
Fases de aprendizaje en el contexto de van Hiele para el concepto de continuidad local

Ledys Llasmín Salazar Gómez
ledyslasmín@gmail.com
Universidad de Antioquia

Pedro Vicente Esteban Duarte
pesteban@eafit.edu.co
Universidad de Eafit

Trabajo de Investigación de Maestría (Concluido)- UdeA

Resumen. El presente reporte articula el modelo educativo de van Hiele en su aspecto prescriptivo con la enseñanza de uno de los conceptos fundamentales del Análisis Matemático, continuidad local, a través de la implementación y el desarrollo de un Módulo de Aprendizaje que permite procesos de razonamiento en los estudiantes con el fin de promoverlos de un Nivel II a un Nivel III, el módulo es construido en correspondencia con los descriptores de fases para dar cuenta de las estructuras mentales elaboradas. Posteriormente, en el análisis de cada uno de los tres casos, se describe en categorías en correspondencia los descriptores y donde se hace explícito como razonan los estudiantes en su paso del Nivel II al Nivel III respecto al concepto de continuidad local.

Palabras clave. Fases de aprendizaje, modelo de van Hiele, concepto de continuidad local, Módulo de Aprendizaje y razonamiento.

1. Presentación

Comprender conceptos matemáticos no se limita sólo a calcular y a adquirir destrezas operativas, en la comprensión es importante considerar la utilidad que los estudiantes hacen de éstos en diversas aplicaciones de su vida diaria. Lo anterior, implica la necesidad de analizar factores de carácter teórico y metodológico en la enseñanza de las Matemáticas, porque en la medida en que es puesta en práctica puede generar nuevas perspectivas y la comprensión de otros conceptos.

El presente trabajo de investigación se enfoca en el aspecto metodológico para la comprensión del concepto de continuidad local, y se fundamenta en el modelo educativo de van Hiele. Este modelo se estructura en tres partes: (1) *Insight*, aspecto correspondiente a la comprensión, donde un alumno de manera intencionada actúa correctamente frente a una situación no familiar; (2) cinco niveles de razonamiento, que corresponde a la parte descriptiva del modelo y se denominan: Nivel 0, Predescriptivo; Nivel I, Reconocimiento visual; Nivel II, Análisis; Nivel III, Clasificación y Relación y Nivel IV, Deducción formal; (3) cinco fases de aprendizaje a saber: Fase 1, Información, Fase 2, Orientación dirigida, Fase 3, Explicitación, Fase 4, Orientación libre y Fase 5, integración, que conforman el aspecto prescriptivo del modelo, en donde se propone el diseño de una serie de actividades para promover el progreso a través de los niveles de razonamiento.

Esta propuesta enmarcada en la metodología de investigación de la Educación Matemática, es un aporte a la caracterización de la comprensión del concepto de continuidad local, en el paso del Nivel II al Nivel III de razonamiento del modelo educativo de van Hiele, en alumnos del último año de bachillerato, en el currículo colombiano.

De acuerdo con lo anterior, el modelo brinda herramientas teóricas y metodológicas que son apoyo para estructurar la enseñanza. Además, posibilita la vinculación entre la teoría y la práctica con el fin de posibilitar que alumnos involucrados en experiencias de aprendizaje significativas mejoren su nivel de comprensión, en conceptos geométricos y del análisis matemático.

El concepto de continuidad local se encuentra en la base de los fundamentos teóricos del Cálculo, por lo tanto, es importante que sea comprendido por los estudiantes debido a su utilidad y aplicabilidad en otros conceptos de esta materia. Por consiguiente, surge la necesidad de buscar estrategias de enseñanza que puedan ser aplicadas en el aula de clase y que aporten a la comprensión del concepto.

Esta investigación tiene como propósito fundamental presentar una forma alternativa para la enseñanza del concepto de continuidad local y a la vez contribuir a la construcción de mecanismos que favorezcan la comprensión del mismo.

El punto de partida para este trabajo es la Tesis Doctoral presentada por el profesor Pedro Campillo Herrero: "La noción de continuidad desde la óptica del modelo de Van Hiele", que formuló descriptores para los Niveles 0, I, II, III y IV, para el concepto de continuidad de Cauchy, pero que no se ocupó de la forma como los estudiantes avanzan de un nivel de razonamiento al siguiente (Campillo, 1999). Además, en la revisión de la literatura hasta el momento, no se han encontrado investigaciones que se ocupen de describir la forma como los alumnos progresan de un nivel de razonamiento al siguiente en relación al concepto de continuidad local. En la presente propuesta, se pretende caracterizar el razonamiento de los estudiantes en su paso del Nivel II al Nivel III, a través de la utilización de las fases de aprendizaje como herramienta que aporta al diseño de actividades para favorecer la comprensión. Es de resaltar que estudios recientes, tales como los realizados por Vasco y Bedoya (2005) y Zapata y Sucerquia (2009), se ocuparon del diseño de experiencias de

aprendizaje enmarcadas en las fases del modelo para el progreso del Nivel II al III, en relación a los conceptos de recta tangente a una curva plana sobre un punto fijo y convergencia de series infinitas de términos positivos, respectivamente (Van Hiele, 1957).

