A vueltas con la circunferencia (y el círculo)

por

ANTONIO M. OLLER MARCÉN

(Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza)

El origen etimológico de la palabra geometría es bien conocido por todo el mundo y surge de la creencia griega (que nos ha llegado por Herodoto) de que esta disciplina se originó por la necesidad de los egipcios de medir sus tierras adecuadamente tras cada una de las periódicas crecidas del Nilo. Sea esto cierto o no, en el *Papiro de Rhind* ya aparecen numerosos problemas relacionados con el cálculo de áreas de diversas figuras planas: triángulos, rectángulos, trapecios, etc. También se dedica algo de tiempo a dar valores aproximados para la medida de la superficie de un círculo, como el siguiente:

> Ejemplo de un campo redondo de 9 *khet* de diámetro. ¿Cuál es su área? Quita 1/9 del diámetro, o sea 1; quedan 8. Multiplica 8 veces 8; sale 64. Por tanto contiene 64 *setat* de tierra.

No nos interesa ahora analizar el grado de exactitud de la fórmula que está implícita en el proceso anterior (aunque el lector interesado puede detenerse a hacerlo). Lo que nos resulta curioso, e improbable, es que hubiera en Egipto campos circulares.

Parece poco razonable pensar que el intenso y antiguo interés de la humanidad por la forma circular pueda fundamentarse en necesidades relacionadas con la agrimensura. Más factible resulta que dicho interés se explique en base a otro de los contextos en los que pudo originarse la geometría: las observaciones astronómicas. En todo caso, desde el inicio mismo del estudio de lo que hoy se llama geometría, la circunferencia y el círculo han estado presentes y han formado parte del currículo. En este texto vamos a prestar especial atención al modo en que se han introducido, presentado o definido los conceptos de circunferencia y círculo a lo largo del tiempo.

Por supuesto, ambos conceptos están indisociablemente unidos. Sin embargo, incluso antes de dar definición alguna, hay una pregunta que hacerse y, por tanto, una toma de posición que efectuar: ¿Existe algún tipo de jerarquía entre ambos conceptos? Y, si es así, ¿cuál de ellos está subordinado al otro? En términos generales, como se apreciará en los ejemplos que aparecen más adelante, se podrán distinguir tres posturas diferenciadas:

- — Dar prioridad a la circunferencia y considerar el círculo como «lo que está encerrado por una circunferencia».
- — Dar prioridad al círculo y considerar la circunferencia como «lo que bordea a un círculo».
- — No dar prioridad a ninguno de los dos, presentándolos de forma paralela y simultánea.

Dicho esto, otros aspectos interesantes sobre los que conviene reflexionar son, en primer lugar, la necesidad de definir explícitamente un objeto y, en segundo lugar, qué significa definir un concepto abstracto. Este segundo aspecto es más complicado de lo que parece y nos llevaría por la senda de la filosofía. El primero, como matemáticos, lo tenemos completamente asumido desde Euclides. Que el discurso matemático debería comenzar con una definición explícita (sea lo que sea eso) es casi un axioma cuya validez nos planteamos muy pocas veces.

No siempre ha sido así. En el ya mencionado *Papiro de Rhind* se calcula el área de campos redondos sin decir explícitamente qué se entiende por redondo. Lo mismo sucede en el *Jiu Zhang Suan Shu* chino y en otros textos antiguos. En estos textos se asume que el lector ya posee una imagen mental de lo que se entendía por redondo de manera que resulta innecesario para la finalidad que se persigue tratar de definir formalmente el concepto. Este tipo de aproximación la podemos encontrar mucho más recientemente. Por ejemplo, en la figura 1, vemos cómo se presentaban el círculo y la circunferencia a estudiantes de 6-7 años de edad en un texto de SM del año 1966.

Figura 1. Texto de SM de 1966

Como vemos, se proporcionan en paralelo tanto figuras *abstractas* como dibujos de objetos reales. Sin embargo, se presentan las imágenes de forma ostensiva, sin ningún tipo de discurso. El esfuerzo del autor del libro aquí está más en *dar nombre* que en caracterizar o definir formalmente. A este respecto, bastantes años antes, en 1932, el profesor José María Eyaralar (formador de maestros, becado por la Junta de Ampliación de Estudios durante la II República para formarse en Francia, encarcelado, depurado y degradado por la dictadura) en su *Metodología de la Matemática* escribió:

> Para llegar a la definición de circunferencia puede partirse del estudio de una rueda [...] La observación o la construcción, o ambas operaciones, deben, pues, preceder a toda definición.

Por supuesto, en el caso que nos ocupa, la definición formal que todos conocemos aparece ya en la Definición 15 del Libro I de los *Elementos* de Euclides:

> Un círculo es una figura plana comprendida por una sola línea llamada circunferencia de tal modo que todas las rectas dibujadas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí.

