Los procesos de razonamiento infinito en la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo

René Alejandro Londoño Cano
rene2@une.net.co
Universidad de Antioquia

Carlos Mario Jaramillo López
cama@matematicas.udea.edu.co
Universidad de Antioquia

Pedro Vicente Esteban Duarte
pesteban@eafit.edu.co
Universidad Eafit

Tesis de Doctorado (en desarrollo)-UdeA

Resumen. La presente propuesta es uno de los resultados de la tesis de Doctorado "La relación inversa entre cuadraturas y tangentes, en el marco de la teoría de PK", con la cual se pretende mostrar cómo los procesos de razonamiento infinito, involucrados en los conceptos de área y tangente, permiten establecer la comprensión de la relación inversa existente entre éstos, con el fin de dar paso a la comprensión de lo que hoy se conoce como Teorema Fundamental del Cálculo. Para conseguir tal propósito, se elige como marco teórico la teoría de Pirie y Kieren, que establece una gradación de la comprensión, de acuerdo a unas características específicas y, finalmente, como estrategia metodológica, la entrevista de carácter socrático, ya probada en otras investigaciones en Educación Matemática.

Palabras clave: Comprensión, procesos de razonamiento infinito, área, tangente.

1. Presentación

Desde los griegos hasta nuestros días, se ha evidenciado que la idea de infinito ha revolucionado los acontecimientos y descubrimientos matemáticos a través de la historia, a la vez que los procesos de razonamiento infinito que involucran la actividad mental con esta idea, han permitido evidenciar avances o dificultades de tipo cognitivo a la hora de comprender conceptos matemáticos que tienen que ver con la noción de aproximación y el paso al límite. En este sentido, con la propuesta se propone facilitar a los estudiantes de la

Educación Media y primer semestre de universidad, que han pasado por una enseñanza de los conceptos de recta tangente y área, la comprensión de uno de los teoremas más importantes del Análisis Matemático (y por supuesto de los conceptos que allí se involucran) como lo es el TFC[1], mediante la extensión y aplicación de la teoría PK[2], con el diseño de actividades enmarcadas en los estratos de comprensión propuestas por la teoría.

Es importante destacar el uso de conceptos como los de área, gráfica de una expresión algebraica, pendiente de una recta, entre otros, por parte de los estudiantes, sin necesidad de acudir al Cálculo infinitesimal, y tan sólo con la ayuda de procesos de razonamiento infinito, poder propiciar que se comprenda la relación inversa en cuestión.

En conclusión, el problema que el estudio pretende abordar es:

> *A Los estudiantes de último año de Educación Media y primer semestre de universidad, se les dificulta la comprensión de procesos de razonamiento infinito involucrados en la aprehensión de los conceptos de área bajo una curva y recta tangente a una curva en un punto.*

En otras palabras, el problema identificado tiene que ver directamente con la dificultad de sustituir conceptos intuitivos como los de tangente y área, por los actuales de derivada e integral, los cuales se obtienen por un proceso mental de aproximación, que no son otra cosa que procesos de razonamiento infinito. En términos matemáticos, tales procesos tienen que ver con las siguientes ideas:

- La recta tangente como límite del haz de secantes. En este sentido el proceso de aproximación involucra el concepto de límite y su relación con los diferenciales: $\Delta y = f\left(x+\Delta x\right) - f\left(x\right) \approx dy = f'\left(x\right)dx$. También se considera fundamental, dentro del pensamiento matemático del estudiante, la separación de la idea de recta tangente a una circunferencia con la generalización de la recta tangente a una curva cualquiera.

- El área limitada por dos curvas en un intervalo. El proceso de aproximación se evidencia en la partición de un intervalo $\left[a,b\right]$ para definir la integral definida como el límite de una suma de Riemann:
$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \underset{\|\Delta\| \to 0}{Lim} \sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right)\Delta x_i$$

---

[1] Llamado por la mayoría de los autores como segundo Teorema Fundamental del Cálculo, el cual tiene que ver directamente con la evaluación de integrales definidas. Es necesario aclarar que algunos textos de Cálculo llaman segundo TFC (Teorema de Evaluación o simplemente TFC), a los que otros llaman primer TFC y viceversa, hecho que obedece al tratamiento secuencial de los teoremas y sus correspondientes demostraciones, de acuerdo a la presentación preferencial o rigurosa que hacen los autores.

[2] Pirie & Kieren. En adelante, se hablará de la teoría PK haciendo referencia a toda la teoría para la comprensión matemática postulada por Pirie & Kieren y, como modelo de Pirie & Kieren, sólo al gráfico fractal en el cual se exhiben sus estratos.

