DOI: 10.5007/1981-1322.2010v5n1p71

ANÁLISE DE ERROS EM SOLUÇÕES DE UM PROBLEMA DE GEOMETRIA: UMA INVESTIGAÇÃO COM PROFESSORES EM FORMAÇÃO CONTINUADA[1]

ERROR ANALYSIS IN SOLUTIONS OF A GEOMETRY PROBLEM: AN INVESTIGATION WITH TEACHERS IN CONTINUED FORMATION

José Carlos Pinto Leivas
Universidade Luterana do Brasil
leivasjc@yahoo.com.br

Helena Noronha Cury
Centro Universitário Franciscano
curyhn@via-rs.net

Resumo

Neste artigo, é apresentado um recorte de uma investigação desenvolvida com professores de Matemática em formação continuada, em cinco Instituições de Ensino Superior do Rio Grande do Sul, com o objetivo de analisar os erros cometidos por esses docentes em questões que envolvem Álgebra, Geometria, Análise e Probabilidade. Uma das questões do teste aborda conceitos de Geometria e as soluções dadas pelos 50 professores foram analisadas, tendo sido criadas categorias de erros, que foram descritas e exemplificadas. A discussão sobre as resoluções foram fundamentadas em autores que abordam o conceito de visualização e em documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais. Como sugestão para retomar com os professores os conteúdos em que foram detectados erros ou dificuldades, indicamos o uso de softwares de Geometria Dinâmica, que podem proporcionar uma melhor visualização e compreensão de propriedades que envolvem polígonos inscritos e circunscritos.

Palavras-chave: Geometria plana. Análise de erros. Formação de professores.

[1] Apoio: CNPq.

Introdução

Por alguns anos, o ensino de Geometria no Brasil foi abandonado (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992; PAVANELLO, 1993), especialmente na educação básica, sendo apenas indicadas algumas fórmulas, para cálculo de perímetros e áreas de figuras planas e volumes de sólidos. Dessa forma, propriedades dos entes geométricos não eram estudadas e os professores de Matemática, também com poucas disciplinas de Geometria em seus cursos de graduação, não propunham aos seus alunos problemas que envolvessem mais do que o reconhecimento de figuras geométricas e os cálculos de suas medidas.

Levantamento realizado por Andrade e Nacarato (2004), sobre tendências didático-pedagógicas em Geometria, aponta que 20% dos trabalhos apresentados nos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM) de 1987 a 2001 abordam a Geometria, o que modifica, na opinião dos autores, o discurso do seu abandono, pelo menos se for considerado o âmbito da pesquisa sobre o ensino de Geometria. No entanto, esses dados foram coletados em anais do ENEM, ou seja, em um *locus* privilegiado, em que são apresentados trabalhos de pesquisa ou novas experiências de ensino.

Entre as categorias de ensino de Geometria em que foram classificados os trabalhos elencados por Andrade e Nacarato (2004), 48% deles foram incluídos no que os autores chamam de Geometria Experimental, envolvendo "todas as produções geométricas resultantes da experimentação e da ação humanas, ou seja, se refere a construções geométricas e formas de representação do mundo, mediadas pela experimentação" (p. 62).

No entanto, é de se questionar – como também o fazem esses autores – se a Geometria está, efetivamente, presente nas salas de aula, especialmente na educação básica e como está sendo apresentada pelos professores.

Leivas (2009), em sua tese de doutorado, investigou as ementas de oito cursos de licenciatura em Matemática do Rio Grande do Sul, com o objetivo de verificar como está sendo enfocado o ensino de Geometria nesses cursos. Conforme o quadro-síntese por ele apresentado, apenas em quatro dos cursos analisados há indícios de que a intuição, a visualização e a imaginação sejam elementos norteadores desse ensino.

Se os futuros professores de Matemática não desenvolvem essas habilidades, torna-se difícil, para eles, planejar atividades para a educação básica que fujam do simples reconhecimento de figuras geométricas ou da apresentação de determinadas propriedades. Especialmente, se os professores cometem erros em questões que envolvem visualização, é de se supor que apresentem, também, esses problemas nas suas práticas de ensino.

Neste trabalho, apresentamos um recorte de uma investigação que está sendo desenvolvida com professores de Matemática em formação continuada, em cinco Instituições de Ensino Superior do Rio Grande do Sul, com o objetivo de analisar os erros cometidos por esses docentes em questões que envolvem Álgebra, Geometria, Análise e Probabilidade.

Para este artigo, escolhemos a apresentação dos resultados da análise de uma questão de Geometria, trazendo a classificação dos erros cometidos e a discussão sobre suas possíveis causas.

