

Análise de situações de volume em livros didáticos de matemática do ensino médio à luz da teoria dos campos conceituais

Analyse de situations de volume dans les manuels scolaires de mathématiques au lycée sous le point de vue de la Théorie des Champs Conceptuels

LEONARDO BERNARDO MORAIS¹
PAULA MOREIRA BALTAR BELLEMAIN²
PAULO FIGUEIREDO LIMA³

Resumo

Este artigo trata-se de um recorte de uma dissertação que investigou a abordagem da grandeza volume nos livros didáticos de Matemática do ensino médio do Programa Nacional do Livro Didático 2012 contendo sete obras aprovadas. O quadro teórico da pesquisa é composto pela Teoria dos Campos Conceituais e pelo modelo didático para conceituação de área como uma grandeza adaptado para a grandeza volume. Nessa perspectiva, elaboramos um estudo teórico das situações que permitem dar sentido ao volume como grandeza, o qual norteou a análise dos livros didáticos. Os resultados indicaram uma ênfase exacerbada nas situações de medição, no uso de fórmulas e no aspecto numérico do volume. As situações de produção e de comparação tem um papel nitidamente marginal, o que pode prejudicar a compreensão pelos alunos das relações pertinentes entre o sólido, a grandeza e a medida.

Palavras-chave: livro didático; teoria dos campos conceituais; volume.

Résumé

Ce travail est une partie d'un mémoire de mestrado dont l'objet était l'étude de l'approche de la grandeur volume dans les sept manuels scolaires de mathématiques du lycée approuvés dans l'évaluation du Programme National des Manuels Scolaires 2012. Le cadre théorique de cette recherche est composé de la Théorie des Champs Conceptuels et de l'organisation conceptuelle pour l'enseignement et l'apprentissage de l'aire en tant que grandeur, adapté à la grandeur volume. Dans cette perspective, nous avons élaboré une étude théorique des situations qui permettent de donner du sens au volume en tant que grandeur. Cette étude a été utilisée pour analyser les manuels scolaires. Les résultats montrent un accent excessif sur les situations de mesure, sur l'usage des formules et sur l'aspect numérique du volume. Les situations de production et de comparaison ont un rôle nettement marginal, ce qui peut compromettre la compréhension des relations pertinentes entre le solide, la grandeur et la mesure.

Mots-clefs: Manuel Scolaire; Théorie des Champs Conceptuels; Volume.

Introdução

Os processos de medição de grandezas são inerentes às várias culturas, nos diferentes momentos da história das civilizações (inclusive no mundo contemporâneo) e cumprem

¹ Secretaria de Educação da Prefeitura do Recife - leonardob.morais@gmail.com

² Universidade Federal de Pernambuco - pmbaltar@ufpe.br

³ Universidade Federal de Pernambuco - pauloflima@uol.com.br

um papel importante no meio social, nas tecnologias e na ciência. Em tarefas cotidianas e no exercício das diversas profissões como na construção civil, na agricultura, na culinária, na medicina, na engenharia, na costura, entre outras, são realizadas atividades que envolvem grandezas e medidas. No contexto matemático, problemas relativos a comprimento, área e volume estão na origem das ideias de número racional e irracional e na noção intuitiva de integral. Por exemplo, a medição abstrata da diagonal de um quadrado de lado unitário é um dos principais problemas que motivaram a necessidade de ampliação dos racionais, implicando no surgimento dos números reais (BRASIL, 2011). Os conteúdos desse campo são intimamente relacionados com o estudo de outras disciplinas. Por exemplo, o estudo do tempo relaciona matemática e história, pode ser explorado em articulação com ciências, ao abordar o tempo de gestação de cada espécie ou ainda conectar com língua portuguesa, no ensino de tempos verbais ou na literatura. A relevância do campo das grandezas e medidas na escola se apoia, segundo Lima e Bellemain (2010), basicamente nos três aspectos discutidos acima: seu uso nas práticas sociais e em especial nas áreas técnicas e científicas; sua articulação com outros conteúdos matemáticos; e suas ligações com outras áreas do saber científico. A importância de seu estudo na educação básica é explicitamente reconhecida nas orientações curriculares nacionais para o ensino fundamental, pela indicação das grandezas e medidas como um dos quatro domínios da matemática escolar (BRASIL, 1997; 1998b).

O campo das grandezas e medidas é extremamente vasto e sua análise remete à identificação de grandezas de naturezas diversas como a velocidade, a duração de intervalos de tempo, a massa, a densidade, entre outras. Nesse campo, destacam-se as grandezas geométricas comprimento, área, volume e ângulo, pois além de se constituir em conhecimentos socialmente relevantes para os alunos, esses conteúdos fortalecem a articulação das grandezas e medidas com os demais campos da matemática escolar (números e operações, geometria, álgebra) e com conteúdos matemáticos fundamentais como função, por exemplo.

O ensino de volume é contemplado desde a educação infantil (com a noção de capacidade), passando pelo ensino fundamental e até o ensino médio (BRASIL, 1997; 1998a, 1998b; 2002a, 2002b), o que pode ser interpretado como um reconhecimento de sua importância nos documentos de orientações curriculares brasileiros atuais.

Por outro lado, estudos (BARROS, 2002; OLIVEIRA, 2002; ANWANDTER-CUELAR,

2008; FIGUEIREDO, 2013) têm apontado que os alunos apresentam dificuldades na conceituação de volume, o que remete à realização de novas pesquisas que possibilitem compreender as razões dessas dificuldades e contribuir no médio prazo para a superação dos entraves observados.

Essa pesquisa se situa na perspectiva de buscar entender como o conceito de volume é ensinado, por considerar que a maneira como ele é abordado é um dos fatores que pode explicar as dificuldades de aprendizagem dos alunos. O reconhecimento do papel dos livros didáticos na prática docente, tanto para os professores como para os alunos (GÉRARD; ROEGLERS, 1998, CARVALHO; LIMA, 2010) levou a escolher começar a análise do ensino pela caracterização da abordagem da grandeza volume nos livros didáticos de matemática.

