La comprensión del concepto de continuidad en el marco de la Teoría de Pirie y Kieren

Rodrigo Antonio Rendón Ramírez
ro.rendon@gmail.com

René Alejandro Londoño Cano
rene2@une.net.co
U
niversidad de Antioquia
Trabajo de Investigación de Maestría (en desarrollo)- UdeA

Resumen. La mayoría de personas involucradas directa o indirectamente con la Educación Matemática estamos de acuerdo en que la comprensión de conceptos es el aspecto más relevante en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Nuestro objetivo es diseñar y aplicar una entrevista semiestructurada de carácter socrático, para describir cómo comprenden el concepto de Continuidad cuatro estudiantes de cursos de cálculo diferencial en Instituciones oficiales de la ciudad de Medellín. Para alcanzar este objetivo utilizamos la entrevista semiestructurada de carácter socrático, como instrumento principal de recolección de información, así como observaciones y materiales escritos; la entrevista a su vez se convirtió en una estrategia metodológica para mejorar la comprensión de los estudiantes, en el marco de la Teoría de Pirie y Kieren, nuestro Marco Teórico.

Palabras Clave: Comprensión, Continuidad, Entrevista, Límite.

1. Presentación

En nuestra experiencia docente con estudiantes de grado 11 de la educación media y primer año de universidad que toman cursos regulares de cálculo diferencial, he observado que el concepto de continuidad es particularmente dificultoso para ellos, ya que involucra la comprensión previa de otros conceptos fundamentales como el de límite, y además es abordado por los docentes sólo desde un componente visual geométrico asociado con las gráficas de las funciones, lo cual genera la percepción errónea de la continuidad como una característica global de las curvas y no como un concepto local asociado al control de errores, como lo presentaron los rigoristas del cálculo Cauchy y Lacroix.

De acuerdo con el Ministerio de Educación de Colombia, en la serie Lineamientos Curriculares, es importante:

> "Aceptar que el conocimiento matemático es resultado de una evolución histórica, de un proceso cultural, cuyo estado actual no es, en muchos casos, la culminación definitiva del conocimiento y cuyos aspectos formales constituyen sólo una faceta de este conocimiento." (MEN, 1998)

Se reconoce entonces, que es necesario valorar los elementos constructivos y de interacción social en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; lo cual convierte a las interacciones en el aula, en agentes fundamentales en la construcción y comprensión de conceptos en esta área. Se hace necesario en este punto abordar un estudio serio de la comprensión de la continuidad local por parte de los estudiantes de cálculo y reflexionar acerca de algunas alternativas para mejorar dicha comprensión.

Nuestro problema de Investigación radica en que la mayoría de los estudiantes de los cursos de Cálculo Diferencial, conciben la Continuidad como una propiedad de carácter global y no como un concepto local, y por tanto se limitan a interpretarlo desde una visión solamente geométrica o algebraica; esta situación relega la continuidad, a convertirse en un concepto estático y alejado del sentido dinámico que el concepto tiene, pues involucra procesos de razonamiento infinito y el trabajo con cantidades infinitesimales alrededor de un punto de abscisa $x = a$.

Del problema anterior surge como pregunta de investigación: ¿Cómo comprenden el concepto de Continuidad los estudiantes de un curso de Cálculo Diferencial, de acuerdo con los niveles del Modelo de Pirie y Kieren?

2. Marco Teórico

La solución a la pregunta planteada nos lleva a formular cómo objetivo de este trabajo,

> Diseñar y aplicar una entrevista de carácter socrático en el marco de la teoría de Pirie y Kieren, como estrategia metodológica para describir la comprensión del concepto de Continuidad en un grupo de estudiantes de cálculo diferencial.

Este objetivo señala que hemos considerado La teoría de Pirie y Kieren, cómo el marco teórico adecuado para orientar la presente investigación, a continuación hacemos una breve descripción del mismo.