Algumas Considerações sobre o Ensino de Geometria

Freudenthal (1973), ao questionar o que é Geometria, a coloca em dois patamares distintos. Em um nível mais avançado, indica que é uma parte da Matemática que está axiomaticamente organizada, enquanto que, em nível mais elementar, considera que a Geometria se constitui em compreender, basicamente, o espaço em que o aluno vive, respira e se move. O autor ainda insiste na importância de que a Matemática, para ser aprendida, deve estar intimamente ligada à realidade.

Assim como o autor, entendemos que Geometria só pode ter significado para os estudantes se forem exploradas suas relações com o espaço experimentado ou experienciado, o que só irá ocorrer se outras dimensões, vivenciadas pelos alunos a fim de desenvolver o senso espacial e o raciocínio geométrico, forem empregadas.

Para Van de Walle (2009, p. 439) o senso espacial "está relacionado ao modo como os estudantes pensam e raciocinam sobre formas e espaços" e "pode ser definido como uma intuição, ou uma sensibilidade, sobre formas e as relações entre formas".

Já Fischbein (1987) considera que intuição ou conhecimento intuitivo é um tipo de cognição que se refere às afirmações autoevidentes, as quais ultrapassam fatos observados, o que a diferencia de percepção, entendida como uma cognição imediata que não necessita de prova para sua existência.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), ao estabelecerem orientações para a escola básica brasileira, indicam que "é fundamental superar a aprendizagem centrada em procedimentos mecânicos, indicando a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática a ser desenvolvida em sala de aula." (BRASIL, 1998a, p. 59). Na parte relativa ao ensino de Matemática, ao fazer referência às atividades de Geometria, os PCN apontam a necessidade de articular o espaço físico, as figuras geométricas e as representações gráficas. São criticadas, no entanto, as atividades que tentam fazer uso de material concreto ou medições para "provar" determinada relação, como o Teorema de Pitágoras. (BRASIL, 1998b).

Para Van de Walle (2009), o trabalho orientador constante nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar, emanados do *National Council of Mathematics Teachers* (NCTM) dos Estados Unidos, tem surtido efeito e a Geometria no Ensino Fundamental consta atualmente dos currículos de quase todos os estados americanos. O autor acredita que muito mais ainda necessita ser incrementado, de modo que o patamar europeu em Geometria seja atingido; pode-se pensar que essa afirmativa também seja verdadeira em relação ao ensino brasileiro.

No referido documento americano, que é uma das fontes citadas nos próprios PCN, há quatro objetivos a serem perseguidos na educação geométrica, dentre os quais destacamos o que é referente à visualização: "inclui o reconhecimento de formas no ambiente, o desenvolvimento de relações entre objetos bi e tridimensionais e a habilidade de desenhar e reconhecer objetos de diferentes perspectivas" (VAN DE WALLE, 2009, p. 439).

Concordamos com Van de Walle (2009) sobre a relevância da visualização para a formação do pensamento geométrico e acreditamos que o termo expressa muito mais do que o senso comum o entende, ou seja, como uma forma de "ver com os olhos físicos".

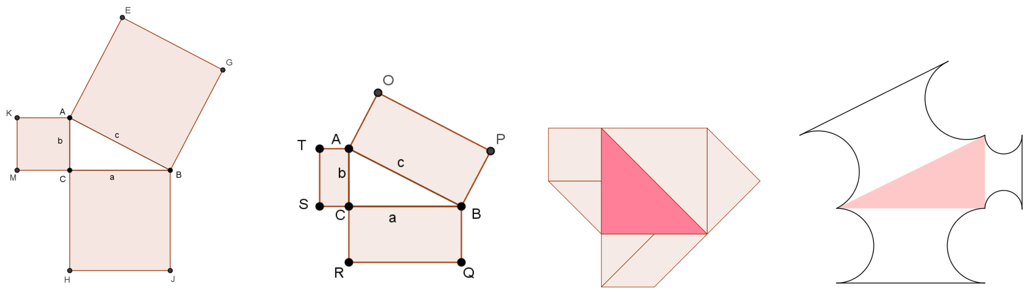
O tema "visualização" é abordado por Hilbert e Cohn-Vossen (1932), Fischbein (1987), Zimmermann e Cunningham (1991), Guzmán (1997) e Arcavi (1999). Com base nesses autores, Leivas (2009) define visualização como "um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos" (p. 22).