Neste estudo, analisamos as coleções do ensino médio, aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático - PNLD 2012 (BRASIL, 2011). Essa escolha se justifica por se tratar da última etapa da educação básica, na qual a avaliação de livros didáticos é mais recente e por não termos encontrado pesquisas sobre a abordagem de volume no ensino médio.

Este artigo aborda parte de uma pesquisa mais ampla (AUTOR) cuja questão norteadora foi “Como os livros didáticos de Matemática do ensino médio aprovados no PNLD 2012 abordam volume”? O marco teórico da pesquisa se apoia em dois pilares: a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990) e a adaptação para volume do modelo didático proposto por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989) para o ensino de área de figuras planas como grandeza. Neste artigo, o foco será na caracterização das atividades envolvendo volume identificadas nos livros didáticos analisados e o eixo central será na classificação dessas atividades, nas quais estão em jogo possíveis teoremas-em-ação e representações simbólicas.

1. Marco teórico

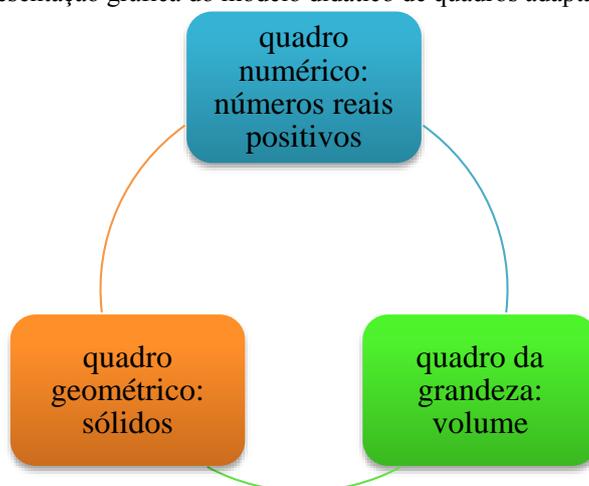
1.1 Volume como grandeza

Estudos anteriores têm defendido a conceitualização de volume como grandeza, que consiste em associar/dissociar o sólido, a medida e a grandeza. Esse modelo inicialmente proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989) para a construção do conceito de área, estabelece a distinção entre três quadros⁴: quadro geométrico, quadro das grandezas e

⁴ A noção de quadro é parte da Teoria de Jogos de Quadros e Dialética Instrumento Objeto proposta por

quadro numérico. Ele pode ser representado graficamente, segundo o diagrama abaixo, que foi fortemente inspirado em esquemas análogos de estudos anteriores (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989; LIMA, 1995):

Figura 1: Representação gráfica do modelo didático de quadros adaptado para volume.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O quadro geométrico é composto pelas figuras geométricas espaciais, a exemplo de pirâmides, esferas, sólidos irregulares, entre outros. O quadro numérico é composto pelos números reais positivos como 7, π ou 9,8. Por fim, o quadro das grandezas é constituído de classes de equivalência de sólidos de mesmo volume, as quais podem ser representadas pelo par número/unidade de medida como 3 cm³, 2,5 m³, 30 L, etc.

Os quadros acima são independentes e por isso precisam ser distinguidos. Sólidos diferentes podem ter mesmo volume e mudança na unidade de medida provoca mudança nos valores numéricos sem alterar a grandeza. Ao variar a unidade de medida, a medida do volume muda, mas o volume é o mesmo. Considere, por exemplo, uma esfera maciça: o objeto esfera pertence ao quadro geométrico, as medidas de seu volume, obtidas mediante escolha de uma unidade, pertencem ao quadro numérico e as classes de equivalência dos sólidos com o mesmo volume que a esfera dada pertencem ao quadro das grandezas.

Do mesmo modo que esses elementos são independentes, eles podem ser articulados. Por

Douady (1989), a qual foi o marco teórico da pesquisa supracitada sobre a aprendizagem da área como grandeza. No âmbito dessa teoria, intervém na constituição de um quadro os objetos de um ramo da Matemática, as relações entre esses objetos, as diferentes maneiras de representar esses objetos e relações bem como as imagens mentais que os sujeitos associam num dado momento, a esses objetos e relações.

exemplo, dada uma figura geométrica, é possível fazer corresponder a esse objeto um número real positivo, sua medida, a partir da escolha de uma unidade de mesma natureza que a grandeza a ser comparada. Isso permite associar o objeto geométrico, o número e a grandeza.

Nesse sentido, atividades relativas ao estudo dessa grandeza devem favorecer a passagem de um quadro para o outro e a dissociação/articulação entre o número, o sólido e a grandeza.

O referido modelo foi adotado por várias pesquisas anteriores à nossa (LIMA, 1995; BALTAR, 1996; BELLEMAIN; LIMA, 2002; TELES, 2007) e sua abrangência foi ampliada para o estudo da conceituação de volume (OLIVEIRA, 2002, 2007; BARROS, 2002; ANWANDTER-CUELLAR, 2008; FIGUEIREDO, 2013).

1.2 Volume na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais

Apoiamo-nos na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990) como quadro teórico de referência. Consideramos, portanto, o volume enquanto componente do campo conceitual das grandezas geométricas e enquanto conceito, composto de três dimensões interligadas: situações, invariantes operatórios e representações simbólicas.

Para Vergnaud (1990), o conhecimento está organizado em campos conceituais, considerados nessa teoria como conjuntos de situações para a compreensão dos quais se requer uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas fortemente conectados entre si. Como exemplo, podemos citar o campo conceitual das grandezas e medidas, no qual volume também está inserido, que envolve as grandezas massa, duração de intervalos de tempo, temperatura, velocidade, comprimento, valor monetário, área, ângulo, entre outras. Nesse campo conceitual estão em jogo, além das grandezas, os instrumentos e processos de medição, os sistemas numéricos, as representações dos objetos, as fórmulas e assim por diante. Podemos considerar também o campo conceitual das grandezas geométricas, como uma parte do campo conceitual das grandezas e medidas.

