
La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele¹

Zaida Margot Santa Ramírez
zsanta@ayura.udea.edu.co

Carlos Mario Jaramillo López
cama@matematicas.udea.edu.co

Universidad de Antioquia
Trabajo de Investigación de Maestría (Concluido)- UdeA

Resumen. El presente artículo es un producto derivado de la investigación: “La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele”, en la que se analizó el proceso de comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, de cinco estudiantes del grado décimo de una Institución Educativa de la ciudad de Medellín. El estudio de casos cualitativo permitió el establecimiento de los descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele que caracterizaron dicho proceso de comprensión y a su vez, iluminaron la creación de un guión de entrevista de carácter socrático, que se convirtió en una experiencia de aprendizaje para los estudiantes en tanto que les permitió avanzar en su nivel de razonamiento.

Palabras clave. Comprensión, concepto de elipse, lugar geométrico, Modelo de Van Hiele, geometría del doblado de papel.

1. Presentación

Nuestra experiencia docente a nivel universitario nos ha permitido aseverar que algunos estudiantes de los primeros semestres poseen habilidades algorítmicas para determinar las ecuaciones algebraicas de las secciones cónicas, pero no logran razonar sobre el concepto como lugar geométrico, propio de cada una de estas. Incluso, hemos detectado otros estudiantes que ni siquiera reconocen sus ecuaciones ni mucho menos sus conceptos asociados correspondientes. Al respecto, Cruz y Mariño (1999) afirman que:

¹ Este artículo es el reporte de la investigación “La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele”, que se desarrolló en el marco del programa de Maestría en Educación y tuvo una valoración de sobresaliente.

“... dentro del estudio de la geometría analítica, se han presentado dificultades en la comprensión de los contenidos relativos a las secciones cónicas” (p. 15).

Y, además, argumentan que:

“en los trabajos sobre educación matemática para los alumnos que ingresan a la educación superior, se ha constatado que los conocimientos de los estudiantes se limitan al aprendizaje de memoria de las ecuaciones que caracterizan a cada una de las cónicas, a la identificación de sus elementos y a su búsqueda algorítmica empleando fórmulas, sin demostrar haber interiorizado la relación existente entre los diferentes parámetros que intervienen en las ecuaciones de las cónicas y su representación gráfica ni el por qué de su definición como lugar geométrico, lo cual limita la comprensión del alcance de las posibilidades de que disponen” (p. 15).

Teniendo en cuenta las ideas anteriores, una de las grandes dificultades que se presenta en el aprendizaje de las matemáticas y en particular de la geometría, es la desarticulación entre conceptos y procedimientos, como se detectó en el caso de las secciones cónicas. En este sentido, muchos estudiantes de la interfase bachillerato – universidad, tienen dificultades para comprender los conceptos de las secciones cónicas como lugares geométricos, mientras que se les facilita la búsqueda algorítmica de sus ecuaciones. Además, no abundan trabajos que den cuenta de la comprensión de los estudiantes de dicha temática a partir del doblado de papel. Luego, nuestro trabajo de investigación pretendió responder a la pregunta de investigación ¿cómo comprenden los estudiantes el concepto de elipse como lugar geométrico mediante la geometría del doblado de papel, en el contexto del modelo educativo de Van Hiele? Por esta razón, nuestro objeto de estudio es, precisamente, la comprensión del concepto de elipse mediante el doblado de papel, e incluso, la comprensión de los conceptos estrechamente relacionados con este para poder lograr nuestro propósito.

De acuerdo con la pregunta, nuestro objetivo general fue:

Analizar la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, en el contexto del modelo educativo de Van Hiele, utilizando la geometría del doblado de papel, con los estudiantes del grado décimo de una I.E de la ciudad de Medellín o con estudiantes universitarios de primeros semestres de cursos de matemáticas básicas.

Algunos de los objetivos específicos que desarrollamos fueron:

- Diseñar y evaluar un guión de entrevista de carácter socrático, basado en la visualización de construcciones elaboradas mediante el doblado de papel, que permita detectar el nivel de razonamiento en que se encuentra un estudiante en la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico y que, igualmente, se convierta en una experiencia de aprendizaje para avanzar en su nivel de razonamiento.

- Determinar los descriptores para ubicar a un estudiante en uno de los niveles de razonamiento de Van Hiele, en relación al concepto de elipse, utilizando la geometría del doblado de papel.

2. Marco teórico: Modelo de Van Hiele.

El modelo educativo de Van Hiele es una teoría que describe el proceso de enseñanza de la geometría euclidiana. Fue creado en Holanda por los esposos Dina Van Hiele-Geldof y Pierre Marie Van Hiele, profesores de matemática, quienes se encontraron con el problema de que muchos de sus estudiantes no poseían el nivel de razonamiento adecuado a la hora de abordar un problema geométrico con sus correspondientes conceptos.

De acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1990) el modelo, tal como se conoce actualmente, puede enunciarse de la siguiente manera:

- “(1) Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas;
- (2) Un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento;
- (3) Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento, será necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela;
- (4) No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esta forma” (p. 305).

Teniendo en cuenta lo anterior, el modelo está compuesto por tres aspectos fundamentales: la percepción o Insight, los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje.

Autores como Jaramillo, Monsalve y Esteban (sf), sustentan que:

“La percepción se logra cuando una persona es capaz de actuar en una situación no familiar; ejecuta de forma competente (correcta y adecuadamente) las acciones requeridas por la situación y emplea intencional (deliberada y conscientemente) un método que resuelve la situación. Se logra la percepción cuando los estudiantes comprenden lo que hacen, por qué lo hacen y cuándo lo hacen; además, pueden aplicar su conocimiento a la resolución de nuevos problemas no rutinarios” (p. 2).

El segundo aspecto del modelo, los niveles de razonamiento, es de tipo descriptivo, puesto que identifica una estratificación del razonamiento humano en niveles jerarquizados, a través de los cuales:

“progresan la capacidad de razonamiento matemático de los individuos desde que inician su aprendizaje hasta que llegan a su máximo grado de desarrollo intelectual en este campo” (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 305).

El tercer aspecto del modelo, las fases de aprendizaje, es de tipo prescriptivo, porque brinda una serie de directrices a los profesores para que puedan ayudarle a sus estudiantes a pasar de un nivel de razonamiento al inmediatamente siguiente.

Los descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele, siguiendo la nomenclatura dada por J. Llorens (1994), son:

Nivel 0: Predescriptivo

Es el nivel básico. Describe el conjunto de conocimientos previos que debe tener un estudiante para comprender un concepto particular.

Nivel I: De reconocimiento visual

- El estudiante reconoce las figuras por su apariencia general, es decir, describe los objetos en su forma física: el color, la forma, el tamaño.
- Reconoce las figuras geométricas como un todo. Se le dificulta encontrar partes constitutivas de los objetos o encontrar propiedades matemáticas que los caracterizan.
- Percibe que las figuras son “objetos individuales” (Jurado y Londoño, 2005, p. 9) y se le dificulta abstraer propiedades para relacionarlas con las propiedades de figuras del mismo tipo.
- El estudiante hace descripciones basadas en semejanzas con otros objetos que le son cotidianos.

Nivel II: De análisis

- El estudiante es capaz de determinar las partes constitutivas de las figuras.
- Es capaz de encontrar algunas propiedades matemáticas de las figuras, pero todavía no cuenta con las capacidades suficientes para relacionar unas propiedades con otras, o hacer clasificaciones correctas.
- Puede extraer otras propiedades por la observación de las partes constitutivas, e incluso puede hacer algunas generalizaciones de propiedades a figuras de la misma clase.
- La deducción de las propiedades y la generalización, se hace de manera informal con base en la experiencia y la manipulación.

Nivel III: De clasificación

- El estudiante es capaz de relacionar unas propiedades con otras; de hecho puede establecer que unas propiedades se deducen de otras y es capaz de hacer clasificaciones lógicas correctas.
- En este nivel, el estudiante empieza a comprender la estructura axiomática de las matemáticas, es capaz de seguir demostraciones, pero todavía se le dificulta hacerlas sin una correspondiente ayuda. Aún no tiene la necesidad del rigor y sus argumentaciones se basan en la experiencia.
- Es capaz de establecer la definición de un concepto geométrico de manera formal.

Nivel IV: De deducción formal.

- El estudiante en este nivel, logra comprender la estructura axiomática de las matemáticas.
- Es capaz de realizar demostraciones formales sin ninguna ayuda.
- Conoce y aplica las propiedades de un sistema deductivo como la consistencia, la independencia y la completitud (Jaramillo, 2000).
- Puede llegar a las mismas conclusiones partiendo de diferentes premisas.
- Utiliza un vocabulario especializado, propio del rigor matemático.

3. Diseño metodológico.

Paradigma. Esta investigación estuvo orientada bajo una metodología de corte cualitativo. Las actividades que surgieron de esta, fueron relativas, es decir, dependieron del contexto del cual se extrajeron los datos, pues el guión de entrevista final y los descriptores finales de los niveles de razonamiento surgieron de observaciones, de los materiales de los estudiantes y de las entrevistas individuales y grupales con ellos. Las entrevistas individuales, en particular, sirvieron para analizar su proceso de comprensión de acuerdo con los descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele, en relación con el concepto de elipse como lugar geométrico, utilizando la geometría del doblado de papel.