Antecedentes de la teoría. Esta es una teoría desarrollado en Estados Unidos por los profesores Susan Pirie y Thomas Kieren, ellos se fundamentan en el Constructivismo

Social de Vygotsky y la Epistemología genética de Piaget. Como ellos postularon una teoría de la comprensión matemática, reconocen que inicialmente aceptan el concepto de comprensión de Glasersfel (1987). Pirie y Kieren (1989, 1991), caracterizaron la comprensión en matemáticas, mediante un proceso recursivo a través de niveles anillados. En el texto original sobre una teoría recursiva de la comprensión matemática, estos autores dejan claro que el desarrollo de la comprensión no es lineal y de carácter secuencial:

> "... una persona que está funcionando en un nivel exterior de comprensión cuando es desafiada (challenged) puede apelar o redoblar ("Folding back") a una comprensión interior, mas intuitiva o específicamente local... Este redoblamiento tiene en cuenta aquí la construcción y elaboración de un nivel interior de comprensión para apoyar y conducir al nuevo nivel exterior de comprensión.... El proceso de comprensión en cualquier nivel siempre tiene en cuenta y se sostiene en retornar para avanzar" (Pirie y Kieren, 1991, p.172).

El modelo, por su carácter dinámico, resalta la importancia de los procesos individuales en la construcción del conocimiento y permite avances y retrocesos en los niveles, cada vez que el individuo lo requiera; estos elementos son fundamentales para determinar en qué momento se necesita el proceso de "redoblado", el cual es una característica importante del mismo.

El modelo está compuesto por ocho niveles que dan cuenta del crecimiento de la comprensión desde el conocimiento primitivo inicial, hasta el nivel superior de invención.

Descripción y características principales de la teoría. Pirie y Kieren postulan una teoría que consiste en un análisis de la gradación de la comprensión de conceptos matemáticos; en medio de ella, se propone un Modelo compuesto por ocho niveles que describen la comprensión de un concepto matemático y proponen descriptores que evidencian dicha comprensión en los sujetos (ver Figura 1.1).

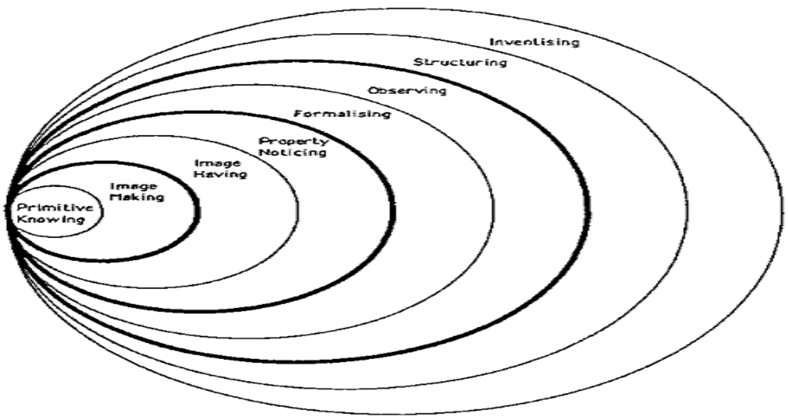

Figura Nº 1.1. Una representación diagramática del modelo. Los límites de falta de Necesidad se representan por líneas más gruesas. (Tomado de Pirie y Kieren, 1994)

La teoría tiene tres características fundamentales:

El Folding Back, que ya se había mencionado antes, es el elemento más importante y constituye una de las principales diferencias con otros modelos y teorías. Se refiere a la posibilidad de “Redoblar” o volver hacia atrás en un proceso dinámico que asegura la efectividad de la comprensión; este elemento permite a una persona que está en un nivel exterior, regresar a uno de los niveles internos, con el fin de reconstruir la comprensión de un concepto o afinar elementos que no fueron necesarios en el paso por dicho nivel, pero que es necesario para la superación y avance en los niveles externos. El sujeto que avanza, retrocede o redobla hacia el nivel interno, perfecciona su comprensión y regresa al nivel externo para continuar con el proceso.