Ainda segundo essa teoria, o estudo do desenvolvimento de um campo conceitual requer que um conceito seja visto como formado por uma terna de conjuntos (S, I, R), onde se tem:

- o conjunto S das situações que dão sentido ao conceito;
- o conjunto I, formado por invariantes operatórios (propriedades, objetos, relações) que podem ser reconhecidas e usadas pelo sujeito para analisar e dominar essas

situações;

- o conjunto R , constituído por representações simbólicas que podem ser usadas para pontuar e representar os invariantes e , portanto, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.

Considerar volume como conceito, consiste em interrogar quais as situações que dão sentido a volume, quais os invariantes operatórios em jogo na análise e no domínio de situações sobre volume e quais as representações simbólicas que podem ser usadas para lidar com essas situações.

Embora nos apoiemos na Teoria dos Campos Conceituais, não estamos investigando sujeitos em situação, mas um sujeito “hipotético” que é o usuário do livro didático. Portanto, discutimos como os livros didáticos lidam com as três dimensões do volume como conceito.

Os tipos de situações propostas neste artigo são baseados na classificação dada por Baltar (1996) para o conceito de área, em que são sugeridos três tipos: medida, comparação e produção.

Optamos por utilizar o termo “medição” e não “medida” na designação do tipo de situação. Assim, medição se refere ao tipo de situação que consiste em medir o volume, enquanto medida consiste em um número, resultado do processo de medição. Cabe ressaltar que o termo medição remete tanto às medições práticas como às teóricas, quando se usa, por exemplo, as fórmulas para medir o volume dos sólidos.

Portanto, as situações consideradas são medição, comparação e produção. Nas situações de medição, consideramos dois subtipos: as situações de transformação de unidades e as de operacionalização de volumes:

- a) As situações de medição consistem em atribuir um número, numa dada unidade, ao volume de um sólido.
- As situações de transformação de unidades são entendidas como um subtipo de situação de medição que consiste em passar de uma unidade de volume dada para outra.
 - Situação de operacionalização de volumes é um subtipo de situação de medição que consiste em efetuar uma operação matemática com volumes permanecendo no quadro das grandezas.
- b) As situações de comparação consistem em decidir, em um dado conjunto de sólidos, qual deles tem maior/menor volume ou se têm volumes iguais.

c) As situações de produção caracterizam-se pela produção de um sólido com volume menor, maior ou igual a um volume dado.

A tipologia de situações apresentada permite caracterizar volume como uma grandeza, tendo em vista que ela possibilita estabelecer relações em um mesmo quadro e entre quadros diferentes, conforme sugerem Règine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989). Desse modo, os problemas propostos nos livros didáticos serão classificados de acordo com essa tipologia, a fim de identificarmos os tipos de situações contempladas nos livros, bem como possíveis invariantes operatórios e representações simbólicas propiciados pela abordagem de volume nas coleções analisadas.

No que tange a estudos sobre volume, constatamos que essa grandeza não parece receber atenção suficiente na literatura de Educação Matemática, uma vez que identificamos poucas pesquisas sobre esse tema, sobretudo em se tratando de sua abordagem em livros didáticos brasileiros.

Morais e Bellemain (2010) desenvolveram um estudo sobre a abordagem de volume em livros didáticos de matemática para os anos finais do ensino fundamental, no qual foram analisadas cinco coleções aprovadas no PNLD 2008 (BRASIL, 2007). Esses autores observaram que a grandeza volume é pouco trabalhada nessa etapa de ensino e a ênfase recai sobre as situações de transformação de unidades e de medição. As situações de produção e de comparação recebem pouca atenção nas coleções investigadas.

A ênfase nesse tipo de situação e, portanto no aspecto numérico, também foi diagnosticada por Anwandter-cuellar (2008) e por Barros (2002).

Anwandter-cuellar (2008) investigou as concepções de alunos do ensino secundário francês⁵ em situações específicas de volume, em que categorizou nove concepções mobilizadas pelos sujeitos da pesquisa, as quais foram associadas aos três quadros propostos por Douady e Perrin-Glorian (1989), mais o quadro das grandezas físicas: volume limitado, volume ocupado, volume sólido, volume número, volume medida, volume grandeza, volume área, volume deslocado, volume interior.

Em suas conclusões, ela aponta que a maioria dos alunos apresentou ora uma concepção situada no quadro geométrico (volume sólido - quando confunde a grandeza com o próprio sólido), ora uma concepção situada no quadro numérico (volume medida; volume número), mas sem associá-las. Estudos realizados por Oliveira (2002) e por Barros (2002), com alunos do 6º e 8º ano, respectivamente, sobre a construção do conceito de

⁵ Equivalente, no sistema de ensino brasileiro, aos anos finais do ensino fundamental.

volume como grandeza constataram que os sujeitos investigados revelaram uma compreensão insuficiente de volume, uma vez que pouco articularam/dissociaram os três componentes: o sólido, a grandeza e o número.

Resultados análogos foram constatados por Figueiredo (2013), que investigou a compreensão de volume como grandeza por alunos do ensino médio. Segundo essa pesquisadora, os sujeitos investigados apresentaram desempenho satisfatório em situações de medição, nas quais estavam em jogo aspectos numéricos de volume. Entretanto, em situações de comparação e de produção, sobretudo as não numéricas, os mesmos alunos apresentaram dificuldades, o que indica uma compreensão insuficiente de volume como grandeza. Os sujeitos investigados por Anwandter-cuellar (2008) também não apresentaram desempenho satisfatório diante de problemas de comparação e de produção.

Os resultados apontados pelos estudos supracitados indicam que a valorização excessiva do aspecto numérico de volume, pode levar a uma compreensão insuficiente do conceito. Diante do exposto, neste artigo buscamos responder as seguintes questões: quais tipos de situação são propostos na abordagem de volume nos livros didáticos do ensino médio, quais são mais enfatizados e quais são presentes, mas de maneira marginal?

