Dos rombos y un destino
(otra forma de hacer estrellas y polígonos)

por

Ricardo Alonso Liarte y Daniel Sierra Ruiz

(IES Salvador Victoria, Monreal del Campo; CPI El Espartidero, Zaragoza)

El presente artículo cierra una serie de tres que iniciamos en el número 38 de este boletín y que continuamos en el 39 (Alonso y Sierra, 2021*a* y 2021*b*). En esta ocasión nos vamos a centrar en dos actividades las cuales ponen en funcionamiento algunas destrezas que se pueden situar fácilmente en el bloque 1 del currículo. No vamos a insistir en el *abandono* que sufre esta parte de la norma, pues ya se ha escrito mucho. Pero sí que pensamos que se deben diseñar actividades de aula que, además de ayudar en la adquisición de contenidos, requieran dar protagonismo a ciertas destrezas esenciales de la competencia matemática.

Estrellas

En el primero de los artículos construíamos una *estrella* disponiendo diez rombos del tipo 1 como se observa en la figura 1. Esto lo usábamos para calcular el ángulo más pequeño gracias a que esas diez piezas *cierran* un ángulo de 360° en torno al punto central. Esta última idea la vamos a aprovechar para *generalizar,* en cierto sentido, el concepto de estrella. Es decir, cada vez que consigamos dar una vuelta completa y exacta en torno a un punto, disponiendo diferentes rombos obtendremos una *estrella.* Al alumnado no le supone ningún problema denominar estrella a esta primera disposición. Ni tampoco la que vemos en la figura 2. Pero algunas otras, como por ejemplo las de las figuras 3 y 4, sí que les cuesta un poco más. Combinando los dos tipos de rombos encontramos estrellas como las de las figuras 5 y 6. Hay muchas más; concretamente 54.

Así que otra actividad que planteamos en el taller es encontrar todas las estrellas diferentes que existen, adentrándonos en el terreno de la *investigación.* De entrada no les decimos la cantidad. No sorprenderá si decimos que empiezan construyendo estrellas sin ningún tipo de orden. Y se cansan relativamente pronto: muchos, incluso antes de haber hecho diez. Incluso afirman que ya las tienen todas. Este es el momento en el que el profesor tiene que incitar a que el trabajo continúe pero que este ha de ser un poco más sistemático. Poco a poco hay que ir orientando la tarea: se les anima a que las ordenen y las clasifiquen. De momento, aún estamos con el material manipulativo, pero está claro que ya afrontamos partes del bloque 1 del currículo como por ejemplo:

> Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.