La necesidad de redoblar aparece como consecuencia del proceso de crecimiento en la comprensión y es individual, no es propia del concepto sino del sujeto que comprende. Algunas investigaciones de los propios autores y de investigadores posteriores muestran mapas de comprensión donde se muestra el camino de redoblado hecho por los sujetos, como aparece en Londoño (2011). (Ver Figura 1.2)

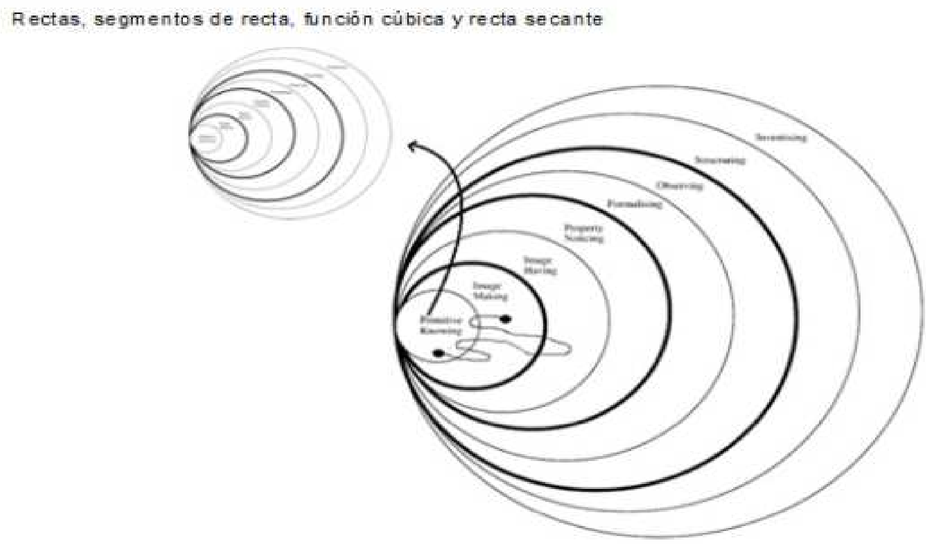

Figura Nº 1.2. Mapa del recorrido en el modelo para comprensión de un concepto del cálculo. Los límites de falta de Necesidad y las complementariedades de la acción y la expresión, no son objeto de análisis en el presenta trabajo de investigación.

Los límites de falta de Necesidad, son la segunda característica importante, ellos constituyen procesos de comprensión mas elaborados y estables para un concepto; un estudiante que se encuentra en dichos límites ha realizado progresos cualitativos superiores en la comprensión, sin embargo esto no significa que no tenga en algún momento la necesidad de hacer Folding back sobre los niveles internos en la comprensión que realiza. En el diagrama, los límites de falta de necesidad se evidencian por líneas más gruesas y están determinados sólo en la interfase de algunos de ellos (ver Figura 1.1).

La complementariedad de la acción y la expresión es la tercera característica y ella ocurre en todos los niveles a excepción del primero y el último. Se refiere a que los estudiantes en los niveles internos se ven en la necesidad de mostrar, actuando primero y luego expresando, los progresos en los respectivos niveles. Pirie y Kieren (1994, b) afirman que:

> "En cualquier nivel, la actuación (el desempeño) abarca toda la comprensión previa, suministrando continuidad con los niveles internos, y la expresión brinda comportamientos distintos a ese particular nivel".

La descripción de cada nivel se toma de Meel (2003).

Nivel 1. Conocimiento Primitivo. Los estudiantes afloran en su mente toda la información que tiene que ver con ideas intuitivas (conocimiento intuitivo) o experiencias de aprendizaje relacionadas con el concepto objeto de estudio. También se conoce como conocimiento situado o conocimiento previo o informal.

Nivel 2. Creación de la Imagen. El estudiante es capaz de realizar distinciones con base en capacidades y conocimientos anteriores. Las imágenes no necesariamente son representaciones pictóricas, sino que transmiten el significado de cualquier tipo de imagen mental. Las acciones que se realizan en este nivel se relacionan con los aspectos mentales o físicos que se evidencien, con el fin de obtener una idea sobre el concepto objeto de estudio.

Nivel 3. Comprensión de la Imagen. En este nivel, el estudiante se ve en la necesidad de reemplazar las imágenes asociadas a una sola actividad, por imágenes mentales. El desarrollo de tales imágenes mentales están orientadas por un proceso, liberando al estudiante de las matemáticas a partir de la necesidad de realizar acciones físicas particulares (Pirie & Kieren, 1992a). Aquí el estudiante comienza a reconocer las propiedades globales obvias de las imágenes matemáticas inspeccionadas.

