

---

# Instrumentos de mediación en la actividad demostrativa

Sandra Viviana Bernal Torres  
sandravivianabernal@gmail.com

Alexander Romero Cañadulce  
alexanderrom83@gmail.com

Trabajo de Investigación de Maestría (Concluido)- UPN

**Resumen:** El objetivo principal de la investigación es caracterizar y analizar la función que cumplen dos instrumentos de mediación: lápiz y papel y software de geometría dinámica Cabri usados por tres grupos de estudiantes de licenciatura en matemáticas en el desarrollo de la actividad demostrativa en torno a una tarea particular de geometría. Los análisis se presentan de acuerdo con tres fases de solución de dicha tarea, con los diferentes argumentos propuestos por los estudiantes y con el uso que hicieron de los instrumentos de mediación y su función en la negociación de significados.

**Palabras clave:** Actividad demostrativa, Instrumentos de Mediación, Tipos de argumentos, Transparencia, Negociación de significados.

## 1. Presentación

La investigación surgió del interés por analizar las acciones que realizan los estudiantes en los diferentes procesos que conducen al aprendizaje de la demostración en geometría. A través de observaciones de algunos videos del trabajo realizado por grupos de estudiantes, se evidencia que ellos utilizan instrumentos de mediación en diferentes momentos y con diversos propósitos, prevaleciendo unos más que otros en ciertas ocasiones durante la solución de una situación determinada. De igual manera, en dichas observaciones se percibe que el desarrollo de una tarea se ve condicionado por el dominio que los estudiantes tienen del instrumento. Estos dos aspectos resultaron de interés investigativo debido a que ponen en evidencia un potencial didáctico diferenciado de los instrumentos a lo largo de la actividad demostrativa de los estudiantes, que los lleva a actuar de manera particular desde la lectura e interpretación de un problema hasta la demostración de una conjetura derivada de la resolución del mismo. Así, este trabajo tuvo como propósito fundamental caracterizar

el papel que cumplen algunos instrumentos de mediación en el desarrollo de una tarea particular de geometría.

## 2. Marco teórico



En el diagrama se representan de manera gráfica las relaciones entre los conceptos que se abordaron durante la investigación. En los vértices del triángulo se ubican la argumentación, los instrumentos de mediación y la resolución de problemas, que se conceptualizaron a la luz de la actividad demostrativa. Los tipos de argumentos, la transparencia y la negociación de significados se establecen como vínculos entre los vértices del triángulo.

*La actividad demostrativa.* Camargo et al., (2006) la consideran como la combinación de dos procesos que se relacionan a través de un razonamiento de tipo argumentativo. Uno está conformado por acciones de carácter heurístico como visualizar, explorar, formular conjeturas y verificarlas, que están asociadas con la resolución de problemas. Éstas promueven la argumentación al intentar explicar los hallazgos de una situación determinada y a su vez proporcionan algunos elementos útiles para la validación. El otro, se refiere a acciones propias de la práctica de demostrar. Aquí, la argumentación está ligada a la presentación de explicaciones lógicas, de pruebas y demostraciones formales. Como puente entre estos procesos se encuentra la argumentación enfocada a la justificación, en la cual, dependiendo de sus condiciones y características se pueden considerar de carácter empírico, constructivo, analítico y/o deductivo.

*La argumentación.* En concordancia con Douek (2009), se entiende como un conjunto de afirmaciones que se utilizan para justificar o explicar un resultado, o para validar una conjetura que se realice durante el proceso de resolución de una tarea. Se asume además, que la demostración es una actividad cognitiva, socioculturalmente situada, que relaciona *fases de argumentación*. Para efectos de esta investigación se definieron las siguientes fases:

*Anticipación:* En ésta, los estudiantes proponen una posible solución a la situación planteada y la argumentan, evocando únicamente sus creencias y sin realizar alguna acción de exploración con una herramienta.

*Construcción y formulación de la conjetura:* Aquí los estudiantes hacen uso de algún instrumento de mediación para representar la situación propuesta, establecen conclusiones con respecto a la anticipación que han planteado y presentan ideas en relación con la pregunta del problema. Esta fase se concreta en la proposición de una conjetura.

*Justificación:* los estudiantes proponen posibles caminos que les permitan probar, mediante el uso del sistema axiomático que conocen, la conjetura formulada y organizar sus ideas en un texto deductivo usando el formato a dos columnas.