- La parte del TFC que presenta la igualdad: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, donde f es continua en $[a,b]$ y F es una antiderivada de f en el mismo intervalo. En esta parte del teorema, la investigación intenta hacer explícito en la comprensión del estudiante un aspecto geométrico que hace pensar en que un área corresponde a una diferencia de longitudes.

De acuerdo al problema enunciado, comprender los procesos de razonamiento infinito se convierte en el eje transversal que permite conectar la relación inversa entre las tangentes y las cuadraturas. De hecho, allí radica la genialidad de Newton y Leibniz al lograr superar los razonamientos finitos y estáticos (geométricos y aritméticos) de sus antecesores, tales como los del mismo Isaac Barrow.

Si se trata entonces de que los estudiantes comprendan procesos de razonamiento infinito haciendo uso de la relación inversa entre las tangentes y las cuadraturas, se considera conveniente tener en cuenta los razonamientos infinitos más contemporáneos, como por ejemplo los de Leibniz, quien consideraba los infinitesimales positivos como números que son mayores que cero, pero menores que todos los reales positivos. Para él los infinitesimales son *incomparables,* porque con respecto a las cantidades finitas son *como granos de arena al mar* (Edwards, 1982). También creía que las líneas rectas y curvas eran polígonos con infinito número de lados (polígonos infiniláteros), que las superficies curvas, poliedros de infinitas caras (poliedros infiniédricos), que el movimiento variado era una sucesión de movimientos uniformes, etc; de tal forma que las cantidades quedaban descompuestas en elementos más sencillos y por lo tanto más fáciles de captar. Por esto, Leonhard Euler le dio el nombre de *Análisis Infinitesimal,* al área de la Matemática que hoy conocemos como Cálculo o Análisis Matemático.

2. Marco Teórico.

Se ha elegido la teoría de Pirie y kieren para el desarrollo de la propuesta por tres razones fundamentales:

- El Teorema Fundamental de Cálculo involucra conceptos que se encuentran estrechamente relacionados, pero al momento de abordarlos en el proceso de enseñanza y aprendizaje se crea en la mente del alumno una inadecuda integración entre el concepto imagen y el concepto definición (Tall y Vinner). Dado esto, el estudio pretende formular una propuesta metodológica que involucre mecanismos de tipo visual-geométrico, en los que el modelo fundamenta los estratos de comprensión iniciales, de tal forma que mejoren la integración entre los conceptos arriba mencionados y se llegue finalmente a la comprensión del Teorema en cuestión, acorde con el progreso en los diferentes estratos.

- La teoría ha sido extendido como marco teórico en la ejecución de propuestas metodológicas, a conceptos del Análisis Matemático por parte del profesor David E. Meel[3], con resultados satisfactorios.
- La teoría permite a los estudiantes comprender no sólo conceptos, sino también relaciones entre ellos, tal como es el caso de la relación inversa entre tangentes y cuadraturas, debido a su característica dinámica de *redoblar,* es decir, permite retroalimentar (que, en términos de Pirie y Kieren sería *volver a doblar*) en estratos más internos con un estrato de comprensión más avanzado, en casos en los que la comprensión haya resultado inadecuada o se haya observado la necesidad de una reexaminación de la comprensión de un estrato en una forma diferente.

Descripción del modelo. El modelo de Pirie y Kieren postula ocho estratos que describen la evolución de la comprensión matemática en cuanto a conceptos o relaciones entre conceptos se refiere. A su vez, en cada uno de estos estratos (a excepción del primero) se identifican dos elementos complementarios que son *la complementariedad de un proceso y la acción orientada a la forma.* En particular, las acciones orientadas a la forma se presentan como una demostración de un agente externo que intenta determinar el estrato de comprensión en el que un estudiante se encuentra operando. Sin embargo, Pirie y Kieren (1994 b) afirman que si lo estudiantes realizan sólo acciones sin la expresión correspondiente, entonces sus comprensiones se inhiben y no pasan al siguiente estrato.

La nomenclatura de los estratos. Se toma de Meel[4] la interpretación de los estratos de comprensión del modelo:

Estrato 1. Conocimiento primitivo. Los estudiantes afloran toda la información que tiene que ver con ideas intuitivas (conocimiento intuitivo) o experiencias de aprendizaje anteriores. También se conoce como *conocimiento situado* (en términos de Brown, Collins y Duguid, 1989) o *conocimiento previo o informal* (en términos de Saxe, 1988).