Y la sombra de Euclides es alargada. Frente a la posición anterior de Eyaralar podemos encontrar textos igualmente destinados a la educación primaria que adoptan una postura mucho más formal. Es el caso, por ejemplo, de los *Elementos de Geometría Puestos al Alcance de los Niños* que publicó en 1865 don Esteban Paluzie y Cantalozella. Allí, se lee sin más preámbulos:

> ¿Qué es círculo?
> Círculo es una figura reentrante en sí misma, cuyos puntos distan todos igualmente de uno interior situado en el plano.

No aparecen objetos reales, ni se define el concepto de circunferencia; a pesar de que el término aparece inmediatamente en el texto con un significado desconocido (aunque sobreentendido).

Al presentar el concepto formalmente, sin apoyo en la realidad, el autor se ve en la necesidad de verbalizar el carácter curvo de la figura. De ahí esa extraña expresión utilizada de «figura reentrante en sí misma». Pese a que pueda resultar una expresión extraña, la encontramos también utilizada por matemáticos de la talla de José Mariano Vallejo en su *Tratado Elemental de Matemáticas* (1812), cuyos destinatarios no eran precisamente infantiles.

En todo caso, y por mucho que nos parezca que esta definición es totalmente clara, lo cierto es que muchos autores se han visto en la necesidad de proporcionar diversas aclaraciones. Juan Pérez de Moya, en su *Tratado de Geometria Practica, y Speculatiua* de 1573 consideró oportuno incluir las aclaraciones que vemos en la figura 2.

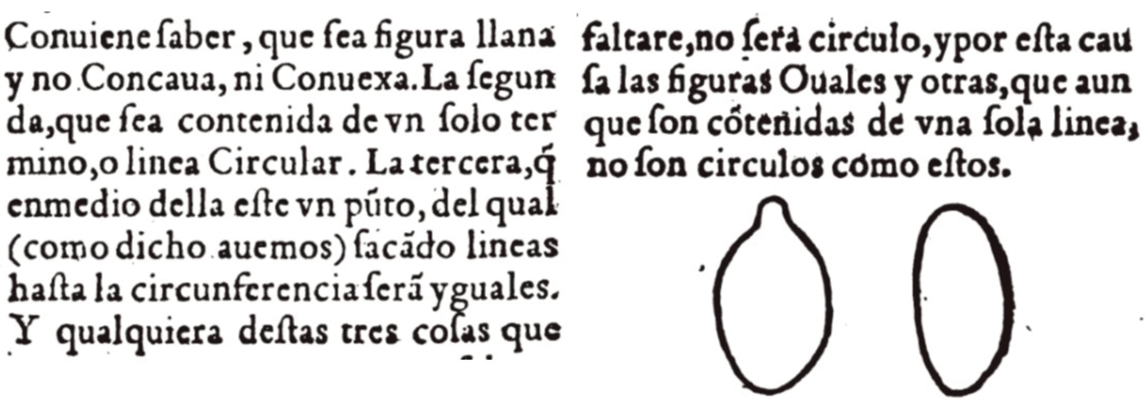
Conuiene ſaber, que ſea figura llana y no Concaua, ni Conuexa. La ſegunda, que ſea contenida de vn ſolo termino, o linea Circular. La tercera, q̃ enmedio della eſte vn pũto, del qual (como dicho auemos) ſacãdo lineas haſta la circunferencia ſerã yguales. Y qualquiera deſtas tres coſas que faltare, no ſera circulo, y por eſta cauſa las figuras Ouales y otras, que aun que ſon cõtenidas de vna ſola linea, no ſon circulos como eſtos.

Figura 2. Aclaraciones de Juan Pérez de Moya

Los ejemplos que hemos visto hasta ahora presentan una visión estática de la circunferencia y el círculo. Sin embargo, también es posible encontrar ya desde antiguo definiciones con un marcado carácter dinámico. En la figura 3, por ejemplo, vemos la definición que aparece en *La Géométrie Pratique* (1684) del francés Jacques Ozanam.

Como se puede observar, el círculo es «causado» por el movimiento del radio; de modo que esta forma de definirlo evoca el procedimiento de construcción o de dibujo de la figura. Mucho más explícito a este respecto es el también francés Alexis Claude Clairaut quien, en sus *Élémens de Géométrie* de 1741, da la siguiente definición (mi traducción):

> La circunferencia es el trazo completo que describe la punta móvil de un compás mientras gira en torno a la otra punta.