Nivel 4. Observación de la propiedad. El estudiante examina una imagen mental y determina los distintos atributos asociados con dicha imagen, observa las propiedades internas de alguna específica, además de las distinciones, combinaciones o conexiones entre las distintas imágenes mentales. También construye y modifica definiciones mediante la combinación de tales propiedades. Es posible igualmente que desarrolle un concepto-definición (Tall & Vinner, 1981) creado a partir de la interacción entre las diversas imágenes vinculadas, en vez de las imágenes desconectadas.

Nivel 5. Formalización. El estudiante conoce las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes, abandona los orígenes de la acción mental, para finalmente producir definiciones matemáticas completas. Es importante anotar que las descripciones generales proporcionadas deben ser equivalentes a una definición matemática adecuada, aún cuando no sea necesario usar un lenguaje matemático formal.

Nivel 6. Observación. El estudiante utiliza su pensamiento formal, es decir, produce verbalizaciones relacionadas con la cognición, sobre el concepto formalizado, además, es capaz de combinar definiciones, ejemplos, teoremas y demostraciones para identificar los componentes esenciales, las ideas de conexión y los medios para relacionar dichas ideas.

Nivel 7. Estructuración. En este nivel, el estudiante trasciende el tema particular para la comprensión que se encuentra en una estructura mayor, siendo capaz de explicar las interrelaciones de dichas observaciones mediante un sistema axiomático (Pirie & Kieren, 1989).

Nivel 8. Invención. El estudiante es capaz de liberarse del conocimiento estructurado que representa la comprensión total y crea preguntas totalmente nuevas que tendrán como resultado el desarrollo de un concepto nuevo. En este nivel, la comprensión matemática del estudiante es considerada sin límites, imaginativa y llega más allá de la estructura actual, lo que hace que el conocimiento estructurado se convierta en una nueva dimensión de conocimiento dotado con otra estructura quizás isomorfa a la actual, que a su vez se convertirá en un nivel de conocimiento primitivo.

3. Diseño Metodológico

El paradigma elegido para este estudio es la Investigación Cualitativa, con el fin de hacer relevante el caso de cada uno de los cuatro estudiantes que colaboraron en ella.

Para lograr responder la pregunta de investigación, iniciamos una ruta metodológica que inicia con la recolección de los datos y finaliza con el análisis de la información suministrada por ellos; pasando por una etapa de codificación de los mismos y mostrando la pertinencia de la teoría de Pirie y Kieren, como marco teórico de este trabajo.

Numerosos autores hacen referencia a las bondades del paradigma cualitativo de investigación y describen con bastante amplitud sus características y variedades de métodos investigativos que lo comprenden. Algunas de las razones más relevantes para elegir el paradigma cualitativo en este estudio se puede resumir según Hernández, Fernández y Baptista (2008):

> “El enfoque cualitativo puede definirse cómo un conjunto de prácticas interpretativas que hacen al mundo visible, lo transforman y convierten en una serie de representaciones en forma de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos. Es naturalista (porque estudia los objetos y seres vivos en sus contextos o ambientes naturales) e interpretativo (pues intenta encontrar sentido a los fenómenos en términos de los significados que las personas les otorguen). “(p. 9)

El Método de Investigación elegido fue el Estudio de Caso, ya que se considera como el más adecuado para hacer relevante la situación particular, en este trabajo la de los estudiantes elegidos. Decidimos seleccionar cuatro estudiantes en la interfase bachillerato universidad del sistema educativo colombiano, dos de una Institución Educativa de carácter oficial de la ciudad de Medellín, y dos de una Universidad Pública de la cuidad, matriculados en un programa de formación de maestros en matemáticas y física. La elección de los estudiantes se hizo de aquellos que manifestaron voluntariamente interés en participar, y que además mostraban habilidades de comunicación en sus respectivos contextos, ya que consideramos la facilidad para expresar sus ideas, como un requisito indispensable en el trabajo de campo.

4. Análisis de Datos

La recolección de información se cumplió mediante tres instrumentos primordiales: La Observación, el análisis de documentos escritos de los participantes y la entrevista semiestructurada de carácter socrático, que se constituye en el instrumento fundamental, dado el objetivo planteado. Con el fin de describir y analizar las respuestas de los estudiantes durante las entrevistas, son identificados para cada uno de los cuatro casos los momentos de Folding Back o “redoblado” de que trata la teoría. El ATLAS.ti 6.2 es usado como herramienta para realizar el análisis, dada su versatilidad para

> “Segmentar datos en unidades de significado, codificar datos y construir teoría” (Hernández, Fernández y Baptista, 2008).

