Sobre linguagens, conceitos matemáticos e o discurso científico

Tadeu Fernandes de Carvalho
Pontifícia Universidade Católica de Campinas.
Faculdade de Matemática
tadeu_fc@puc-campinas.edu.br

Resumo: Os conceitos matemáticos, fundamentais em todo processo de interação da Matemática com outras ciências, como a Física, a Filosofia, a Lógica e as Ciências Econômicas, guardam as chaves para a compreensão de suas estruturas e teorias, bem como para a compreensão do discurso matemático e, de modo mais amplo, para a compreensão do discurso científico. Neste trabalho refletimos sobre aspectos teóricos e aspectos práticos de seu ensino, à luz de diferentes experiências e propostas. Não obstante nosso interesse em tratá-los genericamente, no contexto da linguagem matemática, julgamos oportuna a abordagem de aspectos particulares de certos conceitos que podemos considerar *centrais* para os cursos de Licenciatura e de Bacharelado em Matemática- caso específico de conceitos vinculados ao Cálculo Diferencial e Integral, de grande significado histórico e, por sua elevada aplicabilidade, de grande interesse, também, para a Física e para as Engenharias.

Palavras-chave: Conceito; matemática; educação; linguagem; cálculo diferencial e integral.

On Language, Mathematical Concepts and the Scientific Discourse

Abstract: The mathematical concepts, basic in all process of interaction between Mathematics and other sciences, just like Physics, Philosophy, Logic and Economics, are the keystone for us to understand its structures and theories, as well as the mathematical and the scientific discourse. In this paper we reflect about theoretical and practical aspects of its teaching, under different experiences and propositions. Although our interest in treating them generically, in the context of the mathematical language, we judge opportune the boarding of particular aspects of certain concepts that we can consider central for Mathematics Education- like certain specific concepts related to Differential and Integral Calculus, of great historical meaning and of great interest, also, for Physics and Engineering, thanks to its raised applicability.

Key-words: Concept; mathematics; education; language; differential and integral calculus

Introdução

Motivados por trabalhos de Rosebery et al (1990), Vollrath (1996), Deacon (1997), Tall & Ramos (2004), Longo (1999, 2005), Moreno-Armella et al (2006) e Carvalho & D'Ottaviano (2006), afins com pesquisa teórica e documental que concluímos em 2007, sob o título "O Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Licenciatura Matemática: conceitos e fragmentos", tratamos, aqui, de conceitos matemáticos, no contexto da linguagem lógica e da linguagem matemática, com foco no Ensino Básico e na formação de professores.

A recorrente preocupação de pesquisadores e educadores com os conceitos matemáticos pode ser facilmente compreendida se levarmos em conta o crescente desinteresse dos estudantes do Ensino Médio pelos cursos profissionalizantes da área de ciências exatas. Esse desinteresse, embora particularmente dramático para os cursos de Licenciatura em Matemática, atinge praticamente todas as especialidades. São várias as causas, mas uma delas, sem dúvida, é a dificuldade de compreensão da linguagem matemática, altamente dependente da compreensão e capacidade de uso de seus conceitos. A questão assume aspectos ainda mais contundentes se considerarmos a evasão escolar, do Ensino Fundamental ao Ensino Superior, em que se sobressaem, mais uma vez, os cursos de formação de professores. Não é nosso objetivo, porém, aprofundar, no presente artigo, a discussão em torno das razões e conseqüências dessa crise, por muito tempo anunciada e bem retratada pelos resultados dos exames nacionais e estaduais de cursos. O que nos interessa é discutir o que consideramos ser uma questão fundamental para a sua superação: o tratamento adequado, nos processos de ensino e aprendizagem da matemática, de sua linguagem e de seus conceitos básicos, como elementos de integração social e promoção intelectual.