El trabajo de investigación realizado por Campillo (1999) hace una caracterización de los descriptores de nivel para el concepto de continuidad, allí se encuentran los descriptores que permiten ubicar a un alumno en alguno de los niveles 0, I, II y III; del modelo de van Hiele. En el nivel II, los estudiantes analizan las condiciones necesarias para definir la continuidad de una función en un punto, mientras que en el nivel III utilizan dichas condiciones para determinar si existe o no la continuidad de la función en dicho punto.

2. Marco teórico

Esta propuesta de investigación se enmarca en el modelo de van Hiele, puesto que a través de las fases de aprendizaje se brindan fundamentos que permiten fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje para la comprensión del concepto de continuidad local.

El modelo educativo de van Hiele.

A través de la historia han surgido diferentes autores que han realizado aportes para contribuir con el mejoramiento de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las Matemáticas; estos aportes se ven plasmados en modelos educativos que en muchas ocasiones se convierten en fundamentos teóricos y metodológicos en el campo de la Educación Matemática.

El modelo de Pierre Marie van Hiele y Dina van Hiele-Geldof representa un fundamento teórico y metodológico para la enseñanza de la Geometría, y en recientes investigaciones se ha extendido a conceptos del Análisis Matemático, Llorens (1994), Campillo (1999), de la Torre (2000), Jaramillo (2000), Esteban (2000), Navarro (2002), Vasco y Bedoya (2005), Londoño y Jurado (2005) y Zapata y Sucerquia (2009). Los anteriores trabajos resaltan la componente visual-geométrica de los conceptos estudiados.

El modelo educativo de van Hiele consta de tres partes, el *insight*, los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje. A continuación se hace una breve descripción de cada una de ellas.

El insight. Se define como comprensión y se obtiene cuando un estudiante actúa adecuadamente ante una nueva situación; se observa cuando se produce una acción fuerte que estabiliza una estructura desde la cual se da respuesta a nuevas preguntas (Van Hiele, 1986).

Niveles de Razonamiento. El segundo elemento son los niveles, donde se describen las características del alumno de acuerdo a sus procesos de razonamiento, aceptando la nomenclatura de Llorens (1994) se tiene el Nivel 0 (*Predescriptivo*) donde los estudiantes reconocen los elementos básicos de estudio para el concepto tratado, el Nivel I (*De reconocimiento visual*) donde se reconocen las propiedades de los elementos básicos de estudio y se establecen ciertas relaciones entre dichos elementos, el Nivel II (*De análisis*) donde los objetos son proposiciones que relacionan las propiedades, el Nivel III (*De clasificación y relación*) donde los estudiantes relacionan los elementos básicos de estudio y analizan sus propiedades llegando a dar definiciones verbales del concepto tratado y Nivel IV (*De deducción formal*) donde los objetos son las propiedades que analizan las ordenaciones, allí los estudiantes analizan el concepto en distintas situaciones y pueden llegar a hacer demostraciones formales (Van Hiele, 1957).

Las fases de aprendizaje. El tercer elemento son las fases de aprendizaje, éstas constituyen un esquema para organizar la enseñanza y están orientadas a favorecer el progreso desde un nivel de razonamiento al inmediatamente superior. En la Fase 1 (*Información*), el profesor interactúa con los estudiantes (en doble vía) conversando acerca de los objetos de estudio y dando alguna explicación de los tópicos a ser estudiados. La Fase 2 (*Orientación dirigida*), el profesor diseña cuidadosamente secuencias de actividades para la exploración de tópicos por parte de los estudiantes, los cuales comienzan a mirar qué dirección está tomando el estudio. La Fase 3 (*Explicitación*), los estudiantes construyen el concepto desde experiencias previas, refinando el uso de su vocabulario y expresando sus opiniones acerca de la estructura interna de estudio. La Fase 4 (*Orientación libre*), los estudiantes encuentran tareas que pueden ser completadas de diferentes maneras y dan sus propias soluciones, por último. Fase 5 (*Integración*), los objetos y relaciones son unificados e interiorizados dentro de un nuevo dominio de pensamiento, es decir, se da una consolidación de lo aprendido en las fases anteriores. (Van Hiele, 1957).