O pensamento geométrico não se forma da mesma maneira em todas as pessoas. Segundo as idéias de van Hiele, há uma hierarquia de cinco níveis de compreensão de ideias espaciais, que descrevem os processos de pensamento utilizados em contextos geométricos: visualização, análise, dedução informal, dedução e rigor. (VAN DE WALLE, 2009). Na educação básica, espera-se que os estudantes atinjam, pelo menos, o nível de dedução informal e, para isso, é preciso que seus professores também consigam desenvolver seu pensamento geométrico nesse nível e, em princípio, nos níveis superiores, para poder planejar atividades em que os alunos se acostumem a visualizar e analisar figuras geométricas.

Atividades relacionadas a distâncias são oriundas da Geometria Euclidiana e, mais especificamente, da escola pitagórica; seus aspectos geométricos visuais naturalmente envolvem questões de medidas, tendo dessa forma uma relação com áreas. Em geral, na escola básica e não raramente na formação do professor de Matemática, os únicos aspectos geométricos envolvidos são aqueles que envolvem triângulos retângulos, suas medidas e relações sobre as medidas de seus lados, como o teorema de Pitágoras ou de Tales.

Em nosso entender, a falta de discussão a respeito de diferenciação entre os aspectos aritméticos e geométricos envolvidos, por exemplo, no Teorema de Pitágoras se constitui em um obstáculo à formação do pensamento geométrico e deixa marcas profundas na forma de visualizar qualquer problema que aborde um triângulo retângulo, como é o caso da questão apresentada neste artigo.

Um exemplo do que apontamos acima é ilustrado pela figura 1, a seguir:



(a) (b) (c) (d)

Figura 1 - Figuras (a), (b), (c), (d), construídas sobre os lados do triângulo ABC.

Dado o triângulo retângulo ABC, cujos catetos AC e BC e hipotenusa AB (objetos geométricos) medem respectivamente *b*, *a* e *c* (objetos numéricos), é válida a relação: “a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa”. Portanto, é uma relação numérica envolvendo áreas. Geometricamente, essa afirmativa é visualizada nas figuras como “a soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos é igual à área da figura construída sobre a hipotenusa”. No entanto, somente a primeira das figuras acima tem o objeto geométrico “quadrado”.

Consideramos que a percepção do teorema é feita, em geral, exclusivamente com relação à primeira das figuras (1-a), não se considerando as demais. Talvez essa seja uma das causas pelas quais, sempre que se pensa em um triângulo retângulo, de imediato pensa-se na relação algébrica ou aritmética, $a^2+b^2=c^2$, de acordo com a simbologia da figura 1(a).

Outra observação que pode ser feita é de que o Teorema de Pitágoras é visto, na maioria das vezes, tanto em livros didáticos quanto em bibliografias alusivas ao tema, como exclusivo do plano. Entretanto, a relação pode ser visualizada no espaço, como na figura 2, que expressa a seguinte proposição: “a medida da diagonal de um cubo ao quadrado é igual à soma dos quadrados das medidas das três arestas”; ou seja, $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$, de acordo com os dados da figura 2.

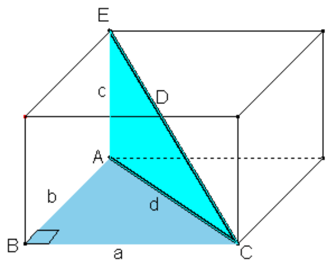


Figura 2 – Teorema de Pitágoras no espaço tridimensional.

De uma forma geral, portanto, parece-nos que a formação do professor de Matemática que vai trabalhar com conceitos geométricos, em qualquer nível de ensino, deveria privilegiar atividades que propiciassem o desenvolvimento do pensamento geométrico, caracterizado pela capacidade de usar, harmonicamente, a imaginação, a intuição e a visualização.

Partindo dessa premissa, apresentamos, a seguir, a metodologia empregada na investigação com professores em formação continuada e os resultados da análise das soluções de uma questão de Geometria

Metodologia da Pesquisa

A origem da questão proposta

A proposta da questão aqui analisada teve origem em uma experiência de ensino, realizada pelo primeiro autor, em uma disciplina de Geometria de um curso de Licenciatura em Matemática. Tendo encontrado em Durán (2003, p. 290) a proposição "O diâmetro de um triângulo retângulo é igual à soma dos catetos menos a hipotenusa", o professor-pesquisador propôs aos licenciandos a demonstração dessa propriedade.