A Linguagem Lógica, a Linguagem Matemática, e o Discurso Científico

Interessante pesquisa intitulada "Appropriating Scientific Discourse: findings from Language Minority Classrooms", relatada em Rosebery et al (1990) e apoiada pelo "Office of Bilingual Education and Minority Language Affairs", do Departamento de Educação dos Estados Unidos, ilustra bem como ciências naturais, matemática e linguagem se inter-relacionam, e como podem ser trabalhadas no Ensino Básico. Essa pesquisa envolveu alunos concluintes do período (equivalente ao) Ensino Fundamental e alunos do período (equivalente ao) Ensino Médio do Brasil, de distintas etnias, e educados em dois idiomas (o Inglês e o

Creolo haitiano), e avaliou, por meio de entrevistas e resolução de problemas, sua capacidade de interpretar e se expressar cientificamente em relação a certos fenômenos naturais. O surpreendente sucesso obtido deveu-se, consideram os autores, à integração de ciências e matemática com a adoção da língua materna (Creolo) no ensino, e à fluência em um segundo idioma (Inglês). Com isso, alunos que estavam segregados física e intelectualmente em suas Instituições de origem, puderam ser recuperados, conquistando mais autonomia e confiança, e atingindo os rudimentos do discurso científico.

Na linha de pensamento de Rosebery et al (1990, p. 3), e conforme Gee (1989), Latour (1937) e Longino (1990), considerando-se a ciência como discurso, podemos entender a capacidade de comunicação e criação científica como um produto sócio-cultural, com suas formas próprias de expressão, normatização, crenças e valores, instituições, história e mitos. Mas, cabe aqui considerar, seu poder transformador tem como principal agente, o *professor*. E essa figura central em todos os níveis e categorias dos processos de ensino e aprendizagem, está hoje no centro de uma crise sem precedentes em todo o mundo: é cada vez menor, como apontam as estatísticas, a quantidade de alunos concluintes do Ensino Médio que optam pelo magistério nos concursos vestibulares em todo o país.

Se não há uma solução mágica para a superação dessa dura realidade, há inúmeras experiências bem sucedidas, em todo o país, e experiências internacionais, como a de Rosebery e seu grupo que, embora aplicadas a situações particulares, apontam possíveis caminhos para o seu enfrentamento. O grupo de Rosebery, por exemplo, trabalha na linha de Vygotsky (ver Vygotsky (1987)), para quem o conhecimento e a compreensão, dentro do discurso científico, são socialmente construídos, com os recursos da investigação colaborativa, da palavra e de atividades e interações em torno da resolução de problemas. Ressalte-se, no entanto, que para o domínio de uma linguagem, como a linguagem científica, concorrem não só os processos de ensino e aprendizagem mas, também, características particulares dos indivíduos. Deacon (1997), assim se refere à *velha lógica do cérebro*, em entrevista concedida a David Boulton, disponível na Internet:

> "A lógica do cérebro é uma lógica muito antiga e uma lógica muito enraizada (fortemente preservada). É a lógica da embriologia. A lógica da auto-organização. De fato, é a lógica que tem sido compartilhada com ancestrais comuns que antecedem mesmo os vertebrados ... . Parece improvável haver um mapa detalhado e nítido que

descreva o que vemos no mundo exterior da linguagem e o que vemos no interior do cérebro".

A inexistência de tal *mapa* limita, naturalmente, nosso conhecimento sobre a relação dessa lógica primitiva com nossa capacidade de compreensão e comunicação, ou nosso poder de leitura e escrita, tanto na linguagem materna quanto em outras linguagens, como a linguagem matemática. Autores diversos, como Peters (2000, 2002), Godino & Batanero (1994, 1996) e Lakatos (1978), sugerem que esse processo exige uma interação social profunda, em consonância com a proposta construtivista de Paul Ernest, apoiada em Wittgenstein: Paul Ernest, conforme (Peters, 2002, p. 4), defendendo a tese do construtivismo social, segundo o qual "a matemática é uma construção social, um produto cultural, falível como qualquer outro ramo do conhecimento", e admitindo tanto a existência de um mundo físico independente quanto de uma realidade social, sugere que uma epistemologia construtivista adequada possa ser desenvolvida a partir dos princípios do construtivismo radical. Seus princípios e concepções (tradução e destaques em itálico nossos) são os seguintes:

a) "Conhecimento não é passivamente recebido, mas ativamente construído pelo sujeito do processo (cognitivo)".