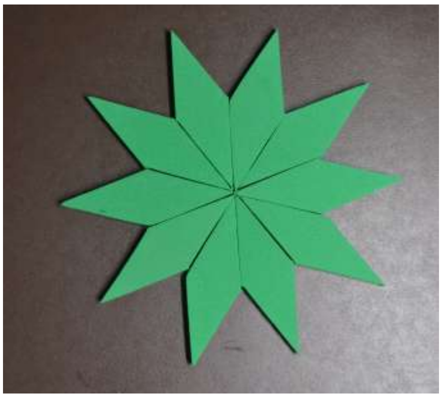

Figura 1

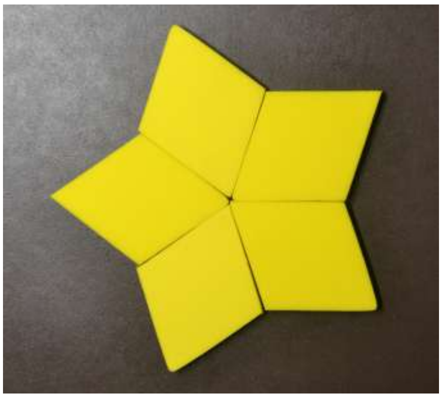

Figura 2

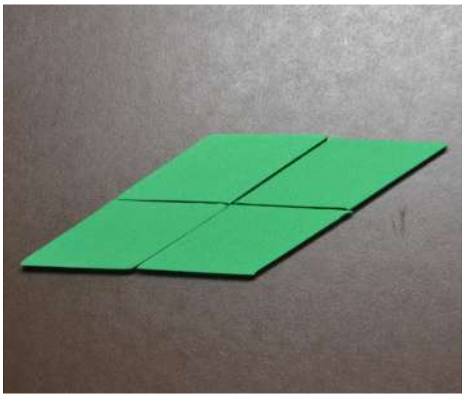

Figura 3

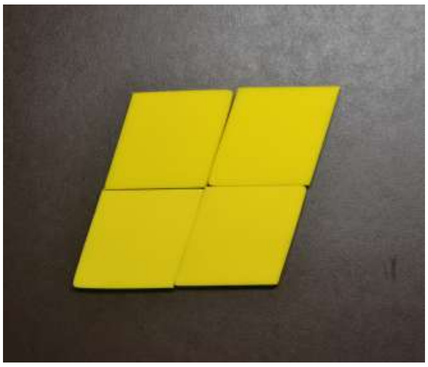

Figura 4

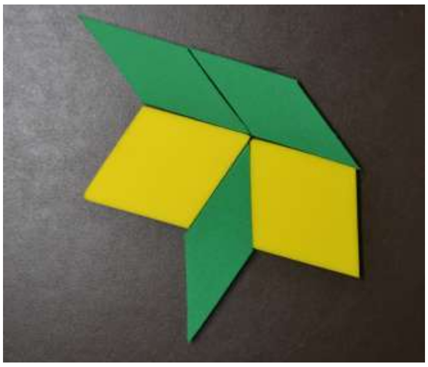

Figura 5

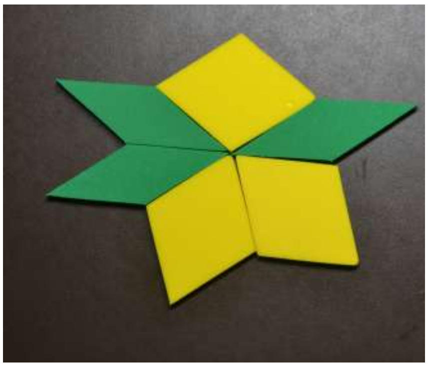

Figura 6

No vamos a negar que para los alumnos, incluso para los más mayores, es complicado resolver este asunto de manera totalmente satisfactoria. Desde luego, no encuentran todas las estrellas ni mucho menos dan con una forma exhaustiva de completar la tarea.

Somos reacios a implementar un tipo de enseñanza conductista y nos inclinamos más a *dirigir* al alumnado mediante el diálogo, aunque en esta actividad tarde o temprano tenemos que proporcionarles una *solución,* es decir, *nuestra* solución.

Recordamos que los ángulos de nuestros rombos miden 36°, 72°, 108° y 144°. Es evidente que lo que debemos conseguir es sumar 360° combinando esos cuatro ángulos o múltiplos de ellos. Esto ayuda, pero la resolución sigue siendo farragosa. Obsérvense dos cosas. La suma de esos cuatro ángulos es exactamente 360°. Las medidas de esos cuatro ángulos se pueden obtener multiplicando 36 por 1, 2, 3 y 4. Como $1+2+3+4=10$, llegamos a la conclusión de que una forma de encontrar todas las estrellas empieza por dar con todas las posibilidades de sumar 10 usando esos cuatro primeros números naturales o sus múltiplos.

De nuevo, esta parte exige del alumnado ser sistemático a la hora de encontrar todas las posibles sumas. Pero, además, requiere de una buena notación para ser más eficiente a la hora de encontrar todas las estrellas y para ser capaces de comunicar claramente las soluciones encontradas. Nuestra propuesta es utilizar 4-tuplas en los que cada componente indica el número de veces que se usa cada ángulo para construir la estrella.

Por ejemplo, (3, 2, 1, 0) indica que usamos tres ángulos de 36°, dos de 72°, uno de 108° y ninguno de 144°. Comprobamos que funciona:

$$3 \cdot 36 + 2 \cdot 72 + 1 \cdot 108 = 360.$$

O bien:

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 10.$$

Sin embargo, encontrar todas las sumas y codificarlas de esta forma no es el final del trabajo, ya que a la misma tupla le puede corresponder más de una estrella. Por ejemplo, en la figura 7 se pueden ver las tres estrellas que se corresponden con la tupla (1, 1, 1, 1). Conviene volver a la parte visual para dar con todas las configuraciones que se ajusten a una tupla determinada. Obviamente, una manera es manipulando los propios rombos, pero nosotros pensamos que usar una simplificación como la mostrada en la figura 8 facilita la tarea.

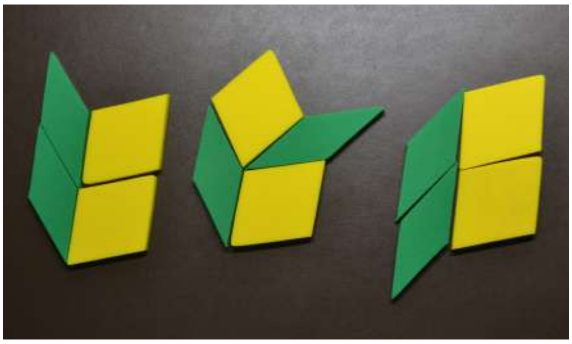

Figura 7. Estrellas que coresponden con (1, 1, 1, 1)

