Uso de representaciones geométricas para resolver ecuaciones cuadráticas a través del método griego: experimento de enseñanza

Jairo Alberto Acuña Quiroga[*]
Geraldine Bustos Motavita[**]
Miguel Ángel Cuervo Lagos[***]
Karen Lulieth Pulido Moyano[****]

RESUMEN

Presentamos los resultados obtenidos de una actividad realizada en el marco de un experimento de enseñanza desarrollado en grado noveno de una institución educativa de la ciudad de Bogotá. Dicho experimento fue realizado por cuatro estudiantes de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. En esta investigación se usa el álgebra geométrica como recurso didáctico para comprender la solución de ecuaciones cuadráticas de la forma a través del método griego. Describimos una de las actividades desarrolladas y su respectivo análisis con relación al marco teórico, el cual se basó en la teoría de representaciones semióticas de Duval (2004), los errores del álgebra de Socas et al. (1997), la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1986), y el experimento de enseñanza de Steffe y Thompson (2000). Finalmente, concluimos acerca de aspectos del álgebra geométrica relevantes encontrados dentro del desarrollo del experimento de enseñanza.

Palabras clave: representaciones, geometría, álgebra, experimento de enseñanza.

[*] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: jaacunaq@correo.udistrital.edu.co

[**] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: gbustosm@correo.udistrital.edu.co

[***] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: macuervol@correo.udistrital.edu.co

[****] Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: klpulidom@correo.udistrital.edu.co

PROBLEMÁTICA

Identificamos tres tensiones que nos permitieron dar forma a nuestra investigación: la primera es el trabajo algorítmico de algunas fórmulas matemáticas, en particular el de la fórmula cuadrática; este algoritmo limita la capacidad de razonamiento de los estudiantes, lo que genera que hagan uso de él en situaciones que no la requieren (Vasco, 1986, Socas et al., 1996); la segunda es que, desde nuestra experiencia como estudiantes y docentes, observamos cómo en las clases de matemáticas se hace poco énfasis en el manejo de diferentes registros de representación de un objeto matemático, lo que difiere, por una parte, con la teoría de representaciones semióticas de Duval (2004), y por otra, con el Ministerio de Educación, (MEN, 2006), el cual resalta la importancia de hacer evidentes las diferentes representaciones de un objeto; por último, algunos docentes de matemáticas omiten la evolución histórica de algunos objetos matemáticos, conocimiento este que permite prever los posibles errores o dificultades que pueden presentar los estudiantes en el proceso de enseñanza aprendizaje. Por tal razón, nuestra investigación estaba encaminada a dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿qué aspectos del álgebra geométrica en el diseño de una secuencia de actividades permiten a estudiantes de grado noveno de una institución educativa, resolver ecuaciones cuadráticas a través del método desarrollado por los griegos? El propósito de la actividad aplicada fue identificar los aspectos de álgebra geométrica que los estudiantes tienen en cuenta al trabajar con expresiones algebraicas.

MARCO TEÓRICO

Las representaciones en la educación matemática hacen referencia a la utilización de signos y gráficos, y lo que Duval (2004) llama registros de representación semióticos, los cuales permiten registrar o comunicar el conocimiento. Este autor destaca dos procesos importante en el trabajo con los registros de representación: **conversión y tratamiento;** el primero de estos hace referencia al pasar de un registro de representación a otro, por ejemplo: pasar de la expresión algebraica a una representación geométrica que resultará equivalente a la inicial. El segundo hace referencia al manejo de cada uno de los registros; por ejemplo, al realizar el tratamiento a la siguiente expresión $a^2 - b^2$ obtenemos $(a-b)(a+b)$; observamos que nos mantenemos en un mismo registro de representación semiótico: el algebraico (Duval, 2004).

Otra referencia conceptual es el trabajo de Socas et al. (1996), del cual tomamos los siguientes aportes: en primer lugar, los estudiantes aún se encuentran muy ligados a algunas ideas de la aritmética, por ejemplo, el signo igual lo tienden a concebir como una acción física, y no identifican que se puede tomar como una restricción que condiciona el valor de x a un cierto valor que hace que la ecuación sea verdadera (Socas et al., 1996). Esto puede ser la causa, a su vez, de otros de los errores descritos por este autor, como el de la necesidad de clausura, en la cual los estudiantes tienden a operar la expresión algebraica hasta obtener un solo término, omitiendo que los elementos de la expresión inicial no son todos de la misma naturaleza. En segundo lugar, tenemos la importancia de reconocer los errores no como algo pasajero en el proceso de enseñanza sino como un puente que permite reforzar los conocimientos que se están trabajando (Socas et al., 1996). Por último, queremos identificar la interpretación que los estudiantes hacen con respecto a la letra, tomando como referencia la clasificación planteada por Küchemann (1981, citado en Socas et al., 1996). En cuanto al trabajo geométrico, es necesario que los estudiantes dominen lo que Godino, Batanero y Roa (2002) llaman la propiedad de disección, que se puede resumir como: la suma de todas las divisiones de un área es igual al área total de una figura. Pero también es necesario que se comprenda lo que es la conservación de área, es decir, la invariancia de una cierta cualidad (área) de un objeto cuando se le aplican unas ciertas transformaciones (Godino et al., 2002), o aquello que permanece invariante a pesar de las alteraciones de tiempo y espacio (MEN, 2006). Esta característica se hace de vital importancia para comprender el razonamiento que los griegos hacen para lograr resolver las ecuaciones cuadráticas.