2. Procedimentos metodológicos

Analizamos as sete coleções aprovadas no PNLD 2012 (BRASIL, 2011), explicitadas no quadro seguinte:

Quadro 1: Coleções de livros didáticos aprovadas no PNLD 2012.

Coleção	Autor	Editora
Conexões com a Matemática	Juliane Matsubara Barroso	Moderna
Matemática-Contexto e Aplicações	Luiz Roberto Dante	Ática
Matemática – Paiva	Manoel Paiva	Moderna
Matemática Ciência e Aplicações	David Degenszajn, Gelson Iezzi, Nilze de Almeida, Osvaldo Dolce, Roberto Périgo	Saraiva
Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia	Jackson Ribeiro	Scipione
Matemática Ensino Médio	Maria Ignez Diniz, Kátia Stocco Smole	Saraiva
Novo Olhar – Matemática	Joamir Souza	FTD

A análise das coleções consistiu em dois momentos:

- Leitura transversal de todos os exemplares das sete coleções.
- Análise minuciosa dos exemplares em que volume é objeto de estudo.

A escolha pela análise apenas dos livros em que volume é objeto de estudo decorreu da ausência desse conteúdo como foco de aprendizagem nos demais exemplares. A análise consistiu na leitura do manual do professor, que além do livro do aluno, traz as orientações didáticas.

Cada coleção foi analisada separadamente, mas como nosso propósito não era de comparar as coleções, mas de identificar tendências gerais na abordagem de volume nos livros didáticos (LD) do ensino médio, a identidade das coleções não é explicitada ao longo da análise.

A leitura transversal mostrou que volume é trabalhado no final dos LDs de 2º ano (em cinco das sete coleções) ou na primeira metade dos livros de 3º ano nas demais coleções. Caso o professor siga a ordem proposta no LD, esse conteúdo será ensinado, na melhor das hipóteses, no final do ano letivo do segundo ano ou no início do último ano letivo do ensino médio, podendo implicar numa abordagem incompleta. Observamos ainda que não havia retomada do estudo dessa grandeza ao longo do livro e/ou em anos diferentes. O volume é objeto de seções dos capítulos dedicados ao estudo dos sólidos geométricos. Essa escolha é coerente com as orientações curriculares brasileiras para o ensino médio. Com efeito, se no ensino fundamental, há um domínio das grandezas e medidas no qual o volume está inserido, no ensino médio, o estudo das grandezas é inserido no domínio geometria e medidas. Na análise das coleções foram contemplados os textos introdutórios, as atividades resolvidas e as atividades propostas. Mas no que tange ao foco deste artigo, ou seja, a classificação das situações que dão sentido a volume, contempladas nos LDs de ensino médio, foram consideradas apenas as atividades a serem resolvidas pelos alunos. Para a análise quantitativa, foram considerados os exercícios propostos e quando uma atividade trazia itens (a, b, c, etc.), cada item foi contado como um exercício.

3. Situações identificadas nas coleções

Como dito acima, contabilizamos e classificamos os exercícios propostos sobre volume no conjunto das coleções, o que está sintetizado na tabela que segue:

Tabela 1: Quantidade de exercícios identificada nas coleções.

Coleção	Medição		Comparação		Produção		Outras		Total
	#	%	#	%	#	%	#	%	
A	94	70,7	3	2,3	1	0,8	35	26,3	133
B	105	78,9	3	2,3	3	2,3	22	16,5	133
C	81	76,4	7	6,6	4	3,8	14	13,2	106
D	93	91,2	2	2,0	2	2,0	5	4,9	102
E	111	87,4	4	3,1	7	5,5	5	3,9	127
F	68	95,8	1	1,4	2	2,8	-	-	71
G	100	84,7	8	6,8	5	4,2	5	4,2	118
Total	652	82,5	28	3,5	24	3,0	86	10,9	790

A tabela 1 indica, claramente, que as situações de medição são as mais enfatizadas em todas as coleções. No conjunto dos LDs analisados, esse tipo de situação corresponde a quase 83% das atividades, e em cada LD separadamente, o percentual varia aproximadamente entre 71% e 85%. A ênfase nesse tipo de situação também foi observada por Morais e Bellamain (2010) em livros didáticos de Matemática para os anos finais do ensino fundamental, sugerindo que desde essa etapa de ensino, há uma tendência em priorizar medição (notadamente medições teóricas), ou seja, a obtenção de uma medida que pode favorecer o desenvolvimento de concepções de volume como um número (ANWANDTER-CUELLAR, 2008).

A excessiva valorização desse tipo de situação esconde outros elementos que caracterizam volume como grandeza, ou seja, que pode ser comparada, adicionada, fracionada, etc. A figura seguinte exemplifica uma situação de medição:

Figura 2: Exemplo de situação de medição dada a área total da superfície.

Um cilindro circular reto tem 6 cm de altura, e o raio da base mede 2 cm. Determine a área lateral e o volume desse cilindro.

Fonte: Coleção A (2010, p. 182)

Nesse exemplo, são dados o raio da base e a altura, informações suficientes para a aplicação imediata da fórmula, sem que nenhum dado a mais seja fornecido. Ou seja, o que fica a cargo do aluno em exercícios como esse é apenas o reconhecimento da fórmula a ser usada e a substituição das variáveis pelos valores numéricos fornecidos. No caso

acima, as medidas de comprimento são naturais e a unidade de comprimento é a mesma para o raio da base e para a altura do cilindro. Portanto, não é necessário realizar conversão de unidade.

Além da atividade acima, há outras situações de medição que requerem mais que a aplicação imediata da fórmula:

Figura 3: Exemplo de situação de medição com aplicação direta de fórmula.