Esperava-se que os alunos esboçassem o desenho de um triângulo retângulo, como ABC, retângulo em B, na Figura 3, e construíssem o seu incentro I, que corresponde ao centro de uma circunferência inscrita em tal triângulo. Essa circunferência deve tangenciar os lados AB, AC e BC, respectivamente em pontos Y, X e Z, de tal modo que os segmentos IX, IY e IZ correspondam ao raio r. Por outro lado, sendo A um ponto exterior à circunferência e AC e AB segmentos tangentes a ela, tem-se que as medidas de AZ e AY são iguais a x[2]. Da mesma forma ocorre com o ponto C, de modo que as medidas de CX e CZ são iguais a y. Além disso, mAZ+mZC= x + y. Assim, (mBX+mXC) + (mBY+mAY) – mAC = (r + y) + (r + x) – (x + y) = 2r, que é o diâmetro da circunferência.

Ignorando o estudo em desenvolvimento, sobre polígonos inscritos e circunscritos, esses alunos de Licenciatura em Matemática tiveram muita dificuldade em visualizar o problema por meio de uma construção mental ou até mesmo com lápis e papel e tentaram resolver por meio de propriedades do triângulo retângulo.

Assim, ao criar um problema de Geometria para o teste que foi aplicado aos 50 professores em formação continuada participantes da pesquisa[3] aqui relatada, propusemos a mesma questão, mas já indicando na figura as letras que representam as

[2] Pelo teorema que diz: Se por um ponto P, exterior a uma circunferência, conduzimos dois segmentos PA e PB, tangentes à circunferência respectivamente nos pontos A e B, então mPA=mPB, em que m indica a medida do segmento.

[3] Análise de erros em problemas resolvidos por professores de Matemática em cursos de formação continuada. Projeto 471503/2008, Edital Universal, CNPq.

medidas dos segmentos. Portanto, a questão do teste, aqui analisada, tem o seguinte enunciado:

Usando a figura 3, mostre que ***O diâmetro da circunferência inscrita em um triângulo retângulo é igual à soma das medidas dos catetos menos a medida da hipotenusa,*** *utilizando argumentações apropriadas.*

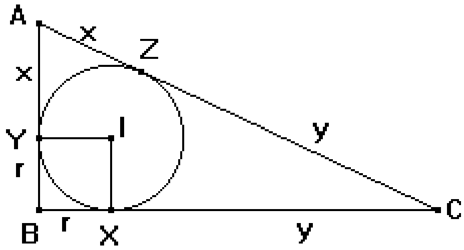


Figura 3 – Triângulo retângulo relativo à questão do teste

A metodologia de análise das respostas

Para analisar erros em produções escritas de alunos ou professores de Matemática, temos utilizado a metodologia proposta em Cury (2007), para análise do conteúdo dos erros. Nessa abordagem, primeiramente é feita uma leitura flutuante de todas as respostas, para, em seguida, decidir quais são consideradas corretas, parcialmente corretas ou incorretas, contando o número de soluções de cada um desses tipos. Depois, as respostas incorretas ou parcialmente corretas são relidas, para fazer a unitarização e classificação dos tipos de erros. Finalmente, para cada tipo, o pesquisador produz uma interpretação, à luz de alguma teoria que subsidie sua investigação, elaborando textos descritivos.

Nesta questão aqui analisada, foi considerada correta (Código 2)[4] a solução em que é descrito o processo para relacionar os lados do triângulo retângulo com o diâmetro da circunferência nele inscrita. Para isso, o participante utiliza a simbologia indicada na figura ou uma notação própria, por ele especificada.

Recebe Código 1 (solução parcialmente correta), a resposta do participante que mostra ser verdadeira a relação proposta, mas não considera adequada sua argumentação e utiliza outras relações geométricas, não conseguindo concluir a solução.

A resposta é considerada incorreta (Código 0) quando o participante apresenta uma das seguintes alternativas de justificação; a) aplica o teorema de Pitágoras para as medidas dos lados da figura, desenvolve os quadrados mas não conclui a solução; b) aplica equivocadamente o teorema de Tales para obter relações métricas no triângulo retângulo ou relações entre a circunferência, diâmetro e lados do triângulo; c) utiliza valores específicos de uma terna pitagórica para conferir o enunciado ou aplica falsas relações no triângulo retângulo.

Além dessas três categorias, ainda é atribuído o Código 9 para a ausência de resposta.

Apresentação e Análise dos Dados

A partir da categorização inicial, apresentamos, na Figura 4, a distribuição das 50 respostas segundo os códigos acima indicados:

---

[4] Empregamos, para essa primeira classificação, os códigos utilizados na correção das provas do PISA (Programa Internacional sobre Avaliação de Estudantes), encontrados em OECD (2004).

