La generalización de patrones desde una perspectiva semiótico-cultural

John Gómez Triana *

*Rodolfo Vergel Causado***

RESUMEN

En esta ponencia se presenta un avance de la tesis de maestría "El pensamiento algebraico desde una perspectiva semiótico-cultural. Un trabajo con sucesiones de números reales" que se viene desarrollando en la Maestría en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Se presenta el análisis hecho a uno de los grupos objeto de la investigación utilizando como marco de referencia el enfoque semiótico-cultural propuesto por Radford (2008, 2009, 2010) sobre el pensamiento algebraico. El objetivo es mostrar cómo está presente la tipología del pensamiento algebraico, desarrollada por este autor, en el trabajo de generalización de patrones realizado por un grupo de estudiantes de décimo grado de la educación escolar colombiana.

Palabras clave: pensamiento algebraico, semiótica, generalización de patrones.

* Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: johngomezt@gmail.com

** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: rodolfovergel@gmail.com

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

En los últimos años en varias investigaciones en educación matemática se ha presentado una fuerte tendencia hacia los enfoques socioculturales del aprendizaje. Esto implica que actualmente gran parte de la comunidad de educadores matemáticos está reconociendo la influencia que tiene el contexto social e histórico en el que está inmerso un estudiante en la manera como aprende matemáticas. Un ejemplo de esto lo constituyen los trabajos enfocados en pensamiento algebraico desde una perspectiva semiótico-cultural en los que se busca caracterizar el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes que aún no conocen y, por ende, no manipulan el lenguaje alfanumérico propio del álgebra. El objetivo principal es mostrar que "la manipulación de los símbolos es solo una pequeña parte de lo que el álgebra es en realidad" (Mason, 1990, citado en Radford, 2010), es decir, el pensamiento algebraico va mucho más allá del uso de las letras como medio de representación de los objetos algebraicos.

En este contexto, y teniendo en cuenta que en el álgebra el lenguaje alfanumérico no constituye el único medio semiótico para representar los objetos algebraicos, nos preguntamos: ¿cuáles son los recursos semióticos movilizados por los estudiantes cuando se enfrentan a la generalización de patrones en un contexto de sucesiones de números reales? Esta pregunta surge en el marco de un trabajo de investigación de la Maestría en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. El trabajo tiene como objetivo principal mostrar evidencias de que cuando los estudiantes se enfrentan a la generalización de patrones en un contexto de sucesiones de números reales, movilizan una serie de recursos semióticos diferentes a la representación simbólica perteneciente al lenguaje alfanumérico propio del álgebra. En otras palabras, se pretende llamar la atención sobre la importancia de ampliar y reconocer diferentes recursos semióticos que son utilizados por los estudiantes para explicar la generalización de una sucesión determinada. La importancia de tal reconocimiento radica en el hecho de que el único medio semiótico de manifestación del pensamiento algebraico no es el lenguaje alfanumérico.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

La presente ponencia está inmersa en un marco de referencia conceptual basado en la concepción de álgebra y pensamiento algebraico desde el enfoque semiótico-cultural propuesto por Radford (2008, 2009, 2010). En este enfoque se abordan planteamientos teóricos sobre una mirada no mentalista del pensamiento, se amplía la idea de signo como medio de representación de los objetos algebraicos y se desarrolla una tipología de formas del pensamiento algebraico. Tal tipología se presenta a continuación y será la herramienta de análisis de los datos presentados en el presente escrito.

En el contexto de la generalización de patrones (Radford, 2010) se propone una tipología de formas de pensamiento algebraico:

El pensamiento algebraico factual. Aquí la indeterminación queda implícita en palabras y gestos, y el ritmo constituye la sustancia de la semiótica en los estudiantes en un proceso llamado fórmulas en acción.

El pensamiento algebraico contextual. Aquí la indeterminación se convierte en un objeto explícito del discurso. Los gestos y ritmos son remplazados por deícticos lingüísticos, adverbios, etc.

El pensamiento algebraico simbólico. Aquí las fórmulas en lugar de ser un dispositivo de resumen de cálculos aparecen como narraciones vividas; son íconos que ofrecen una especie de descripción espacial de la figura y acciones que se llevarán a cabo.