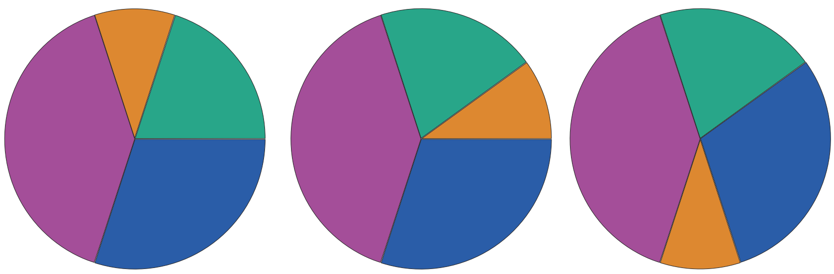

Figura 8. Abstracción de las estrellas de la figura 8. En naranja el ángulo de 36°, en verde el de 72°, en azul el de 108° y en morado el de 144°

Esta propuesta nuestra no es única ni, lógicamente, la mejor. De hecho, tiene la falla mostrada; a saber, una tupla no determina unívocamente la estrella. Así pues, se puede proponer al alumnado que establezcan una manera de transmitir la disposición de los rombos para cada una de las tres estrellas de manera inequívoca. Si se ha trabajado en algún momento con material manipulable los mosaicos regulares y semirregulares, se puede sugerir utilizar una notación similar: indicando con 1, 2, 3 y 4 los diferentes ángulos, las tres estrellas responderían a las notaciones 1-2-3-4, 1-3-4-2 y 1-4-2-3.

Polígonos convexos

A lo largo de los tres artículos hemos dejado de manifiesto que el material nos gusta bastante, entre otros motivos por las diferentes opciones que se abren para plantear actividades. Todas las vistas hasta ahora las hemos puesto en práctica con alumnado de alguna forma u otra: bien sea en un taller específico o dentro de la programación habitual de aula. Debemos reconocer que lo que viene a continuación no lo hemos trabajado con alumnos por lo que no podemos hablar sobre si funciona bien.

Partiendo de una cualquiera de las 54 estrellas que hemos encontrado en el apartado anterior, se pide construir un polígono convexo. En la figura 9 se observa la estrella (1, 0, 3, 0) y el polígono convexo correspondiente. A partir de esta primera actividad que podemos considerar exploratoria, damos un pasito más y nos volvemos a adentrar en una pequeña investigación.

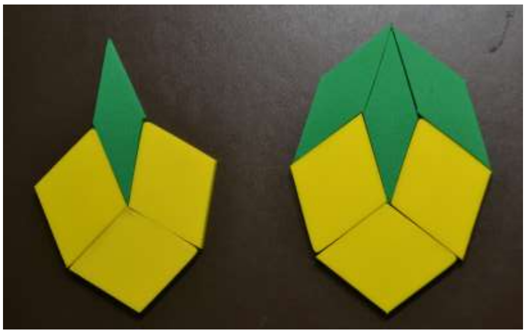

Figura 9

En esta ocasión se trata de encontrar todos los polígonos convexos utilizando en primer lugar dos piezas (distintas o iguales) y, a partir de ahí, sistematizar el trabajo y construirlos con dos, tres, …, hasta seis rombos. Aparecerán cuadriláteros, hexágonos y octógonos.

Seguimos avanzando y pedimos que el polígono construido sea regular. Dado que sabemos las medidas de los cuatro ángulos de los rombos, lo vamos a utilizar para *demostrar* que, en todo caso, el único que es factible es el decágono. Y en efecto lo es. Se pueden montar decágonos de lado uno y de lado dos.

En el proceso de construcción de polígonos que proponemos en este apartado enseguida se observa que los hay simétricos y no simétricos. Así que tenemos tres criterios para clasificar la gran cantidad de polígonos que podemos obtener: por su número de lados, por el número de rombos con los que se construyen y por su simetría. No hace falta recordar la importancia que tiene la clasificación como actividad matemática. En la figura 10 se puede ver una pequeña muestra de los polígonos que se pueden construir.