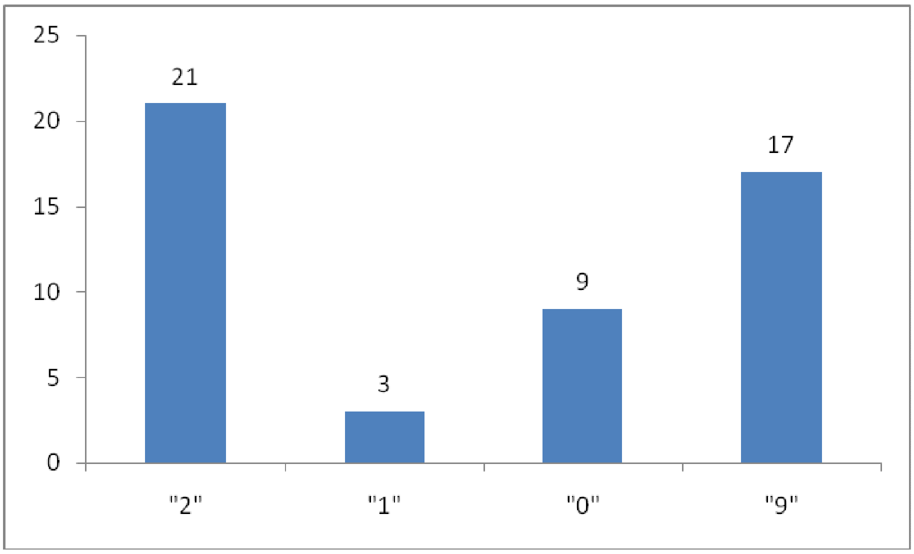


Figura 4 – Distribuição das respostas segundo os códigos.

Nesta pesquisa, estamos interessados na análise de erros, mas apresentamos, para exemplificar a correção feita, uma das 21 respostas consideradas corretas (Código 2)[5].

Observe que os catetos são x+r e r+y e a hipotenusa x+y. Observando a circunferência, o raio é a distância do centro a qualquer ponto da circunferência, portanto mIX=r e mIZ=r. O diâmetro é 2r. Assim temos *2r=x+r+r+y-(x+y)* *2r=2r+x+y-(x+y)* *2r=2r* *Vale observar que a circunferência está presa (tangencia os 3 lados do triângulo) e conforme ele aumenta, ela também aumenta.*

Figura 5 – Solução considerada correta para a questão 03.

As 12 respostas incorretas ou parcialmente corretas foram, então, analisadas quanto aos erros cometidos. Os participantes são indicados apenas pela letra P, seguida de um número, para preservar suas identidades.

Erro I: o participante, a partir das medidas dos segmentos indicadas na Figura 1, expressa a relação que indica o teorema de Pitágoras. Três professores solucionaram a questão dessa forma, desenvolvendo os quadrados, mas não concluíram, como vemos na Figura 6:

$$(x+y)^2=(r+y)^2 + (r+x)^2$$
$$x^2 +2xy+y^2=r^2+2ry+y^2+r^2+2rx+x^2$$
$$2xy=2r^2+2ry+2rx$$

Figura 6 – Solução de P1 para a questão

Ainda nessa categoria, temos mais dois participantes, P10 e P12. P10 inicia corretamente a solução, chamando "b" a medida do lado oposto ao ângulo B, "c" a medida do lado oposto ao ângulo C e "a", a medida do lado oposto ao ângulo A. Talvez não confiando em sua argumentação, tenta depois aplicar o teorema de Pitágoras e não

[5] Todas as respostas estão digitadas, porque algumas delas foram escritas a lápis e o escaneamento não proporcionou uma figura legível.

consegue concluir. P12, por sua vez, ao não conseguir chegar a uma solução usando o teorema de Pitágoras, abandona os cálculos e argumenta, corretamente, a partir da relação entre o diâmetro e as medidas dos lados. Sua soluções são apresentadas nas Figuras 7 e 8 :

d=a+c-b *2r=y+r+x+r-(x+y)* *2r=2r* *Aplicando o teorema de Pitágoras:* $(x+y)^2=(x+r)^2 + (r+y)^2$ $x^2 +2xy+y^2=x^2+2xr+r^2+r^2+2ry+y^2$ $2xy=2r^2+2xr+2ry$ *(: 2)* $xr+r^2+ry=xy$ $r^2+r(x+y)-xy=0$ [e neste ponto, tenta resolver a equação pela fórmula de Baskara e não conclui]	Pelo teorema de Pitágoras temos: $(x+y)^2=(x+r)^2 + (y+r)^2$ $x^2 +2xy+y^2=x^2+2xr+r^2+y^2+2yr+r^2$ *(cancelando termos semelhantes)* $2xy=2xr+2ry+2r^2$ *(fator comum)* $2xy=2r(x+y+r)$ *(cancelando)* $xy=r(x+y+r)$ D=2r=x+r+y+r-x-y D=2r=2r
Figura 7 – Resolução de P10	Figura 8 – Resolução de P12

Ainda temos, nesta classe de erro do tipo I, a resposta do participante P7, que considera, equivocadamente, que o perímetro da circunferência é igual ao seu diâmetro, para em seguida aplicar o teorema de Pitágoras e também não chegar a uma conclusão.