El modelo educativo de van Hiele tuvo sus raíces en la Geometría y fue en este campo del saber matemático donde se dieron las primeras investigaciones, entre las cuales se pueden mencionar: El proyecto Chicago: *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*, Oregón: *Assessing children is intellectual growth in geometry* y Brooklyn: *Geometry thinking among adolescents in inner city schools* (1982 – 1986), referenciados por Llorens (1994).

Sin embargo, en la actualidad el modelo se extiende a otros campos de las Matemáticas como es el Análisis Matemático, esto se puede evidenciar en investigaciones como: *Appropriateness of the van Hiele Model for describing student is cognitive processes on algebra task as typified by College Students Learning of functions* (1991), referenciada por Llorens (1994), Aplicación del modelo de van Hiele al concepto de aproximación local (Llorens, 1994), La noción de continuidad desde la óptica del modelo de van Hiele (Campillo, 1999), La modelización del espacio y el tiempo: Su estudio vía el modelo de van Hiele (de la Torre, 2000), La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de van Hiele (Jaramillo, 2000), Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el modelo de van Hiele (Esteban, 2000), Un estudio de la convergencia encuadrada en el modelo de van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica (Navarro, 2002),

Diseño de Módulos de instrucción para el concepto de aproximación local en el marco de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele (Vasco y Bedoya, 2005), Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía área de figuras planas (Londoño y Jurado, 2005), Módulo de aprendizaje para la comprensión de series de términos positivos (Zapata y Sucerquia, 2009).

3. Diseño metodológico

La investigación no se limita a dar pautas para el aprendizaje de un concepto, la intención fundamental es caracterizar como es el proceso de razonamiento en cuanto al concepto objeto de estudio a través de actividades apropiadas que permitan el progreso en el razonamiento, para lo cual se han trazado los siguientes objetivos.

Objetivo general. Caracterizar el proceso de razonamiento de los estudiantes en el paso del Nivel II al Nivel III en el marco del modelo educativo de van Hiele para el concepto de continuidad local.

Enfoque. Este estudio se enmarca en un paradigma cualitativo puesto que se exploró y analizó una situación contextualizada, se observó y estudió las características particulares de los estudiantes, los cuales fueron constructores de conocimiento, el diseño fue flexible, dado que los datos se obtenían de textos y observaciones y se presentó una codificación y categorización de la información (Hernandez, Fernandez & Baptista, 2006).

Diseño. El diseño empleado es el estudio de casos porque “el objetivo es la riqueza, profundidad y calidad de la información, no la cantidad ni la estandarización” (Hernandez, Fernandez & Baptista, 2006, p. 566).

Se emplea el estudio de casos, puesto que el trabajar con cada estudiante en forma individual, permite tener gran profundidad en la información recolectada, como lo plantea Yin (1984), un estudio de casos puede ser usado para dar respuestas a preguntas de cómo y porqué y en esta investigación el cómo es fundamental para poder caracterizar el proceso de razonamiento de los estudiantes frente al concepto de continuidad local (Yin, 1984).

Por lo tanto, la investigación se centra en casos particulares para describir como es el proceso de razonamiento de los estudiantes en el desarrollo del Módulo de Aprendizaje frente al concepto objeto de estudio.

Participantes. Estudiantes del grado once de una institución educativa pública del Municipio de Medellín, estos se caracterizan por pertenecer a una población de nivel socio económico medio – bajo ubicados en los estratos: 1, 2, 3 y 4. Gran parte de la población estudiantil pertenece a familias donde sus madres son cabeza de hogar y donde falta acompañamiento por parte de los padres.

Para la recolección de la información se utilizaron los siguientes instrumentos: Cuestionario, entrevistas, observaciones y un Módulo de Aprendizaje que fue diseñado con base en las fases de aprendizaje del modelo. Con la idea de progresar en el nivel de razonamiento el Módulo de Aprendizaje es una herramienta donde se emplean las fases del modelo, las cuales se convierten en fundamentos para la enseñanza, puesto que a través de éstas, el estudiante realizó una serie de actividades que le permiten avanzar en su nivel de razonamiento.

4. Análisis de la Información

La recolección y análisis de la información se realizó a través de las siguientes pautas:

- Inicialmente se seleccionó un grupo de estudiantes del grado once, a este grupo se le aplicó un cuestionario, el test del trabajo de investigación de Campillo (1999) para asegurar el nivel de partida de los estudiantes, es decir, conocer el nivel de razonamiento inicial en el que se encontraban los estudiantes.
- Se seleccionaron tres estudiantes que se encontraban en el nivel II para realizar una entrevista de carácter socrático.
- Posteriormente se procedió con la elaboración e implementación del Módulo de Aprendizaje para poder visualizar los procesos de razonamiento.
- Después de elaborar todas las actividades propuestas del Módulo de Aprendizaje, se procedió a aplicar nuevamente el test de Campillo para observar en que nivel de razonamiento se encontraban los estudiantes.
- Posteriormente se procedió con la recolección de la información para lo cual se tuvo en cuenta:
 - Las entrevistas de carácter socrático que permitieron refinar el Módulo de Aprendizaje.
 - Las producciones escritas de los estudiantes en el desarrollo de las actividades.
 - Los mapas conceptuales contruidos por los estudiantes.
 - Los cuestionarios, tanto el de Campillo como el construido en el Módulo de Aprendizaje.