b) "A função da cognição é adaptativa, e serve à organização do mundo da experiência (*experiencial*, ou *experimental*), não à descoberta da realidade ontológica" (von Glasersfeld, 1989, p. 182).

c) "As teorias pessoais que resultam da organização e do mundo experiencial, devem *ajustar-se* às exigências impostas pela realidade física e social".

d) "Essas (teorias) são aplicadas por meio de um ciclo de "teoria-predição-teste-falha-acomodação-nova teoria".

e) "Isso gera teorias do mundo socialmente aceitas, e padrões sociais e regras para o uso da linguagem".

f) "A matemática é a teoria da forma e da estrutura, que ocorre no interior da linguagem".

Parece atraente, em especial para os estudantes de nível básico, a idéia de ver a matemática como fruto da experiência humana, passível de ser identificada com aspectos de sua própria condição de falibilidade e imperfeição. Mas são muitas as correntes e as interpretações, e seus aspectos teóricos mais profundos flutuam em um universo distante da realidade do aluno- e podemos aí incluir a realidade de grande parcela dos professores.

Deacon (1997) na Parte I, de certo modo concordando com o construtivismo de Ernest, acrescenta como é importante para o ser humano, no aprendizado de uma linguagem, não só *aprender*, mas também *desaprender*. Isso significa, entre outras coisas, que devemos abandonar elementos superados na escala cognitiva que pauta nossa evolução, em favor da adoção de elementos hierarquicamente superiores nessa escala.

Conceitos Matemáticos: O que são? Para que servem?

Para Moreno-Armello et al (2006), a criação de um objeto matemático *é um processo histórico, com forte componente epistemológico, sendo a* explicação de processos científicos possível apenas quando um nível inferior de evolução conceitual é explicado a partir de um nível de evolução conceitual superior. Consideram, ainda, que a natureza dos objetos matemáticos consubstancia-se nos processos operacionais e critérios de validação (normatividade). Observam, por outro lado, como representam "fatos perturbadores", nossos primeiros contatos com as *demonstrações matemáticas*, normalmente em geometria elementar: "de que verdade a matemática fala, a quais de seus objetos podem ser atribuídos predicados, e sob que critérios lógicos esses predicados podem ser julgados?" Aprofundando o olhar sobre esses objetos, podemos constatar o papel fundamental que desempenham os *conceitos* sobre os quais se sustentam, especialmente na forma como são- e também como não são-, compreendidos.

D'Amore (2001), considera o "conceito", do ponto de vista socrático e aristotélico, um processo dinâmico, a essência das coisas e, do ponto de vista estóico, o seu próprio significado. Esta segunda visão foi retomada por filósofos contemporâneos. Sua visão, nesse sentido, se divide entre expressar ou revelar, e descrever, reconhecer e classificar a essência das coisas.

Vergnaud (1988), por seu lado, considera o conceito como uma tríade de conjuntos, que denota por $C = (S, I, \mathfrak{S})$, em que:

a) S é o conjunto que dá o seu sentido;
b) I é o conjunto de *invariantes* sobre as quais se estabelecem suas propriedades operatórias;

c) $\mathbb{S}$ é o conjunto constituído de formas lingüísticas e não lingüísticas que permitem sua representação simbólica, além de formas e processos de tratamento.

Em termos epistemológicos, conceito provém de *conceptus*, do latim, e se relaciona com o ato de conceber (*concipere*), ou gerar, do espírito, a partir das imagens das impressões sensíveis e representações particulares, e a realização de uma significação. Lakatos (1978) (ver, também, Ruiz (2008)), Piaget (1979), Vygotsky (1987) e Fischbein (1987) são exemplos de autores que, embora defendam idéias distintas sobre o processo de concepção ou aquisição, compreensão e elaboração do conhecimento matemático, ratificam o papel fundamental dos *conceitos matemáticos* para o domínio da linguagem científica, em concordância com a origem e significado primitivo do termo.