Por otro lado, se conceptualizaron tres tipos de argumentos a saber: inductivos, deductivos y abductivos. Para el análisis de los argumentos de tipo inductivo y deductivo, se propuso el Esquema 1, mientras que para el análisis de los argumentos de tipo abductivo, se consideraron tres momentos identificados como M1, M2 y M3 los cuales indican el orden en el que se debe hacer su lectura, como se presenta en el Esquema 2:

<p>Dato: Hace referencia a las afirmaciones realizadas por uno o varios estudiantes.</p> <p>Conclusión: Se refiere al desenlace producido de las afirmaciones realizadas por los estudiantes, sin importar si son ciertas o no.</p> <p>Regla de Validación: Ideas matemáticas o apoyo de un instrumento de mediación para sustentar el paso del dato a la conclusión.</p>	<pre> graph LR     M1[Afirmaciones de los estudiantes] --&gt; M2[Regla para la cual la afirmación es un caso]     M2 --&gt; M3[Teoría para la cual la regla presentada es consecuencia de dicha teoría]     </pre>
Esquema 1.	Esquema 2.

*Los instrumentos de mediación.* Se consideran como aquellos artefactos que permiten representar objetos y relaciones matemáticas a través de diferentes registros y hacer conversiones entre ellos dependiendo de su funcionalidad o privilegio y en el uso dado por los estudiantes. Particularmente, se analizaron el papel y lápiz, y el software de geometría

dinámica Cabri, con el objetivo de comparar los resultados de la manipulación de cada uno de ellos por parte de los estudiantes en el proceso de resolución.

*La resolución de problemas.* Al igual que en Rodríguez (2006), se consideró el término “resolución” como el proceso que realiza una persona para llegar al resultado del problema y, el término “resultado” como la respuesta final a la pregunta del problema, producto de la resolución. Por “problema” se entendió al igual que en Molina, Samper, Perry, Camargo y Echeverry (2009) como una tarea para la cual los estudiantes no tienen un patrón de solución, por lo que en este proceso se requiere de una justificación.

*La noción de transparencia.* Se asumió la noción de transparencia desarrollada por Lave y Wenger (1991) que analiza la relación visible – invisible de un artefacto. Para el software de geometría dinámica Cabri, al no encontrar un referente teórico específico que mostrara la manera de analizar la apropiación de este instrumento, se propuso la siguiente categorización:

Nivel	Desde la herramienta software de geometría dinámica
Nivel 0	<i>Los estudiantes no manejan la herramienta:</i> No hay apropiación de los menús (primitivas de Cabri), ni de las funciones (como arrastre). La calculadora se presenta como un instrumento sólo para hacer cálculos. No se buscan elementos para apoyar la argumentación.
Nivel 1	<i>Hay un control mínimo de la herramienta:</i> Se conocen las primitivas; no hay apropiación de los menús correspondientes. No usan la función del “arrastre”, o la usan de forma muy limitada sin reconocer los objetos libres de la construcción. Se intentan buscar elementos que apoyen la argumentación, pero no se encuentran
Nivel 2	<i>Se realizan varios ensayos para lograr un dominio parcial de la herramienta:</i> Se conocen las primitivas; los estudiantes están apropiados de los menús correspondientes. Hacen varios ensayos para lograr una construcción. Usan la herramienta del “arrastre” aunque no controlan cuáles son los objetos libres de la construcción. Se buscan elementos para apoyar la argumentación y algunas veces se encuentran.
Nivel 3	<i>La forma en que se usa la herramienta evidencia un dominio alto de la misma:</i> Se conocen las primitivas; los estudiantes están apropiados de los menús correspondientes. No existe dificultad para construir. La herramienta del “arrastre” se usa de manera natural. Hay un control de los objetos libres. Siempre se encuentran elementos para apoyar la argumentación.
Categorización de los niveles de transparencia	

De acuerdo con Moreno (2002), el lápiz y papel son instrumentos invisibles para las personas, y por lo tanto, no se presentó una categorización para identificar el nivel de transparencia de dicho instrumento en el desarrollo de la tarea propuesta.

*La negociación de significados.* Se consideró como el conjunto de todas las acciones que realizan los estudiantes en la búsqueda de acuerdos sobre una cuestión particular. Las acciones que comprenden dicha negociación se evidencian en las interacciones entre los integrantes de cada grupo, en donde el diálogo es el elemento que las produce.

### 3. Diseño metodológico

*Tipo de investigación y participantes.* De acuerdo con el interés principal de la investigación, ésta se basó en una metodología de tipo cualitativo, correspondiente a estudio de caso de tres grupos de estudiantes (G1, G2 y G3) que cursaban, en el segundo semestre de 2008, el tercer espacio de geometría de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

*La tarea.* Los datos obtenidos provinieron de la resolución de la siguiente tarea:

- a) Con tan solo la lectura, sin realizar acción indiquen cuál cree será la respuesta a la pregunta de la siguiente situación.

