões, acerca da importância do conceito de classe de equivalência e da correspondência um-a-um no processo de contagem pré-numérica e posteriormente na construção do conceito de número, são realizadas.

Aborda-se também os conceitos de ordem. E a precedência dos números ordinais em relação aos cardinais. Considerações acerca dos ciclos naturais como fenômenos que observados pela mente *primitiva* dotou-a da noção de ordem. As percepções topológicas têm um papel importante na construção do conceito de número. Por isso resvala-se por algumas questões topológicas indicando-se o texto sobre topologia, de Borges (2005).

Poderíamos perguntar acerca de quais outras habilidades intelectuais estariam em paralelo sendo exercitadas com esse nível de manipulação dos processos de contagem, e iríamos admitir que as manipulação e observação dos sólidos nas suas variadas formas no ambiente, foram os primeiros estímulos da mente nos processos de tomada de consciência do seu entorno. E, certamente é plausível admitir que uma *geometria de posição*, uma *Topologia*, tomou forma no *tratamento* do espaço pela mente *primitiva*. E isso está presente na linguagem da criança quando usa expressões do tipo "mais pequeno", "mais grande", perto, longe, dentro, fora, mais, menos, acima, abaixo, entre, à esquerda, à direita, no meio, etc.; e quando prefere um prato raso com diâmetro maior contendo menos sopa em lugar de um prato fundo com diâmetro menor contendo mais sopa. A topologia dá conta dos nossos deslocamentos no espaço físico próximo.

É plausível que após um tempo considerável utilizando a correspondência um a um, o contexto das relações pode ter estimulado a mente criativa a experimentar a correspondência *um a dois*; e são exploradas algumas configurações de contagem utilizando-a.

Um exemplo pode ilustrar o processo de contagem através da correspondência um a dois. Sejam canudinhos plásticos de cores variadas: branca, amarela, azul, verde, rosa e vermelha. E estabeleçamos que:

dois canudos brancos equivalem a um amarelo;

dois canudos amarelos equivalem a um azul;

dois canudos azuis equivalem a um verde;

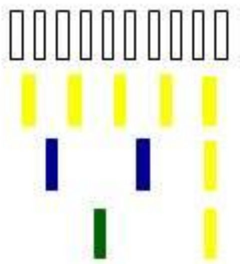
dois canudos verdes equivalem a um rosa;

dois canudos rosa equivalem a um vermelho.

A partir do estabelecido pode-se, dada uma quantidade de canudos de uma determinada cor, representá-la usando canudos de outras cores; ou seja, dada uma certa quantidade de canudos brancos, representá-la usando outros canudos de outras cores, obedecendo ao padrão de correspondência.

Exemplo: Dados dez canudos brancos, representar essa quantidade usando a correspondência *um a dois*.

Fig. 1



Dez canudos brancos correspondem a cinco canudos amarelos que, correspondem a dois canudos azuis e um amarelo e, finalmente, estes correspondem a um canudo verde e um amarelo.

Se quisermos, poderemos a partir dos dois canudos finais, isto é, do verde e do amarelo seguirmos, agora no sentido contrário, reaplicando a correspondência um a dois e chegarmos aos dez canudos brancos do início do problema.

Fig. 2

(a) (b)

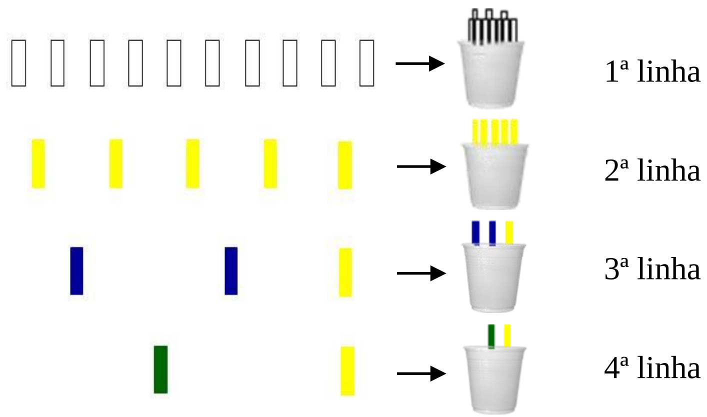
Pode-se realizar essa operação utilizando outros padrões de correspondência, tais como, *um a três*, *um a quatro*, *um a cinco*, *um a seis*, *um a sete*, etc. Esses padrões aplicados sucessivamente permitem estabelecer um tipo de *contagem por agrupamento*.