Finalmente, ainda nessa classe de erro do tipo I, temos o participante P6, que usa o teorema de Pitágoras, mas emprega valores de uma terna pitagórica para "comprovar" sua argumentação.

Erro II: nesta classe de erro, o participante aplica o teorema de Tales, envolvendo relações métricas no triângulo retângulo. Dois deles, P4 e P5, aplicam em seguida o teorema de Pitágoras, como vemos nas Figuras 9 e 10. P4 também atribuiu as letras a, b e c às medidas dos lados do triângulo, porém chamou de "a" a medida do lado oposto ao ângulo B e de "b" a medida do lado oposto ao ângulo A. P5 não indica no desenho as letras, mas também utiliza *a, b* e *c*.

$\frac{C}{c}=\frac{A}{a}=\frac{B}{b}$ $a^2=c^2+b^2$ $c=2r$ $c^2=a^2-b^2$ $r=c/2$ $c=\sqrt{a^2-b^2}$ $A=a+x$ $B=b+r=b+c/2$ $C=x+r=x+c/2$ $A=A-x$ $B=B-r=B-c/2$ $x=\sqrt{(A-x)^2+(B-\frac{c}{2})^2}$	$2r=(b+c)-a$ $2r=x+r+r+y=x=y$ $\Delta ABC\approx\Delta XZC$ $\frac{x+r}{2r}=\frac{r+y}{y}$ $xy+ry=2r^2+2ry$ $xy=2r^2+2ry-ry$ $xy=2r^2+ry$ $xy=r(2r+y)$ (I) $(x+y)^2=(x+r)^2+(r+y)^2$ $x^2+2xy+y^2=x^2+2xr+r^2+r^2+2ry+y^2$ $xy=xr+r^2+ry$ $xy=r(x+r+y)$ (II) (I)=(II) $(x+y)^2=(x+r)^2+(y+r)^2$ $x^2+2xy+y^2=x^2+2xr+r^2+y^2+2yr+r^2$ *(cancelando termos semelhantes)* $2xy=2xr+2ry+2r^2$ *(fator comum)* $2xy=2r(x+y+r)$ *(cancelando)* $r(2r+y)=r(x+r+y)$ $2r=x+r+y-y$ $2r=x+r$
Figura 9 – Resolução de P4	Figura 10 – Resolução de P5

Erro III: Neste caso, encontram-se os dois participantes que mencionaram o incentro do triângulo, mas não souberam concluir, porque erraram algum detalhe da explicação. P9 e P11 resolveram conforme as soluções indicadas nas Figuras 11 e 12, a seguir:

Traçando a bissetriz de cada ângulo obtemos o centro da circunferência inscrito neste Δ e o r é a distância deste centro aos catetos ou hipotenusa de forma a $r^2=xy$ *e hipotenusa + diâmetro=soma dos catetos pelas relações métricas do Δ retângulo (acho que não soube explicar direito). Desculpe!*	*O centro da circunferência é o incentro do triângulo, portanto CI, AI e BI são bissetrizes e pela congruência de triângulos* $\Delta AZI\equiv\Delta AYI$, $\Delta CZI\equiv\Delta CXI$ *e* $\Delta BYI\equiv\Delta BXI$ *daí temos* $mCZ=mCX=y$ *e* $mAZ=mAY=x$. *Então vemos que vale dizer que* $r+x+r+y-(x\_y)=2r+x+y-x-$ $y=2r=$*diâmetro*
Figura 11 – Resolução de P9	Figura 12 – Resolução de P11

Erro IV: Nesta classe é considerada a solução de P8, que é distinta de todas as outras e cujos erros não têm explicação plausível, a menos que tivéssemos entrevistado o participante para obter uma justificativa, o que não está previsto nesta etapa da pesquisa. Este professor apresenta a solução indicada a seguir, na Figura 13:

$xy+xy$
$2xy\text{-}zy$
$(zy)^2=(xy)^2+(xy)^2$
$(zy)^2=2(xy)^2$
$zy=\sqrt{2}$
$\sqrt{2}-zy$