Vollrath (1996) reflete sobre problemas que afetam a formação de professores de matemática para o ensino básico na Alemanha, e revela como vem se agravando também naquele país, de larga tradição matemática, as dificuldades exibidas por alunos dos cursos de áreas tecnológicas com a aprendizagem de seus fundamentos. Condena a abordagem inadequada de disciplinas como o Cálculo Diferencial e Integral (que doravante será grafado com letras minúsculas), com exigências que não atendem às necessidades dos alunos, e para o qual adotam tratamentos mais pertinentes à análise matemática. Observa, ainda, como se mostra improdutiva a exigência do domínio de quantidades excessivas de conceitos matemáticos, sobre os quais os estudantes acabam por adquirir, realmente, apenas vagas noções. O que é, então, essencial que se aprenda, isto é, que conceitos podem ser considerados centrais, como no caso do cálculo? Inquirindo seus alunos a respeito, como é habitual no início de seus cursos, Vollrath (1996, item 2.1, p.3) aponta como algumas das respostas predominantes, os conceitos de número real, de função, de limite, de continuidade e de derivada. Como ele próprio observa, não sendo a *centralidade* do conceito uma noção claramente estabelecida, poderíamos argumentar a favor ou contra a escolha dos alunos. Vollrath destaca o conceito de função para ilustrar essa dificuldade- do que trataremos na próxima seção. Por ora, expressamos apenas nossa concordância com sua observação de que o próprio significado de "conceito central" precisa ser debatido, e nossa crença de que a história pode ser de grande valia como mediadora desse debate.

É esse, também, o ponto de vista de Otte (2001), para quem conceitos são *objetos* e *ferramentas*, por oferecerem *conhecimento* e *aplicabilidade.* Compreendê-los pode ser um desafio que, vencido, abre as portas para novas aplicações e novas descobertas. Mas o que significa "compreender, um conceito"? Vollrath (1996, p. 9), considera que a dificuldade da resposta está no fato de que há "diferentes níveis de compreensão". Para ele, a *compreensão* pode ser entendida como um *objetivo* e um *processo*, e entre suas concepções didático-pedagógicas está a de *aprendizado receptivo*, baseada na associação de discussão e debate para um aprendizado mais efetivo. Embora sua referência seja o ensino do cálculo a alunos de Graduação, essa proposta pode ser extrapolada para todos os níveis de ensino e todas as matérias básicas.

Restringindo essas considerações ao cálculo diferencial e integral, e às transformações ocorridas em seu ensino no novo milênio, relatadas no 9º ICME realizado no Japão em 2000, e no 10º ICME, realizado na Dinamarca em 2004**,** Tall & Ramos (2004) consideram que é preciso adequar a estrutura curricular ao nosso desejo de ensinar, bem como à disponibilidade de conhecimento, aptidão e características psicossociais dos estudantes. Entendem, por outro lado, que é necessário dimensionar corretamente a importância e significado do cálculo e dos conceitos matemáticos em geral, para cada curso em que são ensinados**.** Longo (2001, 2005), por exemplo, tratam de conexões entre os conceitos matemáticos e objetos da física. Vendo na Matemática um dos pilares do conhecimento, da objetividade e da estabilidade conceitual, que interage fortemente com outras ciências na constituição de seus princípios, assim se expressa, em Longo (2005, p.11) sobre a relação entre os conceitos e as estruturas matemáticas: "As estruturas matemáticas são, de fato, o resultado de uma reconstrução que organiza a realidade, fluindo dos conceitos, como o conceito pré-matemático de infinito...".

O fato de certas estruturas matemáticas terem conexões profundas com objetos da física, caso da geometria e das concepções possíveis de espaço, ou das lógicas não clássicas e fenômenos da física quântica, justificam o interesse de Longo (2005) pela genealogia dos conceitos. É uma forma de tentar estabelecer seu grau de dependência. Sua análise é feita a partir dos seguintes princípios (item 1, p.4):

a) O problema dos fundamentos da matemática é (também) um problema epistemológico;

b) Qualquer epistemologia (da matemática) deve-se referir a uma gênese conceitual, como um "processo de construção do conhecimento";

c) A epistemologia da matemática está imersa na epistemologia das ciências (das ciências exatas, ao menos);

d) Um elemento constitutivo de nosso conhecimento científico é a conexão, estabelecida pelas diferentes ciências, entre espaço e tempo.