Temos aí um rudimento ou um antecedente da contagem por *base*. Porque no processo de contagem por agrupamento está implícito um processo iterativo que se caracteriza num *princípio multiplicativo*. Por isso, se retirarmos o critério *cor* e o substituirmos pelo critério *posição*, teremos aí o início de um *sistema de numeração posicional*, aditivo multiplicativo, similar ao nosso em termos de estrutura, cuja *diferença* será apenas a *base*.

Se no agrupamento que tem por base a correspondência *um a dez* retirarmos o critério cor substituindo-o pelo critério *posição*, teremos o sistema de numeração decimal!

Estudos acerca da construção de ábacos simples abertos onde possam ser mostradas as características da contagem num sistema de numeração posicional de base qualquer (maior ou igual a 2) podem ser feitos possibilitando uma compreensão satisfatória, inclusive de aspectos pouco esclarecidos do sistema de numeração decimal. Senão, vejamos a partir do nosso esquema apresentado anteriormente utilizando canudinhos coloridos. Se na Fig. 1 retirarmos o padrão cor e pusermos o padrão posição, vejamos como ficará a representação de dez canudos brancos em todos os níveis até a forma mais sintética.

Fig. 3



Supondo que temos para cada linha da Fig. 3 um copo de iogurte, no primeiro copo temos 10 canudos brancos; no segundo copo 5 canudos amarelos; no terceiro copo 2 canudos azuis e um amarelo e no quarto copo um canudo verde e um amarelo. Porque os 10 canudos brancos são equivalentes a 5 canudos amarelos (porque dois canudos brancos equivalem a um canudo amarelo). Por sua vez os 5 canudos amarelos equivalem a 2 canudos azuis e um canudo amarelo; porque um canudo amarelo só tem equivalência com 2 brancos; razão pela qual o repetimos na posição de canudos azuis. E, finalmente, 2 canudos azuis e um canudo amarelo correspondem a um canudo verde e um canudo amarelo.

Nas quatro linhas temos formas diferentes de representar a mesma quantidade. Sendo que uma é a mais extensa (linha 1), e uma é a mais concisa (linha 4). Podemos pois representar esses 10 canudos brancos com apenas um canudo verde e um canudo amarelo. Seguindo, é claro, o padrão de representação estabelecido.

Isso pode ser repetido com outro padrão de correspondência diferente do *dois a um*. Pode ser *três a um*, *quatro a um*, ..., *dez a um*, etc. Cada padrão desses constitui-se em um sistema de contagem por agrupamento. Assim, com alguns exercícios de manipulação compreenderemos o nosso sistema de numeração de base dez. E perceberemos que é possível trabalhar em qualquer sistema de base, sendo que as práticas de contagem por agrupamento é um momento sequencial importante no processo de construção do sistema de numeração que escolhermos como objeto de estudo.

Posto isso, as *ordens* e as *classes* dos números tornam-se mais do que nomes, convenções; ganham significado. E o papel da história nesse processo de construção dos números naturais adquire um significado tal que acabamos por reinserir a matemática no bojo dos nossos constructos sócio-culturais.

Considerando que todo conhecimento começa com a experiência, como preconiza Kant, experimentos com máquinas de cálculo fazem aqui muito sentido. O papel da atividade criadora na construção de ábacos simples, abertos, pode ter uma função aqui muito importante ao proporcionar a estudantes e professores um referente material concreto, para ser manipulado enquanto a mente cognoscente aprofunda os seus processos de reflexão na elaboração do pensamento lógico matemático.