METODOLOGÍA

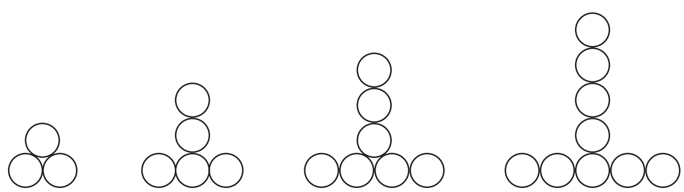

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

Figura 1

Como ya se mencionó anteriormente, el trabajo presentado en la presente ponencia corresponde a un avance de una tesis de maestría que se viene realizando con un grupo de estudiantes de grado décimo de un colegio público de la ciudad de Bogotá. Una de las actividades tenía que ver con el proceso de generalización de la secuencia mostrada en la figura 1. Los estudiantes trabajan en grupos de 3, se captura en grabaciones de vídeo el proceso de solución de los mismos. Posteriormente se le solicita a cada uno de los grupos que explique la forma de proceder y esta explicación también es grabada. En este reporte presenta el análisis realizado al proceso de solución de uno de los grupos.

ANÁLISIS DE DATOS

Como se mencionó anteriormente, los datos analizados aquí corresponden al proceso de generalización realizado por uno de los grupos objeto de investigación. El trabajo de los estudiantes giró en torno a resolver las siguientes cuestiones.

Dada secuencia presentada en la figura 1:

1. Dibujar la figura 5 y la figura 6
2. ¿Cuantos círculos habrá en la figura10?, ¿Y cuántos en la figura 100?
3. Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase en el que se indique la manera de averiguar el número de círculos de cualquier figura.
4. Escribir una fórmula algebraica para el número de círculos en la figura

Los estudiantes no presentaron problema para encontrar las figuras 5 y 6. Inician el conteo del número de círculos observando la regularidad evidenciada en el las figuras 1, 2, 3 y 4. En la siguiente transcripción se puede evidenciar un ejemplo de cómo uno de los grupos solucionó la actividad.

Estudiante: En la figura 1 habían [sic] 3, habían [sic] dos por debajo y uno por encima. En la figura 2 habían [sic] 3 por debajo y dos por encima (Ver figura 2). Entonces en esto nos fijamos, abajo iba ascendiendo; abajo iba un número más y arriba iba el número que era [refiriéndose al número de la figura]. En la figura 5, seis debajo y cinco encima y en la figura 6, siete debajo y seis hacia arriba. (Ver figura 3)

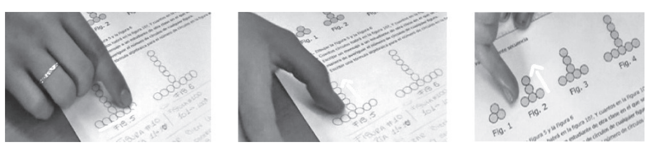

Figura 2

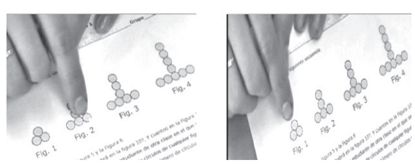

Figura 3

Los estudiantes pueden determinar el número de círculos de las figuras 5 y 6 observando el patrón en las anteriores figuras de la secuencia dada.

Al explicar el proceso, los estudiantes evidencian lo que Radford (2008, 2010) llama pensamiento algebraico factual, ya que la indeterminación y el patrón de generalización quedan implícitos en las palabras y en los gestos, como por ejemplo, el movimiento de las manos para indicar cuántos círculos deben ir en la fila horizontal y cuántos deben ir en la fila vertical. Además, como se puede evidenciar en la transcripción presentada, los estudiantes logran identificar que el número de círculos de la fila vertical corresponde al número de la figura, y que la cantidad de círculos de la fila horizontal corresponde a uno más que el número de la figura. Lo anterior es un ejemplo de lo que Radford (2010) llama fórmula en acción; esto quiere decir que la fórmula existe ($n + n + 1$) pero no se manifiesta a través de las letras; la fórmula se puede evidenciar a través del discurso de los estudiantes y de los gestos y movimientos realizados por los mismos al momento de explicar el proceso seguido. Lo importante es reconocer que esto es un estado inicial del pensamiento algebraico, así no esté presente el lenguaje alfanumérico propio del álgebra.

Ahora, para determinar el número de círculos que deben tener las figura 10 y 100, el grupo partió del patrón de generalización que había identificado anteriormente y de esta manera llegó a la conclusión que la figura 10 debía tener 11 círculos en la fila horizontal y 10 círculos en la fila vertical. Análogamente, determinó que la figura 100 debía tener 101 círculos en la fila horizontal y 100 en la fila vertical: Estudiante: En la figura 100 deberían (sic) haber 101 y hacia arriba 10.