Estrato 2. Creación de imagen. El estudiante es capaz de realizar distinciones con base en capacidades y conocimientos anteriores. Las imágenes no necesariamente son representaciones pictóricas, sino que transmiten el significado de cualquier tipo de imagen mental. Las acciones que se realizan en este estrato se relacionan con los aspectos mentales o físicos que se evidencien, con el fin de obtener una idea sobre el concepto.

---

[3] Meel, David E. (1998). "Honors students' Calculus Understandings: Comparing Calculus & Matemática and Traditional Calculus Students". Pittsburgh, Pensylvania. American Mathematical Society. CBMS Issues in Mathematics Education. Volumen 7

[4] Meel, David E. (2003). "Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE". Distrito Federal de México, México. RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Volumen 6, Número 003. pp 221 - 278

Estrato 3. Comprensión de la imagen. En este estrato, el estudiante se ve en la necesidad de reemplazar las imágenes asociadas con una sola actividad por una imagen mental. El desarrollo de tales imágenes mentales que no son más que imágenes orientadas por un proceso, libera al estudiante de las matemáticas a partir de la necesidad de realizar acciones físicas particulares (Pirie y Kieren, 1992). Aquí el estudiante comienza a reconocer las propiedades globales obvias de las imágenes matemáticas inspeccionadas.

Estrato 4. Observación de la propiedad. El estudiante examina una imagen mental y determina los distintos atributos asociados con dicha imagen, observa las propiedades internas de una imagen específica además de las distinciones, combinaciones o conexiones entre las distintas imágenes mentales. Construyen y modifican definiciones mediante la combinación de tales propiedades. Es posible también que el estudiante desarrolle un concepto-definición (Tall y Vinner, 1981) creada a partir de la interacción entre las diversas imágenes vinculadas, en vez de las imágenes desconectadas.

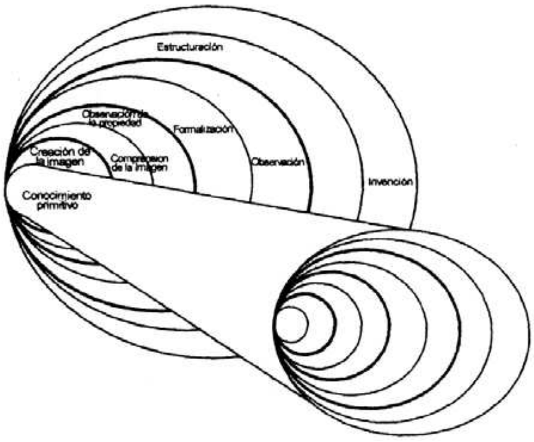
Estrato 5. Formalización. El estudiante conoce las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes, abandona los orígenes de la acción mental, para finalmente producir definiciones matemáticas completas. Es importante anotar que las descripciones generales proporcionadas por los estudiantes deben ser equivalentes a una definición matemática adecuada, aún cuando no sea necesario usar un lenguaje matemático formal.

Estrato 6. Observación. El estudiante utiliza su pensamiento formal, es decir, produce verbalizaciones relacionadas con la cognición, sobre el concepto formalizado, además de que es capaz de combinar definiciones, ejemplos, teoremas y demostraciones para identificar los componentes esenciales, las ideas de conexión y los medios para cruzar entre dichas ideas.

Estrato 7. Estructuración. En este estrato, el estudiante trasciende el tema particular para la comprensión que se encuentra en una estructura mayor. Es capaz de explicar las interrelaciones de dichas observaciones mediante un sistema axiomático (Pirie y Kieren, 1989).

Estrato 8. Invención. El estudiante es capaz de liberarse del conocimiento estructurado que representa la comprensión total y crea preguntas totalmente nuevas que tendrán como resultado el desarrollo de un concepto nuevo. En este estrato, la comprensión matemática del estudiante es infinita, imaginativa y llega más allá de la estructura actual, lo que hace que el conocimiento estructurado se convierta en una nueva dimensión de conocimiento primitivo en el cual la comprensión se extiende para un concepto más elaborado.

La figura siguiente muestra en el primer diagrama una representación de la estratificación de la teoría. En él se pueden observar cómo los estratos para la evolución de la comprensión matemática forman una composición de modelos completos, similares a la totalidad otorgando al centro interno una característica fractal.



3. Diseño metodológico

Dado que nuestro estudio se enmarca en el campo de la Educación Matemática, se ha elegido precisamente el enfoque cualitativo, con el fin de que la entrevista socrática para la comprensión del TFC se convierta en una experiencia educativa, que permita precisamente realizar exploraciones y descripciones sobre los entrevistados, que nos acerquen cada vez más a una interpretación adecuada de cómo comprenden los conceptos involucrados.