Finalmente, se realizó una codificación y categorización de la información con el propósito de caracterizar el razonamiento de los estudiantes en su paso del Nivel II al III de razonamiento en el marco del modelo donde dicha categorización estuvo en correspondencia con los descriptores de fase contruidos.

5. Conclusiones

- Se pudo encontrar en el desarrollo de la propuesta que actividades adecuadamente diseñadas permiten que los estudiantes generen procesos de razonamientos para la comprensión de los conceptos matemáticos.
- Otros aspectos relevantes que se pueden concluir de la investigación son:
- Es posible caracterizar el razonamiento de los estudiantes en el paso del Nivel II al Nivel III de razonamiento en el marco del modelo.
- Los Módulos de Aprendizaje con actividades adecuadamente diseñadas en correspondencia con el nivel de razonamiento de los estudiantes permite la construcción de procesos de razonamiento en los mismos.
- Los mapas conceptuales permiten dar cuenta de la estructura mental y las redes de relaciones elaboradas por los estudiantes.

Referencias bibliográficas

- Báxter, E. (2003). El proceso de investigación en la metodología cualitativa, el enfoque participativo y la investigación-acción. Metodología de la investigación educativa: Desafíos y polémicas actuales. Felix Varela.
- Bombal, F. Las series de Fourier y el desarrollo del Análisis en el siglo XIX. Recuperado el 28 de octubre de 2009 de <http://www.ma2.us.es/seminarios/four.pdf>.
- Campillo, P. (1999). La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de van Hiele. Tesis de Doctorado no publicada. Universidad Politécnica de Valencia. España.
- De la Torre, A. (2000). La modelización del espacio y del tiempo: su estudio vía el modelo de van Hiele. Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España.
- Esteban, P. (2000). Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el modelo de van Hiele. Tesis doctoral no publicada, Universidad Politécnica de Valencia. Valencia, España.
- Hernandez R., Fernandez C., y Baptista P. (2006). Metodología de la investigación. México: McGraw-Hill.
- Jaramillo, C. (2000). La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de van Hiele. Tesis doctoral no publicada, Universidad Politécnica de Valencia. Valencia, España.
- Jaramillo, C., Sucerquia E. y Zapata S. (2008). Los módulos de instrucción como herramienta metodológica en el contexto del modelo de van Hiele. Universidad de Antioquia. Medellín-Colombia.
- Jurado, F. y Londoño, R. (2005). Diseño de una entrevista socrática para la
- Maestría no publicada. Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.
- Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. (1997). Cálculo y Geometría Analítica. Madrid: McGraw-Hill.

- Llorens, J. (1994). Aplicación del modelo de van Hiele al concepto de aproximación local. Tesis doctoral no publicada, Universidad Politécnica de Valencia. Valencia, España.
- Mapas Conceptuales. Recuperado el 16 de noviembre de 2009 de http://es.wikipedia.org/wiki/Mapa_conceptual
- Navarro, M. (2002). Un estudio de la convergencia encuadrada en el modelo educativo de van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica. Universidad de Sevilla. Sevilla, España.
- Pérez, P. y Campillo, P. (1998). La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de van Hiele. *Divulgaciones Matemáticas*. 6 (1), 69-80.
- Usiskin, Z. (1982). Van hiele levels and achievements in secondary school geometry. University of Chicago.
- Van Hiele P. (1986). *Structure and Insight, a theory of Mathematics Education*. New York: Academic Press Inc.
- Van Hiele, P. (1957). El problema de la comprensión. En conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la Geometría. Tesis doctoral no publicada, Universidad Real de Utrecht. Holanda.
- Vasco, E. y Bedoya, J. (2005). Diseño de Módulos de instrucción para el concepto de aproximación local en el marco de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele. Tesis de maestría no publicada, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.
- Yin, R. Capítulo III: Metodología de estudio de casos. Recuperado el 31 de octubre de 2009 de http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lad/cancela_c_em/capitulo3.pdf.
- Zapata, S. y Sucerquia, E. (2009). Módulo de Aprendizaje para la comprensión del concepto de series de términos positivos. Tesis de maestría no publicada, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

**Volver al índice
Mesas Temáticas**