43. Calcule o volume de um prisma hexagonal regular cuja superfície tem área total igual a $48\sqrt{3} \text{ dm}^2$, sabendo que a altura desse prisma é 1 dm . $18\sqrt{3} \text{ dm}^3$

Fonte: Coleção B (2010, p. 222)

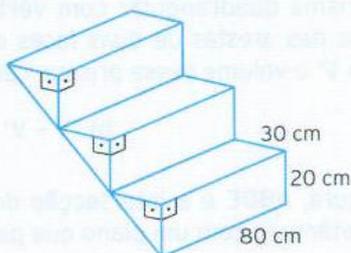
A resolução de atividades como essa pode exigir a mobilização de conhecimentos do campo geométrico, na interpretação do enunciado e na construção da resolução, apesar de o sólido em foco não estar desenhado, mas o que é evidenciado é o cálculo numérico e a manipulação de expressões algébricas. A partir dos dados do exercício, o aluno deverá calcular a área da base do prisma, a qual deve ser multiplicada pela altura desse sólido. Dentre os dados numéricos, há números irracionais e o exercício não exige mudança de unidade.

Os exemplos acima ilustram que as atividades de medição ora requerem a aplicação direta de uma fórmula de volume, ora trazem dados que remetem a outros cálculos seguidos do uso dessa ferramenta.

Consideramos dois subtipos para as situações de medição: a operacionalização de volume e transformação de unidades. Não foram identificadas nos LDs situações específicas de operacionalização de volume. No entanto, o cálculo de volume pela decomposição do sólido remete a esse subtipo de situação, mas como uma tarefa secundária, como na figura seguinte:

Figura 4: Exemplo de subtipo de situação de operacionalização de volume.

Na figura estão representados três degraus iguais de uma escada de cimento. Cada degrau é um prisma triangular com as dimensões indicadas.



- Qual é o volume de cada degrau?
- Se a escada tivesse 18 degraus, qual seria o volume de cimento necessário para construí-la?
- Se os degraus tivessem 1 m de comprimento em vez dos 80 cm, que quantidade de cimento seria necessária para uma escada com 18 degraus?

Fonte: Coleção E (2010, p. 285)

Na figura 4, solicita-se o “volume de cimento necessário” para construir uma escada de 18 degraus. A resolução dessa atividade requer uma operação de adição (volume de um degrau somado 18 vezes) ou uma operação de multiplicação (volume de um degrau multiplicado por 18). O referido tipo de estratégia conduz à realização de uma operação com volumes, o que corresponde ao subtipo de operacionalização de volume.

O subtipo de situação específica de transformação de unidade foi identificado em apenas uma coleção, como na figura que segue:

Figura 5: Subtipo de situação de transformação de unidade.

5. Converta em litros.

- $0,5 \text{ dm}^3$
- 5 m^3
- 1 100 ml
- 50 m^3

Fonte: Coleção E (2010, p. 316)

Entretanto, observamos que converter unidades aparece implicitamente nas três classes de situações consideradas, a exemplo da atividade seguinte:

Figura 6: Situação de medição que requer transformação de unidade.

14 O tanque de combustível de um caminhão tem a forma de um cilindro circular com diâmetro interno igual a 70 cm e comprimento interno igual a 130 cm. Calcule, em litros, a capacidade desse tanque de combustível. 500 L

Dica
 $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$

Fonte: Coleção C (2010, p. 137)

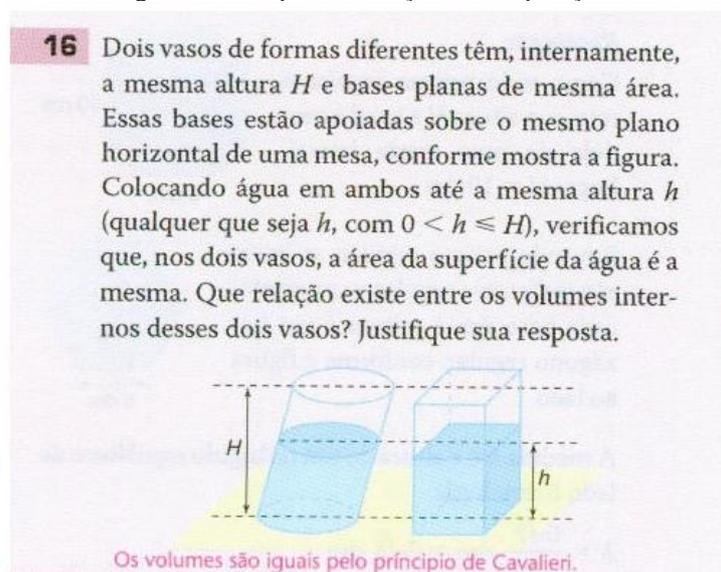
O que se busca, nessa atividade, é medir o volume do tanque de combustível. Para isso, está em jogo a transformação de unidade, considerando que as dimensões do tanque estão em cm e se pede o volume em litros. Portanto, trata-se de uma situação de medição na qual as unidades não são homogêneas.

Apesar de esse tipo de situação favorecer a distinção entre a grandeza e a medida, uma vez que unidades diferentes produzem medidas diferentes, atividades dessa natureza dissociadas de um contexto mais amplo, podem reforçar a memorização de procedimentos, sem provocar necessariamente uma compreensão mais profunda do conceito de volume e do papel das unidades. Morais e Bellemain (2010) observaram que os livros didáticos de matemática para os anos finais valorizavam situações de transformação de unidades. Portanto, nesse aspecto há uma diferença entre os livros de ensino fundamental e os de ensino médio. Segundo Anwandter-Cuellar (2008), a ênfase nessas atividades pode favorecer a concepção de volume como um número e apesar da ênfase dada nos livros didáticos do ensino fundamental, Figueiredo (2013) constatou que alunos do ensino médio apresentaram dificuldades diante de situações específicas de transformação de unidades.

As situações de comparação e de produção representam em torno de 3,5% e 3,0% das situações identificadas, respectivamente, considerando as coleções em conjunto. Tomando cada LD separadamente, há entre um e oito exercícios de comparação/produção por livro, o que consideramos insuficiente. A presença escassa desses tipos de situação pode prejudicar a compreensão do volume como grandeza, pois elas favorecem fortemente a distinção entre o sólido e a grandeza, com ou sem a interferência da medida. A Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990) mostra que o sentido que os

sujeitos atribuem a um conceito depende da variedade de situações que enfrentam, nas quais o conceito está em jogo. No nosso caso, os alunos do ensino médio, usuários dos LDs analisados, são essencialmente confrontados a situações de medição, o que pode levar a uma construção limitada desse conceito. Os exemplos que seguem ilustram situações de comparação e de produção:

Figura 7: Exemplo de situação de comparação.