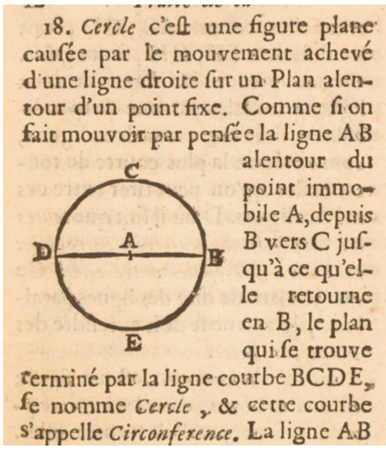
18. *Cercle* c'eſt une figure plane cauſée par le mouvement achevé d'une ligne droite ſur un Plan alentour d'un point fixe. Comme ſi on fait mouvoir par penſée la ligne AB alentour du point immobile A, depuis B vers C juſqu'à ce qu'elle retourne en B, le plan qui ſe trouve terminé par la ligne courbe BCDE, ſe nomme *Cercle*, & cette courbe s'appelle *Circonférence*. La ligne AB

Figura 3. Definición de Ozanam

En la España del siglo XVIII algunos autores adoptaron este enfoque. Así, en la figura 4 vemos la definición que da Antonio Gregorio Rosell Viciano en su libro de 1784 *La Geometría de los Niños*.

En ocasiones, este enfoque dinámico se combina con la referencia explícita a situaciones reales que hemos comentado anteriormente. En la figura 5 reproducimos un fragmento del libro de *Geometría de grado elemental* de Juan B. Puig (director de las escuelas de beneficencia de Zaragoza a principios del siglo XX).

P. Qué es *círculo*?

R. Es la figura que se forma teniendo fixa la una punta del compas, ó el extremo de una cuerda tirante, y describiendo con la otra punta ó extremo de la cuerda movida al rededor del punto fixo, el perimetro que la incluye;

Figura 4. Definición de Antonio Gregorio Rosell Viciano

Otro posible modo de concebir la circunferencia o el círculo, cuyo origen se puede rastrear al menos hasta Arquímedes, consiste en imaginar un polígono con un número infinito de lados. El mismo Juan B. Puig lo explicaba así a sus alumnos tratando de recurrir a una situación que pudiera resultarles cercana:

> Cuando el carpintero quiere hacer una barra cilíndrica o redonda, toma un listón cuadrado; con el cepillo mata los cuatro vértices, y hace, de cada uno, dos. El polígono, que era antes un cuadrado, pasa a ser octógono; después, de 16 lados; luego, de 32, y así, sucesivamente. Cuando los lados son infinitos, el perímetro es una circunferencia, y el polígono que encierra se llama círculo.

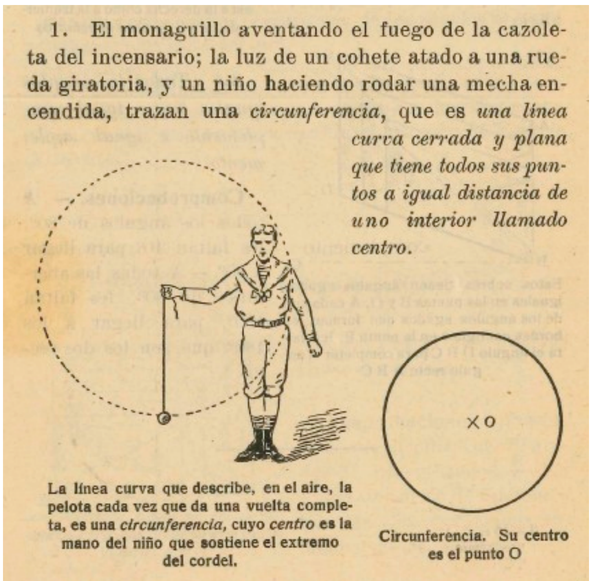
1. El monaguillo aventando el fuego de la cazoleta del incensario; la luz de un cohete atado a una rueda giratoria, y un niño haciendo rodar una mecha encendida, trazan una *circunferencia*, que es *una línea curva cerrada y plana que tiene todos sus puntos a igual distancia de uno interior llamado centro*.

Figura 5. Texto de Juan B. Puig

Así pues, hemos visto que un concepto aparentemente sencillo y elemental, cuya definición podría considerarse trivial y accesible, ha recibido un tratamiento muy diverso a lo largo de la historia. Los destinatarios del texto, las creencias y concepciones del autor e incluso las modas o corrientes predominantes en una época concreta son variables que han influido de forma determinante sobre el modo en que se han presentado históricamente los conceptos de círculo y circunferencia. Este fenómeno es común y transversal a prácticamente cualquier contenido; y debería llevar a una reflexión sobre la supuesta objetividad e inmutabilidad de las ideas matemáticas y sobre si estas son independientes o no del modo en que se presentan.