En este sentido, se consideró fundamental el aspecto subjetivo de la realidad de los estudiantes. Por lo tanto, la información que se recolectó fue en forma de textos (encuestas), imágenes (material de los estudiantes), observaciones, entrevistas, análisis documentales (material de los estudiantes), entre otros.

Tipo de estudio. De acuerdo al paradigma cualitativo, el tipo de estudio que abordó esta investigación fue un “estudio de casos” múltiple (Hernández, Fernández y Baptista, 2006) de estudiantes de cierta Institución Educativa de la ciudad de Medellín, que estaban próximos a abordar la temática relacionada con las secciones cónicas.

Las razones por las cuales se optó por un estudio de casos, son las siguientes:

- Según Chetty (1996, citado por Martínez, 2006), permite estudiar un tema determinado (el concepto de elipse como lugar geométrico) donde la teoría existente (Modelo de Van Hiele) no aplica todavía.
- Según Chetty (1996, citado por Martínez, 2006), permite estudiar el fenómeno desde muchas perspectivas (razonamiento en la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico) y no desde una sola variable.
- Según Yin (1989, citado por Martínez, 2006), se utilizan varias fuentes de datos como las observaciones, las entrevistas, las encuestas y el análisis de textos bibliográficos.
- Según Yin (1989, citado por Martínez, 2006), se puede estudiar tanto un caso único como múltiples casos. En esta investigación se estudiaron cinco casos.
- Con base en Eisenhardt (1989, citado por Martínez, 2006), los participantes se eligen de una manera teórica, esto es,

“el objetivo de la muestra teórica es elegir casos que probablemente pueden replicar o extender la teoría emergente...” (p. 19).

En este sentido, se eligieron cinco estudiantes del grado décimo de una Institución Educativa de la ciudad de Medellín, que estuvieran próximos a estudiar el tema de secciones cónicas y que manifestaran gusto por el doblado de papel y tuvieran algunos conceptos previos sobre geometría euclidiana.

- Además de tratar de encontrar patrones entre los diferentes casos, también se pretendió profundizar en el plano individual, al analizar el proceso de comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico de cada estudiante. (Hernández, Fernández y Baptista, 2006)
- Al analizar varios casos, los primeros van a funcionar como “casos pilotos” para refinar las actividades propuestas y los descriptores hipotéticos de nivel. Es decir, el proceso de confrontación en el trabajo de campo permite refinar las actividades del guión de entrevista de carácter socrático.

Participantes. Este trabajo estaba dirigido a estudiantes de la interfase bachillerato – universidad (grados décimo, undécimo o primeros semestres de universidad). En particular, se realizó con cinco estudiantes del grado décimo de una Institución Educativa

de la ciudad de Medellín, que estuvieran próximos a abordar la temática relacionada con las secciones cónicas.

4. Análisis de la información

El análisis de la información se hizo de la siguiente manera:

- Transcripción, lectura y análisis de la observación de la actividad inicial realizada con el grupo 10º1 y que tenía como único objetivo, elegir a los estudiantes del estudio de casos.
- Revisión del material de los estudiantes que surgió de las dos entrevistas grupales realizadas para garantizar algunos conceptos básicos indispensables para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico.
- Transcripción, lectura, análisis e interpretación de las entrevistas individuales de manera independiente y a la par con la recolección de la información. Cada caso fue analizado antes de abordar otro, con el fin de refinar las actividades y de contrastar los descriptores hipotéticos con el proceso de razonamiento del estudiante. El análisis individual de la comprensión se hizo triangulando tres fuentes principales de información: encuesta, entrevista y material del estudiante. Las categorías que emergieron de dicho proceso fueron comparadas con los descriptores hipotéticos establecidos antes de la recolección de información. Al finalizar, se lograron dos productos de gran importancia para la investigación: Guión de entrevista de carácter socrático con preguntas basadas en la visualización de algunas construcciones hechas mediante el doblado de papel, que permitiera en primer lugar, ayudarlo al estudiante a avanzar en su nivel de razonamiento, y en segundo lugar, ubicarlo en uno de los niveles de razonamiento de Van Hiele, de acuerdo a un conjunto de respuestas que estén en concordancia con los descriptores del nivel correspondiente. El segundo producto fue precisar los descriptores de cada uno de los niveles de razonamiento.
- Análisis de casos de manera conjunta para extraer conclusiones generales y poder establecer cómo comprenden los estudiantes el concepto de elipse como lugar geométrico, mediante la geometría del doblado de papel, en el contexto del modelo educativo de Van Hiele. Es decir, se hizo una triangulación del análisis de los cinco casos, con el marco teórico y las observaciones del investigador, para tratar de encontrar patrones en los diferentes casos.