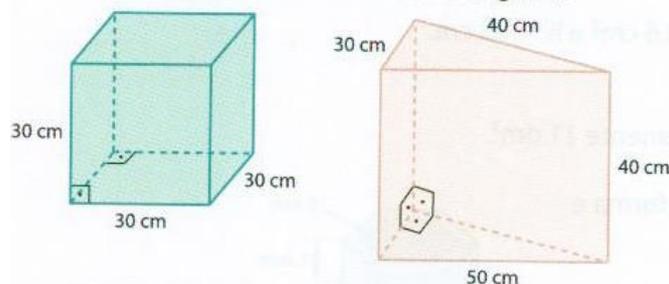
Fonte: Coleção F (2009, p. 224)

Destaca-se nessa atividade, a possibilidade de uso do princípio de Cavalieri como justificativa para a igualdade dos volumes dos sólidos. Do ponto de vista do modelo de quadros (DOUADY E PERRIN-GLORIAN, 1989), esse exercício permite explorar também o teorema-em-ação segundo o qual “sólidos diferentes podem ter mesmo volume”, enfatizando a distinção entre volume e o sólido. Além disso, essa atividade revela a não necessidade de recorrer a medições na comparação de volumes e que nem sempre o interesse é medir. Nota-se ainda a representação dos sólidos em desenho e um deles remete a um sólido oblíquo.

Por outro lado, também foram identificadas situações de comparação numéricas como no exemplo seguinte:

Figura 8 - Exemplo de situação de comparação usando medição.

48. Situação-problema da introdução do capítulo (p. 206)
Duas caixas ocas de madeira serão construídas com as formas e medidas indicadas nas figuras.



Deseja-se saber:

Em qual delas será usada maior quantidade de madeira?

Qual delas terá espaço interno maior?

Fonte: Coleção D (2010, p. 226)

Na figura 8, tem-se uma situação de comparação, em que se busca saber qual das caixas tem maior espaço interno⁶. As medidas são números inteiros positivos e as unidades são de mesma natureza, o que não requer transformá-las. A explicitação dos comprimentos remete ao uso de procedimentos numérico-algébricos, ressaltando a valorização atribuída às situações de medição. Os sólidos estão representados em desenho e requer-se do aluno o reconhecimento das informações pertinentes para resolver a tarefa. Para o prisma triangular, faz-se necessário o reconhecimento da base, o que é favorecido na representação do sólido, e dos comprimentos adequados para o cálculo da área do triângulo.

O cubo tem maior volume interno, embora sua altura seja menor, ou seja, a comparação apenas no quadro geométrico não é suficiente para decidir qual sólido tem maior volume interno evidenciando a ideia de volume como uma grandeza tridimensional. Nesse sentido, Barros (2002) observou que os alunos por ele investigados não haviam construído a noção de volume como grandeza tridimensional, pois os mesmos afirmavam erroneamente que ao dobrar os comprimentos das arestas de um bloco retangular concorrentes em um vértice, seu volume dobra.

As situações de produção também permitem explorar o teorema-em-ação “sólidos diferentes podem ter mesmo volume”, como mostra o exemplo seguinte:

⁶ Entendemos volume e capacidade como grandezas de mesma natureza, conforme sugerem Lima e Bellemain (2010).

Figura 9: Exemplo de situação de produção.

Muitas embalagens de leite que utilizamos têm a forma de um prisma com a base retangular e capacidade de 1 litro.

- a) Como você deve cortar uma dessas embalagens de leite de modo a obter um recipiente que permita medir no máximo meio litro?
Procure duas maneiras diferentes de fazer esse corte.
- b) Usando ainda embalagens desse tipo, como você faria para obter recipientes que permitissem medir um terço de litro, um quarto de litro, ..., um decilitro?
- c) E se as embalagens tivessem a forma de um prisma de base pentagonal, como você faria para obter meio litro?

Fonte: Coleção E (2010, p. 283)

O exemplo mostrado na figura 9 contempla a produção de sólidos com volume menor que um volume dado. Esta atividade favorece estratégias não numérico-algébricas, pois não são dados os comprimentos das arestas da caixa, e permite explorar também a distinção entre o sólido e a grandeza. Por exemplo, no item *a* da atividade acima é possível fazer diferentes cortes de modo que a caixa contenha, no máximo, meio litro.

Identificamos também situações de produção que remetem a medições:

Figura 10 - Exemplo de situação de produção que requer medição.

32. Qual deve ser a medida da aresta de uma caixa-d'água cúbica para que ela possa conter 8 000 ℓ de água?

Fonte: Coleção D (2010, p. 222)

Nessa atividade, busca-se o comprimento da aresta de uma caixa d'água cúbica, cujo volume é de 8000 L, ou seja, a produção de um sólido com volume interno dado. Considerando que o volume é dado em litros, a atividade requer transformação de unidades de volume, o que possibilita distinguir medida e grandeza. Também são valorizados procedimentos numérico-algébricos e o aluno precisa associar o sólido à fórmula que permite calcular seu volume, o qual é representado apenas em linguagem materna.

Nas situações de comparação e de produção observamos a possibilidade de abordar não apenas estratégias variadas, mas também ideias não abordadas em situações de medição,

como o princípio de Cavalieri e a dissociação entre a grandeza e o sólido, em que sólidos diferentes podem ter mesmo volume. Desse modo, entendemos que esse tipo de situação deveria ser mais enfatizado nos livros didáticos, pois os estudos acima mencionados (BARROS, 2002; OLIVEIRA, 2002; ANWANDTER-CUELLAR, 2008, FIGUEIREDO, 2013) indicaram que os alunos não apresentam desempenho satisfatório no enfrentamento de situações dessa natureza.