Além de Licenciados em Pedagogia, professores do Ensino Fundamental I e de Licenciados em Matemática, as nossas abordagens acerca do conceito de número natural estão sendo expandidas através de oficinas com estudantes Bolsistas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID). São estudantes de Licenciatura em Matemática em meio ao seu processo de formação, participando do Programa. Nessas oficinas a diversidade de interpretações dos estudantes é de uma riqueza considerável. Ater-me-ei apenas a alguns depoimentos escritos que colhi após uma sequência de oficinas realizadas com cerca de 24 bolsistas.

> O professor colocou no centro da sala alguns objetos como canudos, palitos de picolé, tampinhas de garrafa pet, tampinhas de garrafa de vidro, filmes e copos vazios de alimentos, o mesmo nos convidou a "dar um jeito" nos objetos pois estavam todos misturados.
>
> Alguns bolsistas se posicionaram e agruparam os objetos segundo suas características físicas, anteriormente definidas; daí o professor nos interrogou o porquê de termos agrupado daquela forma; iniciou-se então a discussão sobre a contagem; como estamos acostumados a utilizar os números estávamos meio sem respostas às interrogações do professor, que até então eram perguntas simples, mas para nós parecia se tratar de algo muito complexo.
>
> Então o professor pediu-nos para arrumar novamente. Logo estabelecemos outro critério para o agrupamento; agora além das formas agrupamos de acordo com as cores. Após esse novo agrupamento chegamos à etapa de correspondência um a um e vimos isso na prática utilizando as tampinhas de garrafa pet nas cores azul e lilás. A cada tampinha azul correspondia uma tampinha lilás; logo percebemos que havia mais tampinhas azuis do que lilases. Foi uma experiência de grande valia, pois até então nunca tinha visto uma aplicabilidade disso durante a minha formação na Educação Básica.
>
> Depois desse momento iniciamos a correspondência de dois para um, agora utilizando canudos, então estabelecemos as relações entre as cores e fizemos as correspondências com os canudos no centro da sala. Iniciamos o princípio da contagem, e percebemos que algo tão simples pode nos parecer muito complexo. Por isso, a importância de desenvolver atividades desse tipo utilizando material manipulável no ensino com as crianças na Educação Básica, no ensino fundamental I, pois é onde a criança está desenvolvendo seus estágios de crescimento intelectual.
>
> Através da utilização desses materiais torna-se mais fácil o entendimento da Matemática, para que após esse momento o professor possa formalizar os conceitos.
>
> (Elane - bolsista PIBID - set/2012)

> O encontro tinha como principal objetivo discutir sobre possíveis falhas advindas do ensino fundamental na formalização do sistema de numeração. No primeiro momento o professor apresentou os materiais que seriam utilizados. Na sequência foi solicitado que os bolsistas "dessem um jeito naquilo"; daí alguns estudantes agruparam os materiais por semelhança; daí o professor os indagou sobre a maneira como tinham "dado o jeito" nos materiais, e as explicações foram diversas. Em um terceiro momento o professor explicou o motivo que nos levou a separar os objetos daquela maneira e apontou as principais dificuldades do homem ao iniciar o processo de contagem e representação dos números. Após separação dos materiais o professor indagou sobre dois [grupos] de tampa de garrafa: "qual dos dois tem maior quantidade?" A resposta era óbvia, contudo, isso para nós que temos o processo de contagem mais evoluído do [que] em épocas mais antigas; por isso o professor solicitou que não usássemos números. A tarefa ficou muito difícil, mas o que não faltou foram idéias para resolver aquele problema, que na minha mera opinião a melhor foi organizar em duas filas paralelas e olhar qual era maior.