Situación: En la calculadora construya una circunferencia con centro en  $C$  y punto fijo en  $P$  en el interior de tal circunferencia. ¿Para qué cuerda de la misma circunferencia que contenga a dicho punto  $P$  se tiene que el producto de las longitudes de  $AP$  por  $BP$  es máximo?

- b) Elaboren la construcción de la situación en la calculadora y escriban los pasos de la misma.  
c) Propongan una conjetura de acuerdo con lo realizado en la construcción.  
d) Demuestren la conjetura propuesta.

*Etapas de la investigación.* Para la realización del estudio se contó con dos fuentes principales: los videos de cada uno de los grupos donde se registró la resolución de la tarea y una primera versión de las transcripciones de los videos. Dichas transcripciones se fueron revisando y mejorando, incluyendo anotaciones sobre el uso de instrumentos de mediación y las argumentaciones que los estudiantes presentaban frente a la tarea particular. En seguida, se hizo lectura de las transcripciones para identificar las diferentes fases de resolución del problema y se seleccionaron fragmentos de cada una de ellas para cada grupo. Luego, se realizó el respectivo análisis de acuerdo con las categorías que se fueron construyendo a medida que se realizaban los análisis: *el desempeño en la resolución de la tarea, los argumentos que los estudiantes propusieron, los instrumentos de mediación que emplearon, el uso que hicieron de estos junto con la transparencia del software Cabri, la negociación de significados y el efecto de los instrumentos en los procesos de argumentación.* Finalmente, se construyó el informe para cada uno de los grupos, en donde se dio cuenta del uso de los instrumentos de mediación y su papel en la argumentación de los estudiantes.

## 4. Análisis de los datos

*Análisis de los fragmentos.* El ejemplo que se presenta a continuación, ilustra la manera en que se analizaron los fragmentos seleccionados, el cual corresponde al trabajo desarrollado por G1 en la fase de construcción y formulación de la conjetura. Inicialmente, se hace una contextualización, seguido del fragmento y finalmente, el respectivo análisis:

Alejandro empieza una exploración sugerida por Fabián, con el propósito de analizar más la que sucede, a partir de la construcción de la situación. Para esto, toma las medidas de los segmentos  $AP$  y  $PB$ , y realiza la multiplicación para verificar si su producto es el máximo:

- |     |    |  |
|-----|----|--|
| 55. | F: | [Cuando lee nuevamente el problema, interviene sobre lo que realmente se debe comprobar].Es la máxima longitud de la cuerda. Ahora lo que nos toca probar es que el producto de $AP$ por $PB$ es el máximo. Eso es lo que toca hacer.<br>[...]   |
| 57. | F: | Entonces hacemos eso y pues técnicamente debe suceder lo mismo que está sucediendo con la cuerda.<br>[...]   |
| 63. | O: | ¿Qué estás haciendo Alejandro?   |
| 64. | F: | Tomando la medida de $AP$ y de $PB$ para hacer el producto de ellos dos y cerciorarnos, igual que hicimos con la cuerda, de cuándo es máximo, si es cuando el diámetro, como nos pasó con la longitud total de la cuerda, o si es en otro lugar para determinar si la conjetura que estábamos haciendo si es o no es.<br>[...] |
| 66. | A: | El primer producto es cero sesenta y cuatro.   |
| 67. | F: | Y empezamos a girar [Arrastran el punto $A$ ], igual que hicimos antes.  |
| 68. | A: | El producto se mantiene siempre.   |
| 69. | N  | Sí.  |
|     | F: |  |
| 70. | A: | O sea, así cambien las medidas de la cuerda, el producto va a ser el mismo.<br>Las medidas [de la cuerda $AB$ ] son las que tienen máximo o mínimo, pero... el producto [ $AP \cdot PB$ ] sigue siendo el  |
| 71. | F: | mismo.   |
| 72. | A: | [Arrastra el punto $A$ ] gírelo para donde lo gire.  |

Como se puede observar en [66] y [67], el entorno Cabri, le permitió al grupo de estudiantes determinar que la anticipación lanzada por Alejandro no es una respuesta correcta en la solución del problema presentado en la tarea. En este momento del trabajo, el arrastre [67] y [72] jugó un papel importante ya que el hecho de poder mover la cuerda  $AB$  permitió ver que el producto es constante [71]. Aquí se puede realizar un análisis en relación con el instrumento de mediación y el otro sobre la argumentación:

En relación con el instrumento de mediación, el software de geometría dinámica es indispensable para las argumentaciones que realizan los estudiantes ya que la herramienta de arrastre permite la exploración de diferentes casos ya que se usa todo el conjunto de



cuerdas. De igual manera, el ambiente Cabri, además de usarse para buscar la cuerda que cumpla con la condición del problema, es usado como medio de exploración para evidenciar que la conjetura planteada en la anticipación no correspondía a la solución del problema y para comprobar que las condiciones del problema se cumplen en la construcción que ellos realizan; de igual manera, se usa para realizar los cálculos correspondientes durante su exploración. En este caso, el nivel de transparencia de este instrumento es de nivel 3.