También vamos teniendo en cuenta a la vez los resultados arrojados por la observación de los estudiantes y la documentación escrita, ya que esto nos permite enriquecer el análisis, dar cuenta de los descriptores de nivel y ubicar con mayor claridad los momentos de “redoblado” que se evidencian; así mismo, todos los elementos anteriores nos permiten analizar cómo están comprendiendo el concepto estos cuatro estudiantes, objetivo principal de esta investigación.

5. Conclusiones

El objetivo general buscaba diseñar una entrevista de carácter socrático para la comprensión del concepto de continuidad, que permitiera analizar cómo comprenden dicho concepto los estudiantes del estudio de casos; el objetivo se logró ampliamente ya que tanto la entrevista, como la observación de los estudiantes y los registros escritos, permitieron hacer un acercamiento profundo a las evidencias de comprensión de los mismos. Pudimos constatar que en los casos analizados, también hay dificultades con la comprensión de otros conceptos asociados a la continuidad, como son el de función y el de límite; en esta medida se hace importante dotar el concepto del componente visual geométrico de la ventana de control, que permita prescindir en gran medida de la utilización de términos confusos para ellos y generar la comprensión a través de la manipulación de los procesos infinitos y la controlabilidad de la curva al interior de la misma; esta última parte deja abonado el terreno de la formalización propia de la definición épsilon – delta, y facilitaría notablemente la comprensión de la definición formal.

Los descriptores finales nos permitieron caracterizar el proceso de comprensión de los cuatro estudiantes del estudio de casos y descubrir el nivel en el que estaban comprendiendo el concepto. Estos descriptores refinados, cumplieron con las propiedades generales de los niveles del modelo diagramático de Pirie y Kieren y fueron fundamentales para determinar las evidencias de comprensión de cada estudiante, ubicarlo en el nivel correspondiente y explicar cómo se presentaba en él, la comprensión que pretendíamos analizar. De acuerdo con el marco teórico elegido, se constató que en el paso por los niveles, el estudiante mostraba un lenguaje propio de su estado de comprensión, y que gracias a la entrevista iba depurando dicho lenguaje, enriqueciéndolo y avanzando hacia la superación de los niveles. Otro aspecto importante fue el hecho de que varias de las preguntas generaron en los estudiantes experiencias de Folding back, que le hacían regresar hacia niveles anteriores y perfeccionar actos de comprensión para continuar avanzando en niveles superiores.

Todo el trabajo de campo, junto con los análisis realizados, nos permitieron hacer visible e importante el caso individual, reconocer que las experiencias de comprensión de cada estudiante son totalmente diferentes, y que la gradualidad de su paso por los niveles y la rapidez con que lo hacen, depende de aspectos muy variados, como son las experiencias previas, individuales y colectivas de ellos, sus preconcepciones, su riqueza de lenguaje, su capacidad de comunicación y el desarrollo de experiencias de aprendizaje con otros conceptos como los de función y límite.

Tanto la entrevista, como las observaciones realizadas y el análisis de registros escritos producidos por los estudiantes, permitieron tener un panorama amplio sobre la comprensión de cada uno frente al concepto de continuidad, y responder satisfactoriamente la pregunta de investigación.

Referencias Bibliográficas

- Glasersfeld, E. (1987). *The Construction of Knowledge.* Seaside: Intersystems Publications.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2008). *Metodología de la Investigación.* México: Mc Graw Hill.
- Londoño, R. A. (2011). *La relación invesrsa entre Cuadraturas y Tangentes en el marco de la Teoría de Pirie y Kieren.* Medellín.
- Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. *RELIME. Revista latinoamenricana de Investigación en Matemática educativa.*, 221-278.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares. Matemáticas.* Recuperado el 21 de noviembre de 2009, de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/article-89869.html
- Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics, 9*(3), 7-11.
- Pirie, S., & Kieren, T. (1991a). A dynamic theory of mathematical understanding: Some features and implications. (E. D. Service, Ed.) (ED 347 067).
- Pirie, S., & Kieren, T. (1992a). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 505-528.
- Pirie, S., & Kieren, T. (1994b). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics, 26*(2-3), 165-190.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Volver al índice Mesas Temáticas