Conceitos, Retórica e o Cálculo Diferencial e Integral

Reyes (2004) entende que a ciência vista como discurso, põe em evidência a importância da retórica na matemática, e em seu aprendizado, portanto. Parece natural! Não foi por acaso sob essa visão que surgiu na matemática, ainda na Era Clássica grega, o conceito de *infinitésimo*? E se esse conceito, cuja lógica é classificada por Reyes (2004) como transgressiva- e de fato o é-, não está regularmente presente no conteúdo tradicional dos cursos de cálculo, isto se deve, em parte, ao seu ensino excessivamente técnico, ancorado na teoria de limites, e à ignorância de sua destacada presença nos trabalhos de Newton e de Leibniz. Observa, a propósito, Reyes (2004, p. 2), como para ambos a lógica do infinitésimo se tornou instrumental na resolução de problemas pragmáticos da ciência e da matemática. De fato, desde a origem de seus trabalhos, Newton teve essa percepção, mas ao mesmo tempo esteve sempre às voltas justamente com o poder retórico de seus opositores, caso do bispo anglicano Berkeley (1734). Leibniz, igualmente, enfrentou duras críticas decorrentes de sua dúbia posição quanto à *existência real* dos infinitésimos. A verdade é que esse notável conceito, que se relaciona diretamente com as propriedades do *contínuo*, caracteriza-se por juntar a aspectos fundamentais aparentemente contraditórias, propriedades de caráter histórico-filosófico de grande interesse para a matemática, a filosofia e a ciência, em geral. Suas origens remontam à Escola Pitagórica, entre 570 e 500 a. C (ver Boyer (1974) e Lintz 2006). Banido da matemática grega por influência de Eudoxo de Cnido, por volta de 350 a. C, retornaria com trabalhos de matemáticos e físicos no início da Era Moderna. Esteve, implícita ou explicitamente, presente em trabalhos de Johannes Kepler (1571, 1630), Galileu Galilei (1564, 1642) (ver Galilei 1635 e 1890-1909), Evangelista Torricelli (1608, 1647) (ver Torricelli (1644), René Descartes (1596, 1650), Pierre Simon de Fermat (1601, 1655) e John Wallis (1616, 1703) (ver Boyer (1974) e Lintz (2006, 2007), que podem ser considerados precursores do cálculo. Mas Newton e Leibniz são, oficialmente, os seus introdutores.

Newton, discípulo e sucessor de Barrow (1670) em sua cátedra na Universidade de

Cambridge, foi particularmente influenciado em suas pesquisas pelos trabalhos de Wallis (1693). Seus trabalhos mais relevantes para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, na ordem de publicação, são Philosophiae naturalis principia mathematica (1687), Optics (1704), Universal aritmethic (1707), Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias (1711), Methodus differentialis (1711), e Methodus fluxionum et serierum infinitarum (1736) (ver Newton (1671, 1687, 1711 e 1967-1981).

Leibniz, por volta de 1673, em Paris, recorrendo a trabalhos de Descartes, de Nicholas Mercator [1620, 1687], James Gregory [1638, 1675] e de Henry Oldenburg [1618, 1677], desenvolve os fundamentos do cálculo de modo equivalente ao que fizera Newton, mas sob um maior refinamento lógico e filosófico. Naturalmente preocupado com a questão da composição do *continuum*, e consciente de que este não pode ser obtido a partir do *ponto*, conclui por seu caráter de entidade *ideal*, o mesmo ocorrendo com o espaço e o tempo, tomados como "continua". Por outro lado, a matéria é *discreta*, composta por unidades às quais denomina *mônadas* (ver Los filósofos y sus textos: Monadología, texto completo disponível em <http://cantemar.com/cronolista.html> e Leibniz (1965). Em Nova methodus pro maximus et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus (Leibniz 1684, ver Leibniz 1983), sistematiza o cálculo diferencial, antecipando-se em cerca de três anos à publicação dos *Principia Mathematica* de Newton, e em De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum (Leibniz 1686, ver Leibniz 1983), sistematiza o cálculo integral. Suas notações, desde então, são as mais utilizadas por sua precisão e praticidade.