METODOLOGÍA

El experimento de enseñanza es una metodología de investigación cualitativa que tiene la necesidad de explicar la concepción del aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes y su desarrollo en el contexto de la enseñanza, sin omitir que este modelo debía dar resultados del progreso de la comunicación interactiva matemática (Steffe, & Thompson, 2000).

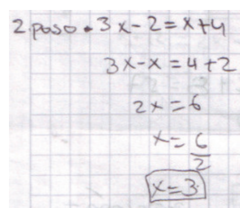
a. *Fases del experimento.* El experimento cuenta con tres fases: en primer lugar tenemos la fase planeación y diseño, en la cual los investigadores en conjunto con el grupo docente acuerdan las actividades a trabajar en el grupo, y las hipótesis de aprendizaje para cada una. En segundo lugar tenemos la fase de aplicación, en la cual se ponen en práctica las actividades propuestas, y con base en los resultados de estas se decide si es necesario modificar la planeación inicial en pro de los objetivos, y por último, el análisis retrospectivo, el cual retoma todos los datos recogidos durante la aplicación de las actividades, y permitirá concluir, de acuerdo con el marco teórico e hipótesis iniciales, si la investigación cumplió con los objetivos. Para la recolección de los datos se toman como instrumentos las videograbaciones de las sesiones de clase, las guías resueltas por los estudiantes, y los diarios de campo elaborados por el docente a cargo de las actividades.

b. *Descripción de la actividad.* La actividad está constituida por tres partes que se realizaron de manera conjunta. **A)** Hay un mapa en el que se encuentran señalados diferentes lugares. Los estudiantes deberán desplazarse a seis de los lugares señalados, siguiendo unas pistas. En estos lugares encontrarán unas claves que les permitirán desarrollar el método griego para resolver ecuaciones cuadráticas. Las pistas están dadas en un manual de instrucciones; estas consisten en resolver adecuadamente algunos ejercicios algebraicos y geométricos, y así poder llegar a los lugares en búsqueda de las claves; en caso que los estudiantes resuelvan incorrectamente dichas situaciones, no podrán llegar a los lugares previstos, por lo cual no podrán obtener todas las claves y deberán identificar cuáles fueron sus errores en el desarrollo de los ejercicios, para poder avanzar. **B)** Al llegar al lugar indicado en el mapa deben resolver otros ejercicios en las que trabajan el proceso de conversión de un registro de representación semiótico a otro, en especial de la representación algebraica a la geométrica. También se va a observar la realización del tratamiento de una expresión algebraica, dado que deberán resolver diversas ecuaciones. **C)** Al finalizar, si resuelven correctamente estos ejercicios, los estudiantes obtendrán una de las seis claves que les permitirá desarrollar el método griego para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + bx = c$.

ANÁLISIS

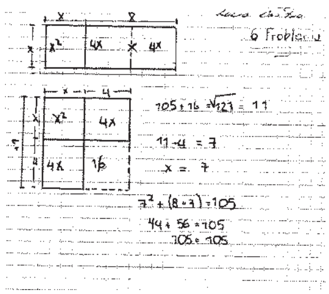
a. *Intervención realizada por el docente investigador.* En el proceso de desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes, el docente intervino constantemente al momento de observar errores de ellos en el desarrollo de las mismas, justificando con ello que en algunas ocasiones se llegaba a realizar el efecto *Toopaze* mencionado por Brousseau (1986), en el que indica que el docente, después de múltiples preguntas, da la respuesta de forma discreta, obstaculizando con ello la construcción del conocimiento por parte del estudiante. Aun así, las intervenciones del docente no siempre fueron de manera inadecuada, puesto que era necesario formalizar las ideas, estrategias y el conocimiento construido por los estudiantes para que de dicha forma, ellos lograran mejores nociones sobre el objeto matemático en estudio.