No último momento utilizando uma espécie de tabuada demos valores a canudos a partir de suas cores, por exemplo um branco valia dois amarelos e assim fomos relacionando as cores com os respectivos valores para cada cor de canudo. Na sequência foi colocada uma fila de canudos brancos e foi pedido que representássemos aquela quantidade com canudos amarelos, os amarelos por verdes e assim por diante. De início a atividade ficou um pouco confusa, porém à medida que foi acontecendo ganhou um ritmo interessante; por fim percebemos a questão da posição no sistema de numeração.

A atividade foi muito interessante e julgo que me motivou bastante para utilizar materiais manipuláveis antes de formalizar para os alunos alguns conteúdos. Percebi que ao usar este tipo de material surgem questões que possivelmente não surgiriam em uma formalização habitual. Assim, não resta dúvidas que este foi um dia de aprendizado e que só veio a acrescentar na minha formação.

(Marivaldo - bolsista PIBID - set/2012).

(...) Em seguida foram colocados diversos objetos (...) sobre o chão, de qualquer maneira. Depois começamos a organizá-los por material (copo com copo, canudo com canudo, etc.) Feito isso, respondemos qual o motivo por essa escolha de organização - apenas para arrumar o que víamos desorganizado. Depois de algumas retóricas do professor, chegamos à conclusão de que arrumamos os objetos para termos domínio dos mesmos. A partir desse momento fomos desafiados a declarar as quantidades de alguns objetos sem utilizarmos o conceito de número, ao qual fizemos comparações biunívocas com as tampas das garrafas pet (colocamos uma tampa branca para cada uma lilás) e descobrimos que um grupo de tampas era em maior quantidade que o outro, por visualização da sobra e por comparação uma a uma.

Em sequência, o professor fez uma relação de canudos com cores diferentes (amarelo, branco, rosa, verde e vermelho). Tínhamos que compará-los um a um e fazer a correspondência com base nos números naturais, depois comparamos de um para dois, com o objetivo de que um canudo de uma determinada cor seja equivalente a dois canudos de outra cor. Inicialmente fizemos com canudos em quantidades pares e depois em quantidades ímpares.

O professor explicou os seus objetivos referentes a essas dinâmicas, que podemos utilizar o mesmo método em sala para iniciarmos o conceito de número natural. Daí, mostrar aos alunos que os números não surgiram do "nada", antes, porém, tiveram um início lógico, da necessidade que o homem tinha (têm) de dominar o que é seu.

A oficina foi bastante proveitosa, pois passamos a entender a origem dos números e como utilizar essas técnicas em sala de aula, fugindo do tradicional quadro e giz. é uma maneira simples, objetiva e clara de trabalhar não somente o conceito de número, mas também as operações com eles da multiplicação e da divisão, principalmente ao trabalharmos com a correspondência de canudos.

Um detalhe interessante que observei é que podemos aproveitar a correspondência de canudos e falarmos do sistema monetário brasileiro, por exemplo: uma moeda de R$1,00 equivale a duas moedas de R$0,50 e que equivale a duas moedas de R$0,25; uma moeda de R$1,00 equivale a quatro moedas de R$0,25.

Outro detalhe é que podemos contar a história; não somente o professor observa as dificuldades da turma como também dá ferramentas para que os próprios alunos consigam lidar com suas dificuldades e haja o tão sonhado aprendizado.

(Raquel - Bolsista PIBID - set/2012).

> A impressão que eu tive foi que antes de começar qualquer assunto temos que buscar meios para que o aluno construa seu conhecimento. Através de materiais manipuláveis entre outros.
> (Renata - Bolsista PIBID - set/2012).

À guisa de conclusão

Buscamos de alguma forma evidenciar a importância da reflexão epistemológica quando se trata de prática docente. Também tentamos evidenciar o significado das atividades quando permeadas por uma perspectiva filosófica da matemática. E, de uma certa forma, foi explicitada a importância da persistência quando se trata do estabelecimento de laços entre a universidade e a escola da educação básica, fenômeno hoje tão fortemente potencializado pelos órgãos públicos fomentadores de pesquisa no país.