Banido da matemática no final do século XIX, após a sistematização do cálculo com base no conceito de *limite*, ressurge na matemática com a Análise (dita não-standard) de Abraham Robinson [1918, 1974] (ver Robinson 1961, 1996- reedição da primeira edição publicada em 1966, Bell 1998, e Stroyan & Luxemburg 1976). Aparece, também, de forma não-clássica, no Cálculo Diferencial Paraconsistente proposto pelo brasileiro Newton C. A. da Costa, tendo como lógica subjacente a Lógica Paraconsistente da qual é, igualmente, o introdutor (ver da Costa 1992, da Costa & Marconi 1989, D'Ottaviano 1990, 1992, e Carvalho 2004- Tese de Doutorado-, entre outras referências).

Deloust-Jorrand (2002), Reyes (2004), Carvalho (2004), D'Ottaviano & Carvalho (2005) e Carvalho & D'Ottaviano (2006), ajudam-nos a entender, sob diferentes ângulos, a relevância dos conceitos matemáticos sobre os quais Newton e Leibniz edificaram o cálculo diferencial e integral, ao mesmo tempo em que lançam luzes sobre o seu futuro. Mostram-nos, em especial, que boa parte das dificuldades enfrentadas pelos estudantes em seu aprendizado, está na abordagem crua de seus conceitos, a começar pelo conceito de limite, associado ao estudo de funções e continuidade, com total desprezo à sua história.

Conclusão

Tall & Ramos (2004) com base nas mudanças ocorridas no ensino do cálculo diferencial e integral no início do século XXI, anteriormente mencionadas, propõem um esquema de ensino no qual, de um "mundo físico", digamos, contendo a percepção e a experimentação, se passe, pela ação, ao mundo simbólico dos cálculos e manipulação de símbolos, acima dos quais estaria o mundo formal. Não se trata de mera representação pictórica. Aí, mais uma vez, apresentam-se os conceitos matemáticos ao debate: rotineiramente, estudantes e professores os observam em mundos diferentes. Na ótica do professor, estão quase sempre no mundo formal. Sua proposta é que se inicie o estudo do cálculo por um pré-cálculo- o que tende a ser uma prática regular nas Universidades-, mas usando um conceito informal de verdade: "something is true if it is seen to be so". Baseados, primeiramente, nas instituições humanas fundamentais e, secundariamente, em processos experimentais e racionais mais sofisticados, sugerem esse conceito informal, que permite se considerar verdadeiro algo que apenas *parece ser verdadeiro*, confiando que filtros curriculares naturais tratarão da remoção das concessões.

As idéias de Tall & Ramos (2004) sintetizam as tendências modernas de Educação para os países com grandes disparidades sociais, como o Brasil, que visam conciliar preocupações didático-pedagógicas com preocupações de caráter social, tendo como objetivo garantir aos alunos, além de uma formação sólida, possibilidades concretas de integração social. Sabemos que em se tratando da Educação Matemática, maiores são os desafios, pois as dificuldades de seu aprendizado atingem, de alguma forma, estudantes de todas as classes sociais. Concluímos observando que no cerne dessa questão, está a dificuldade de compreensão e uso de *conceitos matemáticos*, principalmente por carregarem em sua ignorada história, grande parte de seu significado.

REFERÊNCIAS

BARROW, I. **Lectiones geometricae**. London: printed for John Collins, 1670.

BELL, J.L. **A primer of infinitesimal analysis**. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

BERKELEY, G. **The analyst**. London: printed for J. Tonson, 1734.

______. **The analyst.** Dublin: Trinity College. Versão eletrônica, adaptada por David R. Wilkins a partir de texto de 1898, de George Sampson. www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Berkeley/Analyst/ .