b. *Interpretación de lo realizado por los estudiantes.* En el tratamiento que los estudiantes hacen de las expresiones algebraicas, podemos identificar algunas dificultades, por ejemplo: en el ejercicio *simplifique la expresión* $2x^2 + 3x - x^2 + 6 + 9x$, los estudiantes reducían los términos de la incógnita de diferente exponente, y obtenían como resultado $13x^2 + 6$, ignorando el hecho que x^2 está restando. Este tipo de errores están directamente relacionados con uno de los cuatro puntos a los cuales se les pueden atribuir los errores del álgebra mencionados por Socas et al, (1996), quien señala que la naturaleza de los resultados del álgebra se atribuye a la necesidad de clausura con la que los estudiantes han trabajado desde la aritmética. Al respecto, los autores exponen que "las ideas sobre la respuesta única parece ser la causa de errores cometidos frecuentemente por los alumnos que simplifican una expresión como $3x + 5y = 8xy$" (p. 100).



Por otra parte, se puede interpretar que los estudiantes hacen uso de una de las clasificaciones de la letra mencionadas por Küchemann (1981, citado en Socas et al., 1996) quien hace referencia a la "letra ignorada", puesto que reconocen la letra pero no la tienen en cuenta al momento de realizar las operaciones. Los estudiantes evidencian fortalezas al momento de trabajar con los recíprocos aditivos y multiplicativos al momento de resolver ecuaciones lineales, como se observa en la figura de la derecha.

La conversión de un registro de representación algebraico a un registro geométrico es de gran utilidad para el desarrollo del método geométrico establecido por los griegos. De esta manera, se evidenció que los estudiantes representaron apropiadamente una expresión algebraica cuando el coeficiente de la variable x^2 era igual a uno, pero el momento que esta situación cambió teniendo como coeficiente un número mayor a uno en la misma variable, se les presentó gran dificultad al realizar la conversión. Esto nos permite reconocer que los estudiantes presentan algunas dificultades en la relación existente entre las expresiones algebraicas y su equivalente en representación geométrica, teniendo en cuenta lo que menciona Duval (2004) acerca de las representaciones como medio de comunicación del conocimiento. En la siguiente imagen evidenciamos cómo los estudiantes tienen dificultades no solo con el paso de las expresiones algebraicas a la representación geométrica, sino también con relación al perímetro y el área (figura de la derecha).



En el momento que los estudiantes reconocieron el método griego para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + bx = c$, identificaron las relaciones entre los dos registros de representación (algebraica y geométrica), además de manejar apropiadamente el proceso de conversión de un registro a otro (Duval, 2004), logrando identificar que la expresión x^2 representa una cuadrado de longitud de lado x. En la figura de la izquierda observamos cómo los estudiantes resolvieron la ecuación $x^2 + 8x = 105$.

CONCLUSIONES

En la gestión del docente se debe tener en cuenta el proceso histórico de un objeto matemático para prever diferentes dificultades conceptuales por parte de los estudiantes y obtener herramientas didácticas. Además, por medio de la representación geométrica los estudiantes lograron expresar los términos algebraicos en representaciones que los acercaban más a su realidad, los relacionaron con la repartición de terrenos en áreas, y reconocieron de esta forma relaciones y la descomposición de las mismas. Los obstáculos presentados por los estudiantes se lograban superar por medio de la reestructuración de las actividades, y de las consultas realizadas por los estudiantes sobre estos aspectos matemáticos. Los estudiantes identificaron que el término x^2 geométricamente representa un cuadrado de longitud x, y reconocieron propiedades fundamentales de figuras cuadradas. Además, se evidenció que la relación de equivalencia entre expresiones algebraicas y representaciones geométricas permitió la comprensión del método griego.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brousseau, G. (1998): *Théorie des Situations Didactiques, Grenoble,* La Pensée Sauvage.

Socas, M., Camacho M., Palarea, M., Hernández J. (1996). *Iniciación al álgebra.* Editorial Síntesis.

Duval, R., (2004) *Semiosis y pensamiento humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle. Editorial Peter Lang.

Godino, J., Batanero, C., Roa, R. (2002) Medida de magnitudes y su didáctica para maestros. *Matemática y su didáctica para maestro*.

Ministerio de Educación Nacional [MEN], Colombia. (2006), *Estándares básicos de competencias en matemáticas*.

Steffe, & Thompson, (2000). Metodología de la enseñanza experimento: Principios fundamentales y esenciales elementos. En R. Kelly Lesh& AE (Eds.), *diseño de la investigación en matemáticas y ciencias* (pp. 267 – 307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Vasco, C. (1986) *Notas de matemáticas, preescolar, primaria, secundaria*. Edición 22, Bogotá.