Figura 13 – Resolução de P8

Tanto nas respostas corretas quanto naquelas parcialmente corretas ou nas incorretas, destacamos, primeiramente, o fato de que a propriedade citada na nota de rodapé 1 não foi mencionada por qualquer um dos participantes. No entanto, a propriedade em questão é apresentada na maior parte dos livros didáticos utilizados nos cursos de Licenciatura em Matemática, em especial naqueles que fizeram parte da pesquisa de Leivas (2009). Em especial, a propriedade é citada em Dolce e Pompeo (1981), em que o assunto é trabalhado no capítulo referente a circunferência e círculo.
Em segundo lugar, chama a atenção o fato de que os participantes parecem não confiar em seu senso espacial, ou seja, não parecem ter sensibilidade sobre formas e relações entre elas, pois, ao invés de empregar as letras já indicadas na figura, procuram justificar a propriedade usando os teoremas de Pitágoras ou Tales, sem intuir a relação autoevidente, que envolve circunferência e segmentos tangentes a ela.
Portanto, parece-nos que, efetivamente, há uma tendência a associar triângulo retângulo ao teorema de Pitágoras, ou ainda, associar Álgebra com Geometria, tentando obter fórmulas que possam justificar afirmativas e não empregando os níveis mais elementares do pensamento geométrico, especialmente a visualização que, ao permitir a formação de imagens mentais, auxiliaria na resolução dos problemas geométricos.

Considerações Finais

O projeto do qual foi aqui apresentado um recorte tem como um dos objetivos específicos desenvolver estratégias de ensino com vistas a retomar, com os professores em formação continuada, os conteúdos nos quais foram detectados erros ou dificuldades.
Se uma questão de Geometria envolve visualização, como será solucionada? O apelo a softwares de Geometria Dinâmica terá possibilidade de auxiliar professores e alunos a compreender conceitos de Geometria?
A respeito de possibilidades de uso de computadores como formas de mudanças de comportamentos, concordamos com Borba e Villarreal (2006, p. 13), a respeito de aspectos visuais proporcionados por essas ferramentas:

> Visualização tem sido a principal mudança em interfaces computacionais desde que os monitores foram introduzidos como uma parte essencial dos computadores. Essas mudanças aumentaram a acessibilidade aos computadores, tornando-os disponíveis a um público maior [...].

Assim, entendemos que o uso de tecnologias computacionais para o ensino de Geometria na formação inicial e continuada de professores de Matemática poderá ser um elemento que proporcione uma melhoria na qualidade do ensino. Entretanto, para Sancho (2006), uma das dificuldades para que ocorram transformações no ensino com a incorporação dessas tecnologias parece se apoiar no fato de que o ensino escolar ainda é centrado na figura do professor. Para a autora, a fim de que a introdução desse recurso transforme e melhore o aprendizado, há modificações que devem ser implementadas no ambiente escolar e

> Muitas estão nas mãos dos próprios professores, que terão de redesenhar seu papel e sua responsabilidade na escola atual. Mas outras tantas escapam de seu controle e se inscrevem na esfera da direção da escola, da administração e da própria sociedade. (SANCHO, 2006, p. 36)

Dessa forma, uma das dificuldades dos professores em trabalhar com computadores em sala de aula pode estar relacionada a uma forma de ensino de Geometria estática, em que apenas atividades utilizando o método dedutivo são incorporadas na formação inicial, não proporcionando novos olhares e formas de resolução.

Ao apontar as cinco funções da demonstração - verificação, explicação, comunicação, descoberta e sistematização - Bennett (apud KING; SCHATTSCHNEIDER, 2003) afirma que a Geometria Dinâmica apresenta grande impacto no papel que desempenha a demonstração em Matemática como verificação, uma vez que uma dada proposição, cuja veracidade não seja obvia a partir de algumas poucas figuras estáticas, pode ser verificada por meio de uma variedade de representações obtidas pelo computador.

Conforme Villiers (apud KING; SCHATTSCHNEIDER, 2003), muitos alunos parecem não ter necessidade adicional de convicção, após explorar conjecturas geométricas em ambientes de Geometria Dinâmica. Entretanto, é possível despertar sua curiosidade ao solicitar explicações sobre os porquês da veracidade de alguns resultados obtidos.

Dessa forma, ao acompanhar uma resolução de uma atividade em tais ambientes, com um processo de justificativas, estaremos proporcionando um preparo para o desenvolvimento do processo dedutivo e cumprindo um dos objetivos indicados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (BRASIL, 1998b, p. 47).

> Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas.