Posteriormente, para el punto número 3 en el que el grupo debía explicarle a un estudiante de otra clase cómo calcular el número de círculos de cualquier figura, se encontró lo siguiente:

Estudiante 1: Si en la figura 1 hay un círculo arriba y el doble abajo, en la figura 2 hay dos arriba y 3 abajo, en la 3 son tres círculos arriba y cuatro abajo. Depende el número de arriba se le suma uno a los círculos de abajo. Entonces si, por ejemplo, en la figura 4 hay cuatro hacia arriba ascendería uno abajo, entonces sería cinco.

Estudiante 2: Si queremos que hallara el número del 50 [de la figura 50] entonces serían 51 uno abajo y 50 hacia arriba. Ya con esa explicación.

En esta explicación ofrecida por el grupo, se evidencia cómo las palabras "hacia arriba" y "abajo" cobran una gran importancia al momento de comunicar la manera en la que se puede encontrar la cantidad de círculos de cualquier figura. Este hecho podría catalogarse en la tipología del pensamiento algebraico propuesta por Radford (2008, 2010) llamada pensamiento algebraico contextual. Si bien los gestos no desaparecen, el énfasis está en los deícticos lingüísticos "hacia arriba" y "abajo", y la indeterminación se convierte en parte del discurso.

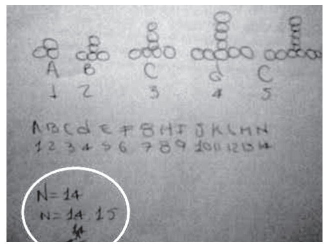

Figura 4

Por último, en el punto correspondiente a escribir una fórmula algebraica para encontrar la cantidad de círculos de la figura n, este grupo utilizó el llamado orden lexicográfico (ver figura 4) al ordenar las letras del alfabeto desde la A hasta la N utilizando los números naturales. De esta manera los estudiantes asumieron que el valor de n era 14 ya que es el lugar que ocupa esa letra en el orden establecido previamente. Partiendo de esta premisa el grupo determinó que en la figura n tendría que haber 14 círculos en la fila vertical y 15 en la fila horizontal, es decir, en la figura n hay 31 círculos.

Partiendo de este hecho, podemos decir que los estudiantes de este grupo aún no están en la tipología pensamiento algebraico simbólico (Radford, 2010) ya que no aparece una fórmula algebraica que permita resumir la y describir espacialmente la cantidad de círculos que posee cualquier figura de la secuencia presentada.

CONCLUSIONES

Según el análisis de los datos y partiendo del hecho que los estudiantes del grupo analizado aquí pertenecen al grado décimo, es decir, han trabajado con el lenguaje algebraico al menos 2 años, podemos decir que:

En el proceso de generalización de patrones, el pensamiento algebraico factual está presente sin importar el nivel en el que se encuentren los estudiantes; esto implica que la indeterminación y el patrón de generalización estarán implícitamente presentes en las palabras y los gestos al iniciar el proceso de generalización de una secuencia de figuras como la presentada en este escrito.

Por tener algo de experiencia en el trabajo con el álgebra, los estudiantes logran rápidamente desprenderse de los gestos y trabajar con la indeterminación utilizando deícticos lingüísticos como "hacia arriba" y "abajo". Esto permite que puedan obtener la cantidad de círculos presentes en cualquier figura dada de la secuencia.

Algo que llama la atención del proceso mostrado por los estudiantes tiene que ver con la utilización del orden lexicográfico para determinar el valor de cuando se les pide escribir una fórmula algebraica para determinar la cantidad de círculos de la figura n. Esto implica que sin importar la experiencia que los estudiantes tengan con la manipulación del lenguaje alfanumérico del álgebra, el proceso de generalización no logra avanzar a lo que (Radford, 2010) llama pensamiento algebraico simbólico en el que las fórmulas algebraicas aparecen como medio semiótico de representación de la generalización del patrón de la secuencia presentada.

Finalmente, es importante ampliar la mirada sobre los recursos semióticos movilizados por los estudiantes, diferentes al lenguaje alfanumérico propio del álgebra, pues estos recursos son indicadores de la presencia de pensamiento algebraico (factual, contextual o simbólico)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of pattems in different contexts. ZDM *Mathematics Education,* 40, 83-96.

Radford, L. (2009). "No! He stars walking backwards!": interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. ZDM-*The International Journal on Mathematics Education,* DOI 10.1007/s11858-009-0173-9.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education,* 12(1), 1-19.