BOYER, C.B. **História da matemática**. Tradução de E. Gomide. São Paulo: Ed. Edgard Blücher Ltda, EDUSP, 1974.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 2ª ed. Lisboa: Gradiva, 1998.

CARVALHO, T. F. **Sobre o cálculo diferencial paraconsistente de da Costa.** 2004. 200 p. Tese (Doutorado) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, 2004.

CARVALHO, T. F. & D'OTTAVIANO, I. M. L. Sobre Leibniz, Newton e infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente. Educação matemática pesquisa, v. 8-n.1. Revista de Estudos pós-graduados da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2006.

DA COSTA, N.C.A. O ambiente matemático no século XIX e a lógica do século XX. In: ÉVORA, F. (ed.). **Século XIX**: o nascimento da ciência contemporânea**.** Campinas: Unicamp/CLE, 1992. p. 59-65. (Coleção CLE, v. 11)

DA COSTA, N.C.A., MARCONI, D. An overview of paraconsistent logics in the 80's. *The Journal of Non-Classical Logic*, v.6, n.1, p. 5-31, 1989.

D'AMORE B. (2001). Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques: la position "naïve" dans une théorie "réaliste" contre le modèle "anthropologique" dans une théorie "pragmatique". In: Gagatsis A. 2001. *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. Atti del Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, pp. 131-162. Nicosia, Università di Cipro, 22 giugno -–6 luglio 2001. Nicosia (Cipro): Intercollege.

DEACON, T. **The symbolic species:** the co-evolution of language and the human brain. New York: W. W. Norton & Company, Inc., 1997.

DELOUSTAL-JORRAND, V. Studying the mathematical concept of implication through a problem on written proofs. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Maythematics Education, v.2, pp. 263-270. Norwich: 2002.

D'OTTAVIANO, I. M. L. On the development of paraconsistent logic and da Costa's work. *The Journal of Non-Classical Logic*, v.7, p. 89-152, 1990.

______. A lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas. In: ÉVORA, F. (ed.). **Século XIX:** o nascimento da ciência contemporânea. Campinas: Unicamp / CLE, 1992. p. 65-93. (Coleção CLE, v. 11)

D'OTTAVIANO, I. M. L, CARVALHO, T.F. Da Costa's Paraconsistent Differential Calculus and a Transference Theorem. **2nd Indian International Conference on Artificial Intelligence** (**II CAI – 05**): proceedings. Pune, India, 2005.

FISCHBEIN, E. **Intuicion in science and mathematics** - An educational approach. Dordrechtt, Holanda: D. Reidel, 1987.

GALILEI, G. **Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze**. Firenze: Tip. di G. Barbera, 1635.

______. **Opere di Galileo Galilei**. Firenze: Tip. di G. Barbera, 1890-1909.

GEE, J. P. **What is literacy?** Technical Report n.2, Newton. MA: The Literacies Institute.

GODINO, J. D. & BATANERO, C. Significado personal e institucional de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques, 14 (3): 325-355, 1994.

GODINO, J. D. & BATANERO, C. (1996). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In: A. Sierpinska (Ed.), 1996.

LAKATOS, I. **Mathematics, Science and Epistemology: Philosophical Papers** Volume 2. Cambridge: Cambridge University Press, 1978.

LATOUR, B. **Science in action.** Cambridge: Harvard University Press, 1987.

LEIBNIZ, G.W. Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus. *Acta Eruditorum.* Leipzig, 1684.

______. De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum. *Acta Eruditorum.* Leipzig, 1686.

______. **Monadology and Other Philosophical Essays**. Trad. Paul and A. M. Schrecker. Indianápolis: Bobbs-Merrill. 1965.

______. **Oeuvre concernant le calcul infinitésimal**. Trad. J. Peyroux. Bordeaux: A. Blanchard, 1983.

______. **Los filósofos y sus textos: Monadología** (texto completo). Disponível em <http://cantemar.com/cronolista.html>.

LINTZ, R.G. **História da Matemática**. Campinas: Coleção CLE - FAPESP. v. I. 2006.