El enfoque cualitativo se caracteriza por estar fundamentado en métodos de recolección de datos no estandarizados y en procedimientos que son analizados caso por caso y dato por dato, hasta llegar a una perspectiva más general, construyendo hipótesis que se van refinando conforme se recaban más datos.

El método. El estudio de casos es una investigación empírica que estudia un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto real (Yin, 2009), en la que los límites entre el fenómeno y el contexto no son claramente visibles, y en la que se utilizan distintas fuentes como evidencia: observaciones, entrevistas, cuestionarios, entre otros. Se concibe así el método de casos como el más adecuado para el presente estudio, dadas las ventajas que ofrece para dilucidar comportamientos, actitudes y conocimientos que evidencian el avance en la comprensión de los entrevistados, identificando tres casos, de acuerdo al estrato de comprensión alcanzado.

4. Análisis de datos

Para el análisis de la información, se analizan los tres casos de entrevista para cada uno de los bloques de preguntas en que está dividida la entrevista, desde tres de las características que la teoría de PK presenta: *Folding Back (redoblamiento), complementariedad de la acción y complementariedad de la expresión.* Es necesario puntualizar que cualquier expresión de duda o desconocimiento que implique acudir a conceptos anteriores, sin haber realizado procesos de comprensión, no son susceptibles de ser considerados como momentos de *Folding Back;* en nuestro estudio y, de acuerdo a la teoría de PK, el *Folding Back* se considera como un fenómeno que ocurre, cuando se observa una reexaminación en los estratos de comprensión anteriores que involucran una asociación de ideas entre los conceptos, y no se puede reducir al sólo recuerdo de ellos. Una vez se haya dado el *Folding Back,* se considera que hay avance a un estrato de comprensión superior, cuando necesariamente haya pasado de nuevo por las complementariedades de la acción y la expresión en el estrato de retroceso y esté razonando con los conceptos y procesos del nuevo estrato.

5. Conclusión

Mediante el estudio cualitativo en cada uno de los casos analizados, se logra comprobar que los estudiantes, aunque pueden aplicar en forma correcta el Teorema Fundamental del Cálculo en situaciones concretas de aula (ejercicios, problemas, entre otros, …), la mayoría no logran su comprensión. La entrevista socrática como estrategia metodológica, en conjunto con la teoría de PK como marco teórico para la relación inversa entre cuadraturas y tangentes, logra poner de manifiesto en los estudiantes los procesos de razonamiento infinito relacionados con los conceptos de área y tangente, lo cual proporciona la comprensión del teorema en cuestión.

Otro aspecto importante radica en el hecho de que la teoría de PK se ha podido extender a la comprensión de conceptos específicos del Análsis Matemático, que ha involucrado procesos de razonamiento infinito como el de aproximación, en la ideas de tangente, pendiente y área; aunque Meel lo ha hecho de manera general (Meel, 1998), en conceptos amplios del Análisis, como lo son los de Límite, Derivada e Integral.

Hasta ahora, se conocen investigaciones en Educación Matemática realizadas en el contexto de la teoría de PK, mientras que otras han sido realizadas en el contexto de la entrevista de carácter socrática; el presente estudio logra vincular de manera acertada ambos referentes, uno como marco teórico, y el otro, como estrategia metodológica, logrando alcanzar óptimos resultados en el análisis y avance de la comprensión del TFC, lo que puede sugerir su aplicación para otros conceptos.

Referencias bibliográficas

- Edwards, J. T. (1982). The Historical Development of the Calculus. New York.
- Meel, D. (1998). Honors student's Calculus Understandings: Comparing Calculus & Mathematica and Traditional Calculus Students. CBMS Issues in Mathematics Education , 7.
- Meel, D. (2003). Models and theories of Mathematical Understanding: Comparing Pirie and Kieren's Model of the Growth of Mathematical Understanding and APOE theory. CBMS Issues in Mthematics Education , 12, 132-181.
- Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. For the Learning of Mathematics , 9 (3), 7-11.
- Pirie, S., & Kieren, T. (1992a). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. Educational Studies in Mathematics , 505-528.
- Pirie, S., & Kieren, T. (1994b). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? Educational Studies in Mathematics , 26, 165-190.
- Saxe, G. (1988). Studying working intelligence. En B. Rogoff, & J. Lave, Everyday cognition (págs. 9-40). Cambridge.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with special reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics , 12, 151-169.
- Yin, R. (2009). Case study research, Design and methods. California: Sage Publications, Inc.

Volver al índice Mesas Temáticas