Identificamos ainda uma quantidade significativa de atividades que não foram categorizadas com a tipologia utilizada na pesquisa, como mostra o exemplo que segue:

Figura 11: Exemplo de situação não categorizada.

90. A base de um prisma é um quadrado de lado de medida 2 m, e a base de uma pirâmide é um quadrado de lado de medida 1 m. Se o prisma e a pirâmide têm mesmo volume, qual é a razão entre suas alturas?
1 para 12

Fonte: Coleção A (2010, p. 191)

O exercício acima envolve explicitamente o conteúdo em foco. No entanto, o que se busca é a razão entre os volumes de dois sólidos e, portanto, um escalar. E considerando que o prisma e a pirâmide têm mesmo volume, a distinção entre a grandeza e o sólido é favorecida, conforme já mencionado acima.

No conjunto das coleções, essas situações representam pouco mais de 10%, sendo que em algumas coleções elas são pouco presentes, e em outras elas representam em torno de 15% a 25%, como mostra a tabela 1. Tal constatação indica a necessidade de outros estudos que possam ampliar a tipologia aqui proposta. Em algumas dessas atividades, esse conteúdo é apenas usado como contexto, cujo foco é trabalhar outros conteúdos, a exemplo de área, conforme ilustrado a seguir:

Figura 121: Exemplo de situação de volume como contexto.

46. Calcule a área total da superfície de um paralelepípedo reto-retângulo, cujo volume é 240 cm^3 , sabendo que as áreas de duas faces são 30 cm^2 e 48 cm^2 . 236 cm^2

Fonte: Coleção A (2010, p. 182)

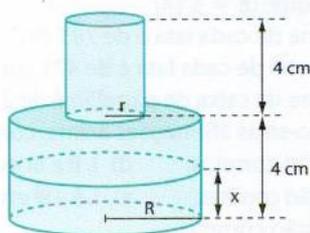
O exemplo da figura 12 envolve volume. No entanto, o que se busca não é medir, comparar ou produzir sólidos, segundo essa grandeza. Não é requerido transformação de

unidades de medida, o domínio numérico são números inteiros positivos e o sólido está representado em linguagem materna. O que essencialmente se explora nesse exercício são manipulações algébricas.

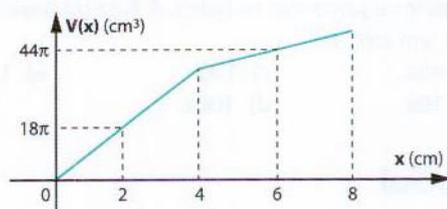
Na atividade seguinte, o foco é uma abordagem funcional de volume, na qual se propõe articular, por exemplo, a variação do volume de um sólido com sua representação gráfica:

Figura 13: Exemplo de articulação entre diferentes representações da grandeza volume.

17. (Fuvest-SP) Uma garrafa de vidro tem a forma de dois cilindros sobrepostos. Os cilindros têm a mesma altura de 4 cm e raios das bases R e r , respectivamente.



Se o volume $V(x)$ de um líquido que atinge a altura x da garrafa se expressa segundo o gráfico a seguir, quais os valores de R e de r ?



Fonte: Coleção D (2010, p. 271)

O exemplo da figura 13 ilustra um exercício não classificado. Entretanto, essa atividade articula diferentes representações (gráfica, desenho) e evidencia a ideia de volume como uma função. A fórmula de volume do cilindro também é requerida, uma vez que se buscam os comprimentos dos raios dos cilindros. Podem ser exploradas também estratégias de composição/decomposição do sólido, remetendo a situações de operacionalização de volumes.

Identificamos, portanto, três possíveis classes de problemas que envolvem volume, mas que a tipologia utilizada não dá conta e, por isso, sugerimos outros estudos que contemplem essas atividades.

Apesar de as atividades acima não se enquadrarem na tipologia proposta neste estudo, entendemos que elas são importantes na abordagem do conceito de volume. Por exemplo, do ponto de vista conceitual, a figura 11 permite estabelecer relações entre os volumes do prisma e da pirâmide e enfatiza a ideia de que “sólidos diferentes podem ter mesmo

volume”, contribuindo para a distinção entre a grandeza e o objeto.

Embora não tenha sido feita uma análise a priori sistemática das 790 atividades identificadas, decorrem dos exemplos mostrados anteriormente, possíveis estratégias como princípio de Cavalieri, composição/decomposição do sólido e uso das fórmulas. Sendo essa última, a mais valorizada. Algumas das atividades favorecem a formulação de invariantes operatórios corretos e pertinentes. Por exemplo, a distinção entre a medida e a grandeza é favorecida no exercício da figura 6, e entre o sólido e a grandeza nos exemplos das figuras 7 e 9. Dentre as propriedades do conceito de volume abordadas nos livros didáticos, verificamos a relação entre volume e capacidade, o uso das fórmulas de volume e do princípio de Cavalieri, o volume como grandeza tridimensional e como uma função e a ideia de que sólidos diferentes podem ter mesmo volume. Desse modo, essas propriedades podem vir a funcionar como invariantes operatórios na ação do sujeito no enfrentamento de situações envolvendo a grandeza volume.

Quanto ao papel das representações simbólicas, constatamos o uso recorrente de representações em desenho dos sólidos (perspectiva) e da linguagem materna, o que requer conhecimento no quadro geométrico, e a articulação de volume com o gráfico de uma função. As representações acima mencionadas ora apenas ilustram o objeto geométrico, ora requerem uma interpretação da situação.