_____. **História da Matemática**. Campinas: Coleção CLE - FAPESP. v. 2. 2007.

LONGINO, H. **Science as social knowledge**. Princeton: Princeton University Press, 1990.

LONGO, G. The matematical continuum: from intuition to Logic – in **Naturalizing phenomenology.** California: Stanford University Press, 1999.

______. Mathematical concepts and physical objects - in **Rediscovering phenomenology** (L. Boi, P. Kerszberg, F. Patras ed.). Paris: Kluwer, 2005.

MORENO-ARMELLA, L, SRIRAMAN, B., WALDEGG, G. Mathematical objects and the evolution of rigor. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, v. 9, pp. 17-28, 2006.

NEWTON, I. **Philosophiae naturalis principia mathematica**. London: Royal Society, 1687.

______. **De analysi per aequationies numero terminorum infinitas**. London: (a partir de manuscrito enviado em 1669 à Royal Society of London), 1711.
______. **The method of fluxions and infinite series**. Ed. John Colson. London, 1736. (De methodus fluxionum et serierum infinitarum, 1671)
______. **The mathematical papers of Isaac Newton**. Ed. D. T. Whiteside. Cambridge: Cambridge University Press, 1967-1981. 8 v.
OTTE, M. F. Mathematical Epistemology from a semiotic point of view. (pre print - *PME*). Utrect, 2001
PETERS, M. A. Writing the self: Wittgenstein, confession and pedagogy. *Journal of Philosophy and Education*, Vol. 34, 2, pp. 353-368, 2000
______. Wittgenstein, education and the philosophy of mathematics. *Theory and Science*, Vol. 3,2, 2002.
PIAGET, J. **Genetic Epistemology**. Transl. E. Duckworth. New York: Columbia University Press, 1979.
REYES, G. M. The rethoric in Mathematics: Newton, Leibniz, the calculus, and the rethoric force of the infinitesimal. **Quarterly Journal of Speech**, v.90, n.2, pp. 159-184. California: ed. Routledge, 2004.
ROBINS, B.A. **Discourse concerning the nature and certainty of Sir Isaac Newton's methods of fluxions, and of prime and ultimate ratios**. London: W. Innys & R. Manby, 1735.
ROBINSON, A. Non-standard analysis. *Proceedings of the Royal Academy of Sciences*, ser. A, n. 64, p. 432-440. Amsterdam: 1961.
______. **Non-standard analysis** (Edição revisada da 1. ed. de 1966) Princeton: Princeton University Press, 1996.
ROSEBERY, A. N., WARREN, B., CONANT, F. R. Appropriating Scientific Discourse: Findings from Language Minority Classrooms. BBN Labs, Cambridge. Inc. Office of Bilingual Education and Minority Languages Affairs (Ed.), Washington (DC). USA: 1990.
RUIZ, A. R. Matemática, matemática escolar e o nosso cotidiano. Departamento de Teoria e Prática da Educação da Universidade Estadual de Maringá. Artigo disponível na Internet (www.pedagogia.pro.br/matematica.htm).
STROYAN, K.D., LUXEMBURG, W.A.J. **Introduction to the theory of infinitesimals**. New York: Academic Press (1.ed.), 1976.
TALL, D., RAMOS, J. P. M. Reflecting on post-calculus reform (pre-print). *ICME-10*, Copenhagen: 2004.
TORRICELLI, E. **Exercitationes geometricae sex**. Bononiae: typis Iacobi Montij, 1647.
VERGNAUD, G. Theoretical Frameworks and Empirical Facts in the Psychology of Mathematics Education. *Proceedings of VIº ICME Congress*: Hungary,1988.
VOLLRATH, H-J. **Educational studies in mathematics. v.3.** Didacts of mathematics as a scientific discipline, pp. 61-72. Editores: R. Biehler e outros. Dordrecht, Boston, London: 1993.
VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e Linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1987
WALLIS, J. **Johannis Wallis opera mathematica** (3 v.). Oxoniae: E Theatro Sheldoniano, 1693.