Con respecto a la argumentación, se destacan dos tipos de ideas que se pueden considerar argumentos. En primer lugar, la generalización hecha por los estudiantes [66], [68], [70] y [72] proviene de un proceso inductivo ya que el descubrimiento se da por un invariante en muchos ejemplos, es decir, al tener la cuerda y arrastrarla, pueden observar múltiples cuerdas y así darse cuenta de que el producto siempre se mantiene. En este caso, el dato, la conclusión y la regla de validación se presentan de manera explícita:

Dato: El primer producto es 0.64. Conclusión: Así cambien las medidas de la cuerda el producto  $[AP \cdot PB]$  el mismo. Regla de validación: Uso del arrastre de la cuerda  $AB$  en el software de geometría dinámica Cabri.

En segundo lugar, cuando Fabián lee de nuevo la situación y propone una nueva anticipación (en la cuerda más larga, el producto  $AP$  por  $PB$  es máximo [55] y [57]), se puede establecer en ésta, una argumentación de tipo deductivo en la que tanto el dato como la conclusión se dan de manera explícita:

Dato: Si el segmento  $AB$  es un diámetro. Conclusión: entonces el producto  $AP \cdot PB$  es máximo. Regla de validación: Teorema: Los diámetros de una circunferencia son las cuerdas de mayor longitud de la circunferencia (Se presenta de manera implícita)

Se supone este teorema debido a la afirmación que hace Alejandro en [57] cuando dice “la máxima longitud de la cuerda”

En relación con la negociación de significados, se puede observar cómo Alejandro atiende a la sugerencia de Fabián de hacer una nueva exploración en el programa para analizar el producto que está sugiriendo el enunciado del problema. [55] y [64]. En el fragmento se puede observar las explicaciones de los dos estudiantes frente a lo que está sucediendo con el producto, lo cual le permite ampliar su visión del problema, de acuerdo con lo que habían realizado anteriormente.

*Comparación del trabajo realizado por los tres grupos.* El análisis de los diferentes fragmentos permitió realizar un informe de cada uno de los grupos y a partir de estos se realizó una comparación que estableció similitudes y diferencias en relación con el desempeño para resolver la tarea, la argumentación, los instrumentos de mediación y la negociación de significados. A continuación, se presenta un resumen de los instrumentos de mediación con algunas generalidades para cada uno de los grupos de acuerdo con las fases:

Fase	Instrumento	G1	G2	G3
Construcción y formulación de la conjetura	Lápiz y Papel	No se usa	No se usa	No se usa
	Software Cabri	<p>Uso durante toda la fase.</p> <p><i>Aporte en su uso:</i>            Verificar la anticipación propuesta.            Darse cuenta que la anticipación realizada no responde a la pregunta del problema            Proponer la conjetura esperada.</p> <p><i>Nivel de transparencia: 3</i></p>	<p>Uso durante toda la fase.</p> <p><i>Aporte en su uso:</i>            Darse cuenta que la anticipación realizada no responde a la pregunta del problema            Proponer la conjetura esperada.</p> <p><i>Nivel de transparencia: 2</i></p>	<p>Uso durante toda la fase.</p> <p><i>Aporte en su uso:</i>            Darse cuenta que la anticipación realizada no responde a la pregunta del problema            Proponer la conjetura esperada.</p> <p><i>Nivel de transparencia: 2</i></p>
Justificación	Lápiz y papel	<p>Se usa en algunos momentos del trabajo y se apoya con otras herramientas de trazo como la regla y el compás.</p> <p><i>Aporte en su uso:</i>            Ampliar la visualización            Descartar ideas que no aporta en la justificación</p>	<p>Se usa en la mayor parte del trabajo y se apoya con otras herramientas de trazo como la regla y el compás. Tiene prioridad sobre el software Cabri</p> <p><i>Aporte en su uso:</i>            Ampliar la visualización            Soporte para el establecimiento de propiedades            Descartar ideas que no aporta en la justificación</p>	<p>Se usa en durante todo el trabajo. Los trazos siempre se realizan a mano alzada.</p> <p><i>Aporte en su uso:</i>            Soporte fundamental para las exploraciones y para sustentar los argumentos que prepusieron.            Descartar ideas que no aporta en la justificación</p>
	Software Cabri	<p>Se usa en la mayor parte del trabajo y por lo tanto tiene prioridad sobre el lápiz y el papel.</p> <p><i>Aporte en su uso:</i>            Explorar construcciones            Descubrir propiedades            Verificar propiedades            Descartar ideas que no aporta en la justificación.</p> <p><i>Nivel de transparencia: 3</i></p>	<p>Se usa junto con el lápiz y el papel, pero en menos ocasiones</p> <p><i>Aporte en su uso</i>            Explorar construcciones            Descubrir propiedades            Verificar propiedades            Descartar ideas que no aporta en la justificación.</p> <p><i>Nivel de transparencia: 2</i></p>	<p>No se usa</p> <p><i>Nivel de transparencia: 0</i></p>