Considerações finais

Embora se saiba que volume está presente na escolaridade desde a educação infantil, a possibilidade de uma abordagem mais profunda desse conteúdo no ensino médio pode ser prejudicada pela escolha de concentrar demasiadamente seu ensino em um único ano e em um único momento, pois segundo Vergnaud (1990) os conceitos matemáticos constroem-se em um longo período de tempo e no enfrentamento de problemas variados. Constatamos que é dada ênfase a situações de medição que, de um modo geral, valoriza o aspecto numérico. Situações de comparação e de produção, que exploram outros elementos da grandeza, como a distinção entre o sólido e seu volume, são pouco exploradas. A ênfase exacerbada nas situações de medição pode limitar o sentido atribuído pelos alunos ao volume, uma vez que, como mostra a teoria dos campos conceituais, a variedade de situações às quais os sujeitos são confrontados é um elemento importante para a construção do sentido que atribuem aos conceitos.

A associação/dissociação entre a grandeza e a medida e entre a grandeza e o sólido é

contemplada, como mostraram os exemplos acima, mas aparece timidamente e na maioria das vezes de maneira implícita, podendo passar despercebida, até mesmo pelo professor. Nesse sentido, os estudos supracitados têm apontado que os alunos ainda apresentam dificuldades em estabelecer relações entre os elementos dos três quadros (DOUADY E PERRIN-GLORIAN, 1989). Algumas representações gráficas de sólidos diferentes com mesmo volume e a abordagem do princípio de Cavalieri também contribuem para distinguir a grandeza e o objeto geométrico. Por outro lado, a pouca ocorrência de situações de comparação e de produção, sobretudo as não numéricas, e a ênfase nas situações de medição e no aspecto numérico sugerem que o trabalho realizado é insuficiente para estabelecer as distinções/articulações entre os componentes: o sólido, a grandeza e a medida. Diante disso, entendemos ser necessário o uso de outras situações ou abordagens mais explícitas que possibilitem explorar essas relações.

Em síntese, pode-se dizer que apesar de haver oportunidades de distinguir o sólido e a grandeza, bem como a grandeza e o número, a abordagem do volume nas coleções analisadas é caracterizada por uma ênfase clara nas situações de medição, no uso das fórmulas e no aspecto numérico e não contribui suficientemente para atribuir sentido ao volume como uma grandeza.

Referências

- ANWANDTER-CUELLAR, N. (2008). *Etude de conceptions d'élèves à propos du concept de volume. Mémoire de master - 2 HPDS (Histoire Philosophie et Didactique des Sciences) -Université Montpellier 2.*
- BALTAR, P. M. (1996). *Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège.* Tese (Doutorado em Didática da Matemática). Université Joseph Fourier, Grenoble.
- BARROS, J. S. (2002). *Investigando o conceito de volume no ensino fundamental: um estudo exploratório.* Dissertação (Mestrado em Educação), Programa de Pós Graduação em Educação, Centro de Educação, UFPE - Recife.
- BARROSO, J. M. (2010). *Conexões com a Matemática.* Vol. 1, 2, 3. São Paulo: Ed. Moderna.
- BELLEMAIN, P.M. ; LIMA, P.F.(2002). *Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental.* Natal: SBHMat.
- BRASIL. (1998a). Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil.* Brasília: MEC/SEF.
- _____. (1997). Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares

- Nacionais: Matemática, Ensino de 1ª a 4ª série. Brasília, MEC/ SEF.
- _____. (1998). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental*. – Brasília: MEC/ SEF.
- _____. (2002a). Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília.
- _____. (2002b). Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *PCN+: Ensino Médio orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília.
- _____. (2007). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Guia de livros didáticos: PNLD 2008: Matemática / Brasília*.
- _____. (2011). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Guia de livros didáticos: PNLD 2012: Matemática / Brasília*.
- CARVALHO, J. B. P; LIMA, P. F. (2010). Coleção Explorando o ensino: *escolha e uso do livro didático*. Volume 17. Brasília. p. 15-30.
- DANTE, L. R. (2010). *Matemática: contexto e aplicações*. Vol. 1, 2 e 3. São Paulo: Ática.
- DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN.M.-J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *In: Educational Studies in Mathematics*. n. 4. vol.20, p. 387- 424.
- FIGUEIREDO, A. P. N. B. (2013). *Resolução de problemas sobre a grandeza volume por alunos do ensino médio: um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Programa de Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Centro de Educação, UFPE, Recife.
- GÉRARD, F.M., ROEGIERS, X. (1998). *Conceber e avaliar manuais escolares*. Porto: Porto Editora.
- IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R., ALMEIDA, N. (2010). *Matemática: ciência e aplicações*. Vol. 1, 2 e 3. Ed. 6 – São Paulo: Saraiva.
- LIMA, P.F. (1995). *Considerações sobre o conceito de área*. In: Anais da Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática. Recife.
- LIMA, P. F.; BELLEMAIN, P. M. B. (2010). Coleção explorando o ensino: *Grandezas e medidas*. Volume 17, Brasília. p. 67- 200.
- MORAIS, L. B., BELLEMAIN, P. M. B. (2010). *Análise da abordagem do conceito de volume nos livros didáticos de Matemática para os anos finais do ensino fundamental sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais*. Congresso de Iniciação Científica - UFPE, Recife.
- OLIVEIRA, G. R. F. (2002). *Construção do Conceito de Volume no Ensino Fundamental: um estudo de caso*. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.
- _____. (2007). *Investigação do papel das grandezas físicas na construção do conceito de volume*. Tese (Doutorado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.
- PAIVA, M. (2009). *Matemática – Paiva*. Vol. 1, 2 e 3. Ed. – São Paulo: Moderna.

RIBEIRO, J. (2010). *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia*. Vol. 1, 2 e 3. São Paulo: Scipione.

SMOLE, K. C. S., DINIZ, I. S. V. (2010). *Matemática: ensino médio*. Vol. 1, 2 e 3. 6 ed. – São Paulo: Saraiva.

SOUZA, J. R. (2010). *Novo olhar matemática*. Vol. 1, 2 e 3. 1 ed. São Paulo: FTD.

TELES, R. (2007). *Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas*. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal de Pernambuco, UFPE, Recife.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* – RDM, n° 2, 3. v. 10. p. 133 – 170, Grenoble.

Recebido : 30/05/2013

Aceito : 07/10/2013