Descriptores de los niveles de razonamiento. A continuación, se presenta una descripción general de cada uno de los niveles de razonamiento para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, como producto del análisis de la información recolectada para este estudio.

Nivel 0: Se identifica el conjunto de conocimientos previos que necesita el estudiante para llegar a la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico.

Nivel I: El estudiante utiliza la geometría del doblado de papel para construir la mediatriz, la circunferencia y la elipse.

Nivel II: El estudiante reconoce la mediatriz y la circunferencia como lugares geométricos y, con base en estos, identifica los elementos propios de la elipse.

Nivel III: El estudiante determina la condición que debe cumplir un conjunto de puntos para pertenecer a la elipse; además, es capaz de llegar a una definición de la misma como lugar geométrico.

Guión de entrevista de carácter socrático. El aspecto socrático de la prueba y su articulación con los descriptores de nivel, permitieron caracterizar el razonamiento de los estudiantes. La estructura de las preguntas inquisidoras está articulada a la red de relaciones que un estudiante debe lograr al final de la entrevista, alrededor del concepto de elipse como lugar geométrico, con base en la visualización de construcciones hechas mediante el doblado de papel. El mecanismo utilizado en la entrevista para que el estudiante logre la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, es a través de la comprensión en primer lugar de la mediatriz y, luego, de la circunferencia, ambos como lugares geométricos correspondientes.

5. Conclusiones

En el proceso que llevamos a cabo para dar consecución al objetivo general, diseñamos, evaluamos y refinamos unos descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, mediante el doblado de papel. Estos descriptores se plantearon inicialmente como hipotéticos, pero se fueron refinando a medida que se desarrolló el trabajo de campo. Finalmente, pudimos corroborar que con estos descriptores sí se pudo caracterizar el proceso de comprensión del concepto objeto de estudio, de los cinco estudiantes, porque se refinaron en el contexto particular, gracias a la interacción entre estudiante y entrevistador.

Se diseñó, se evaluó y se refinó un guión de entrevista de carácter socrático con preguntas inquisitivas que se basaban en la visualización de construcciones hechas mediante el doblado de papel. El paso del estudiante por la entrevista, se convirtió en una experiencia de aprendizaje, pues corroboramos que todos los estudiantes pudieron avanzar en su nivel de razonamiento. Además, el guión nos permitió caracterizar y analizar el proceso de comprensión de cada uno de nuestros estudiantes del estudio de casos.

El razonamiento de las personas que participaron en la entrevista, se basó en la componente visual – geométrica que brinda la geometría del doblado de papel. Estas situaciones fueron nuevas para los estudiantes y con base en ciertos aportes de información, lograron llegar a conclusiones realmente sorprendentes (como llegar al hecho de que tanto la mediatriz como la circunferencia eran lugares geométricos), que finalmente les permitieron comprender el concepto de elipse como lugar geométrico. Es importante resaltar que dentro de nuestros objetivos no se consideró esa formalización rigurosa que permite llegar a la ecuación algebraica propia de la elipse. Un trabajo posterior, que incluya coordenadas cartesianas, podría lograr que el estudiante relacione con mayor significado, las construcciones geométricas hechas mediante el doblado de papel con sus respectivas ecuaciones.

Referencias bibliográficas

- Cruz, L., & Mariño, M. (1999). Sistema computarizado para la enseñanza de las secciones cónicas. *Revista Educación*, 97, 14 – 21.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw Hill.
- Jaime, A & Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El Modelo de Van Hiele. En: S, Llenares, M.V. Sánchez (eds), *Teoría y Práctica en Educación Matemática*. España: Alfar, p. 295 – 384.
- Jaramillo, C. (2000). La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de Van Hiele. Tesis doctoral. España: Universidad Politécnica de Valencia.
- Jaramillo, C., Monsalve, O., & Esteban, P. (sf) “El Modelo de Van Hiele y el Dobrado de Papel”. Documento sin editar.
- Jurado, F. & Londoño, R. (2005). Diseño de una entrevista socrática para el concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas. Trabajo de investigación para optar al título de Magister de Docencia de las Matemáticas. Universidad de Antioquia, Medellín.
- Llorens, J. (1994). Aplicación del modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local. Tesis doctoral. Valencia, España.
- Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso. Estrategia metodológica de la investigación científica. En: *Pensamiento y Gestión # 20*. Universidad del Norte. p. 165 – 193.
- Santa, Z. (2011). La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele. Trabajo de investigación para optar al título de Magister en Educación. Universidad de Antioquia, Medellín.
- Santa Ramírez, Z. M. & Jaramillo López, C. M. (2010, septiembre-diciembre). Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (31). Recuperado de: http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php?option=com_content&task=view&id=169&Itemid=1

**Volver al índice
Mesas Temáticas**