Ficamos muito à vontade quando percebemos que o professor hoje é o foco. E isto, embora de forma um tanto modesta, seja percebido na esfera da gestão pública da educação. Seja na formação inicial e continuada, seja nas questões de outras dimensões o professor é o foco; e isto, mesmo sendo fruto de algum tipo de pressão externa ou de compromissos assumidos internacionalmente por nossas instâncias gestoras, mesmo assim é um indicador de possibilidades de mudança. Também não podemos esquecer do imenso *déficit* de professores da educação básica, o que atesta acerca do nível do descaso ao qual chegou o modelo de gestão da educação no país. Apesar desse quadro desolador, mudanças significativas ocorreram, também na esfera da gestão. E potencialmente temos perspectivas. Boas perspectivas. E o papel das universidades públicas é fundamental nesse fenômeno. Por isso temos esperança. E a nossa esperança se traduz em estarmos a provocar reflexões nos nossos colegas, ainda em meio aos seus processos de formação inicial ou continuada. Daí a pergunta: qual a filosofia da matemática que alicerça a sua prática? E as consequências multifacetadas dessa pergunta se configurarem num processo de transformação e aprofundamento de processos de reflexão quase sem limites. E instalar-se nas ações e reflexões do professor através de uma postura crítica, provocando nos seus alunos comportamentos que podem ser traduzidos por uma curiosidade intelectual e um prazer imenso pela conquista de novos conhecimentos.

Referências

BORGES, C.C. A topologia: considerações teóricas e implicações para o ensino da matemática. *in*: *Cadernos de Física da UEFS*. UEFS; 03; (02):15-35, 2005.

COURANT, Richard y ROBBINS, Herbert *¿Qué es la matemática?* (trad. Luis Bravo Gala). Madrid: Aguillar, 1955.

FREGE, Gottlob *Os fundamentos da aritmética* (trad. Luís Henrique dos Santos). São Paulo: Abril Cultural, 1974.

GERDES, Paulus. Sobre a origem histórica do conceito de número - *Bolema* núm. especial 1. p.35-49. UNESP-RC. 1989.

KAMII, Constance. *A criança e o número* 34ª ed. (trad. Regina A. de Assis). Campinas, São Paulo: Papirus, 2006.

KANT, Immanuel, *Crítica da razão pura* 2ª ed. (trad. Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1989. (introdução B, cap.1).

LUNGARZO, Carlos. *O que é matemática.* São Paulo: Brasiliense, 1990. Col. primeiros passos 231.

PEIXOTO, J. L. B. / SANTANA, E. R. dos S. / CAZORLA, I. M. *Soroban*: uma ferramenta para compreensão das quatro operações. Itabuna/Ilhéus - Bahia: Via Litterarum, 2006.

PIAGET, Jean. *A epistemologia genética / Sabedoria e ilusões da filosofia; Problemas de psicologia genética* 2ª ed.(trad.: Nathanael C. Caixeiro, Zilda Abujamra daeir, Celia E. A. Di Piero). São Paulo: Abril Cultural, 1983. Col. Os Pensadores.

RAV, Yehuda. Philosophical problems of mathematics in the light of evolucionary epistemology. in: Restivo/Bendengem/Fisher (eds.) *Math worlds*: philosophical and social studies of mathematics and mathematics education. New York: SUNY Press, 1993.

RUSSELL, Bertrand. *Introdução à filosofia matemática.* 4ª ed. (trad. Giasone Rebuá). Rio de Janeiro: Zahar, 1981.

TORANZOS, Fausto I. *Introducción a la epistemología y fundamentación de la matemática* 2ª ed. Buenos Aires, ESPASA-CALPE ARGENTINA, 1949.

TREJO Cezar A. *El concepto de numero* 3ª ed. Washington D.C.: Secretaria General de la OEA, Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico, 1978.

VIEIRA PINTO, Álvaro. *Ciência e existência*. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1979.

WITTGENSTEIN, Ludwig, *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática* (ver. española de Isidoro Reguera). Madrid: Alianza, 1978.

Recebido: 10/05/2013
Aceito:13/07/2013