## 5. Conclusiones

En relación con los objetivos propuestos se establecieron las siguientes conclusiones:

- Las acciones realizadas a partir de la revisión de las fuentes iniciales, permitieron establecer las distintas fases de la tarea propuesta, lo cual fue importante para el trabajo ya que se logró hacer una presentación de los informes de los grupos de una manera organizada y coherente con el proceso de resolución de dicha tarea por parte de los estudiantes.
- El estudio de los referentes teóricos que se tuvieron en cuenta para la investigación aportó elementos para la construcción del marco teórico propio, en donde se logró vincular de manera integral las relaciones entre argumentación, resolución de problemas e instrumentos de mediación a través de los tipos de argumentos, la negociación de significados y la transparencia.
- Teniendo en cuenta las características de cada uno de los tipos de argumentos definidos en este trabajo, se logró hacer una descripción de cómo fueron producidos por los estudiantes en cada una de las fases. En ese sentido, para las argumentaciones de tipo inductivo y deductivo se lograron identificar los tres elementos que las componen (dato, conclusión y regla de validación) y para las de tipo abductivo, se establecieron los referentes teóricos que las conformaban.
- La propuesta sobre la categorización de los niveles de transparencia puede contribuir a futuros estudios relacionados con el uso que hacen los estudiantes del programa Cabri, ya que particularmente para esta investigación, permitió hacer un análisis de la apropiación del instrumento de mediación en relación con su uso y su utilidad en los procesos de argumentación durante el desarrollo de la tarea. No obstante, esta categorización es un modelo que puede ser estudiado y enriquecido, pues no contempla elementos generales que se puedan usar con otros instrumentos de mediación.
- En relación con la negociación de significados, en los análisis se realizaron especialmente descripciones sobre explicaciones, discusiones, propuestas y acuerdos entre los estudiantes a partir de las construcciones que elaboraron con alguno de los instrumentos de mediación. El análisis de este aspecto puede ser un factor a tener en cuenta en próximos trabajos, ya que al no haber creado ni adoptado alguna categorización para su estudio, no hubo mayor profundidad en sus análisis.
- En relación con el papel de los instrumentos de mediación usados por los estudiantes, se puede afirmar que éstos incidieron en los procesos de argumentación ya que permitieron explorar construcciones geométricas, descubrir hechos geométricos, confirmar o rechazar propuestas, apoyar la visualización, realizar construcciones auxiliares, evocar referentes teóricos y comunicar ideas.

## Referencias bibliográficas

- Camargo, L., Samper, C. y Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Lecturas Matemáticas, Volumen Especial*, pp.371 – 383.
- Douek, N. (2009). Approaching proof in school: From guided conjecturing and proving to a story of proof construction. En CERME 6, Francia 2009. Disponible en [http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/09Hiver/wg2argumentation\\_Proof.pdf](http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/09Hiver/wg2argumentation_Proof.pdf)
- Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Molina, O., Samper, C., Perry, P., Camargo, L. y Echeverry, A. (2009). *La actividad demostrativa en la enseñanza de las Matemáticas*. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Moreno, L (2002). Calculadoras algebraicas y aprendizaje de las matemáticas. En *Memorias Seminario Nacional Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías En el Aula de Matemáticas Colombia: Ministerio de Educación Nacional*. pp. 93 – 98.
- Rodríguez, F. (2006). *Análisis de demostraciones en entornos de lápiz y papel y de cabri en estudiantes de licenciatura en matemáticas*. Universidad de Valencia. Valencia, España.

**Volver al índice  
Mesas Temáticas**