De forma similar, cumpre-se o que os Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio (PCNEM) orientam, a respeito de um pensamento geométrico atual em relação aos conhecimentos matemáticos e organização do ensino de Matemática, para a adequação ao desenvolvimento e promoção dos indivíduos nesse nível de ensino, por meio do desenvolvimento de competências, no sentido de compreender conceitos e procedimentos necessários para concluir e argumentar. Assim, a Geometria se torna uma forma de ler e interpretar o espaço, especialmente na compreensão dos fenômenos universais e, portanto,

> [...] cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida. Sem dúvida, cabe a todas as áreas do Ensino Médio auxiliar no desenvolvimento da autonomia e da capacidade de pesquisa, para que cada aluno possa confiar em seu próprio conhecimento. (BRASIL, 2000, p. 41)

Consideramos, pois que a utilização de softwares de Geometria Dinâmica pode contribuir para a formação de professores com um olhar mais abrangente para os vários aspectos ou dimensões em que a Geometria pode ser analisada. Esse uso da tecnologia poderá auxiliar os professores – e seus alunos - na obtenção de posições relativas a circunferências, tangentes, secantes, inscrição e circunscrição de polígonos o que, possivelmente, proporcionará outra visão sobre a resolução de um problema como o que analisamos neste artigo, com melhores justificativas geométricas e menos apelo aos aspectos algébricos.

Referências

ANDRADE, J. A.; NACARATO, A. M. Tendências didático-pedagógicas no ensino de geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs. **Educação Matemática em Revista**, v. 11, n. 17, p. 61-70, 2004.

ARCAVI, A. The role of visual representation in the learning of mathematics. In: NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE PME, 1999. **Proceedings**… Disponível em: <http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/PDF/26.pdf>. Acesso em: 30 set. 2008.

BENNETT, D. A geometria dinâmica renova o interesse num velho problema. In: KING, J. R.; SCHATTSCHNEIDER, D. (Ed.). **Geometria Dinâmica**: seleção de textos do livro Geometry Turned On. Lisboa: Associação de Professores de Portugal, 2003. p. 45-50.

BORBA, M.C.; VILLARREAL, M.E. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking**: information and communication, technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer, 2005.

BRASIL. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília, 1998a.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília, 1998b.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio. Brasília, 2000.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar**: geometria plana. 3. ed. São Paulo: Atual, 1981.

DURÁN, D. C. **La geometría euclidiana**. Maracaibo, Venezuela: Ediciones Astro Data, 2003.

FISCHBEIN, E. **Intuition in science and mathematics:** an educational approach. London: Mathematics Education Library, 1987

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an educational task**. Holland: D. Reidel Publishing Company, 1973.

GUZMÁN, M. de. **El rincón de la pizarra, ensayos de visualización en análisis matemática**: elementos básicos del análisis. Madrid: Pirámide, 1997.

HILBERT, D.; COHN-VOSSEN, S. **Geometry and the imagination**. New York: Chelsea Publishing Company, 1932.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, intuição e visualização**: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. 2009. 294 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pendulo? **Pró-Posições**, v. 3, n. 7, p. 39-54, 1992.

OECD. **Marcos teóricos de PISA 2003**: Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo, 2004. Disponível em: <http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/58/25/39732603.pdf>. Acesso em: 25 abril 2010.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Zetetiké**, v. 1, n. 1, p. 7-17, 1993.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 2009.

VILLIERS, M. O papel da demonstração na investigação em Geometria realizada em computadores: algumas reflexões. In: KING, J. R.; SCHATTSCHNEIDER, D. (Ed.). **Geometria Dinâmica**: seleção de textos do livro Geometry Turned On. Lisboa: Associação de Professores de Portugal, 2003. p. 31-44.

ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. **Visualization in teaching and learning mathematics**: a project sponsored by the Committee on Computers in Mathematics Education of the Mathematical Association of America. Washington: MAA, 1991.

Abstract

In this paper, we present a part of a research conducted with mathematics teachers in continued education programs in five higher education institutions of Rio Grande do Sul, with the aim of analyzing the errors made by these teachers on issues involving algebra, geometry, analysis and probability. One of the test questions addresses concepts of geometry and the solutions given by 50 teachers were analyzed, having been created categories of errors that were described and exemplified. The discussion on the resolutions was based on authors who approach the concept of visualization and in official documents such as National Curriculum Guidelines. As a suggestion to retake with the teachers the contents in which were detected errors or difficulties, we point out the use of Dynamic Geometry software, which can provide a better view and understanding of geometric properties involving inscribed and circumscribed polygons.

Keywords: Plane geometry. Error analysis. Teachers formation.