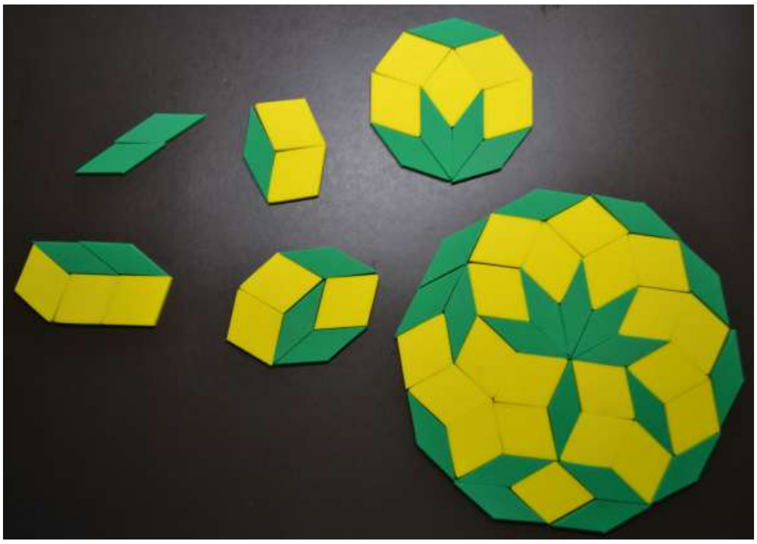

Figura 10

Se pueden proponer actividades enlazando con sucesiones. Por ejemplo, partiendo de un polígono sencillo formado por tres o cuatro rombos, se van añadiendo otros de manera regular manteniendo la forma del polígono, y preguntarnos por el número de piezas necesarias para construir un polígono de *n* rombos de lado, cuántas de un tipo y cuántas de otro… (figura 11).

Estamos convencidos de que otras personas que reflexionen sobre el material encontrarán otras actividades.

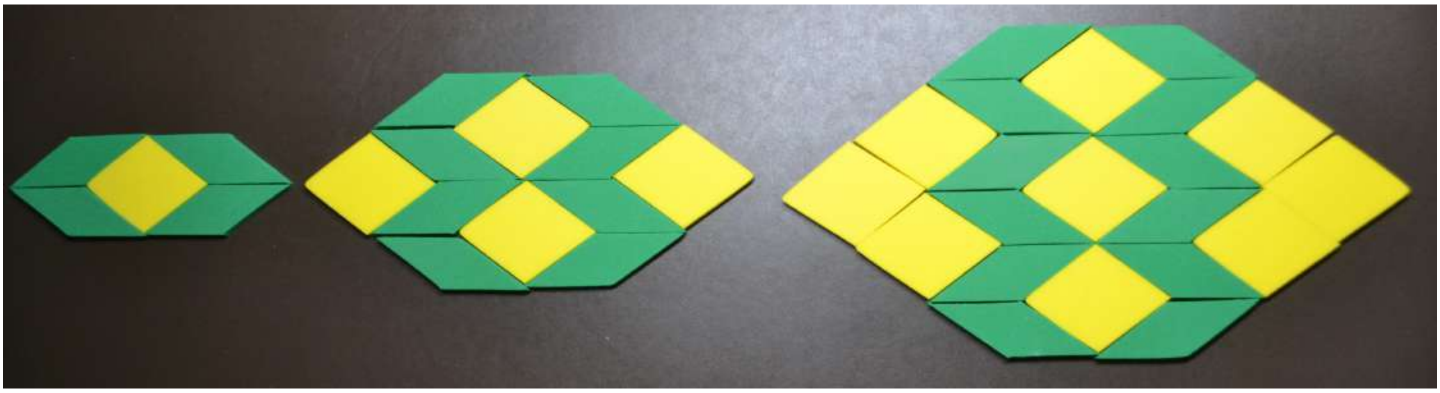

Figura 11

Breve recopilación

Durante estos tres capítulos hemos ido proponiendo una serie de actividades que se pueden plantear con los rombos de Penrose (en este artículo no le habíamos citado). A continuación las enumeramos brevemente, con alguna indicación de lo que se puede trabajar.

— Cálculo de los ángulos y relaciones numéricas entre ellos (demostraciones visuales, propiedades de los cuadriláteros, conjurar el punto de vista numérico y el geométrico).
— Comparación de los perímetros y áreas (conceptos de perímetro y área, demostraciones visuales, figuras isoperimétricas de distinta área)
— Cálculo de las áreas (aproximación, estudio estadístico).
— Cálculo de costes de joyas (números irracionales, aplicación práctica de las matemáticas).
— Diseño de mosaico (búsqueda de regularidades, mosaicos periódicos y aperiódicos).
— Construcción de estrellas (sistematización, clasificación, uso de notación adecuada, representaciones equivalentes).
— Construcción de polígonos (polígonos convexos, ángulo de un polígono, simetría, clasificación, sistematización, sucesiones).

Y para acabar... En el primero de los artículos comentábamos que el material se puede comprar en El cuadrado mágico <https://www.elcuadradomagico.es/>, pero también ofrecíamos un fotocopiable para plastificar y recortar en el siguierne enlace. Pero hay un par de opciones para trabajar de manera digital, aunque con alguna limitación. Los enlaces son:

<https://sciencevsmagic.net/tiles/#b7zZGeb51>
<http://craftdesignonline.com/penrose>.

Referencias bibliográficas

Alonso, R., y D. Sierra (2021*a*): «Dos rombos y un destino (jornada de reflexión)», *Entorno Abierto,* n.º 38, 7-10.
Alonso, R., y D. Sierra (2021*b*): «Dos rombos y un destino (Penrose lo sabía)», *Entorno Abierto,* n.º 39, 16-19.