http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p163

Da interpretação à conceituação: uma sequência didática baseada no uso de problemas envolvendo funções exponenciais e logarítmicas

Interpretation to the concept: a sequence based on the use of didactic problems involving exponential and logarithmic functions

Rodrigo Sychocki da Silva[1]

rodrigo.silva@caxias.ifrs.edu.br

Marcus Vinicius de Azevedo Basso[2]

mbasso@ufrgs.br

Resumo

Neste artigo, a intenção foi apresentar o desenvolvimento de uma pesquisa em nível de mestrado, envolvendo funções, funções exponenciais e logarítmicas, através do uso de situações problema em sala de aula. A proposta parte da hipótese que a investigação dos problemas cotidianos que são modelados, envolvendo o estudo dessas funções, proporciona aos alunos melhor compreensão dos conceitos e definições matemáticas envolvidos. A partir da teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e da teoria das Representações Semióticas de Duval, foram buscados os subsídios necessários para analisar as sequência didática proposta dos alunos e, com isso, justificar a escolha metodológica para aplicação das atividades.
Palavras-chave: Campos Conceituais. Exponencial. Funções. Logaritmos. Representações Semiótica.

Abstract

In this paper we present the development of a research master's degree level, involving functions, exponential and logarithmic functions through the use of problem situations in the classroom. The proposal on the hypothesis that the investigation of the everyday problems that are modeled involving the study of these functions, provides students with a better understanding of mathematical concepts and definitions involved. Nicer in theory Vergnaud's Conceptual Fields and Representation theory of semiotics Duval subsidies needed to analyze the sequence of proposed teaching students and thus justify our choice of methodology for implementation of activities.
Keywords: Conceptual Fields. Exponential. Functions. Logarithms. Semiotic Representations.

---

[1] Mestre em Ensino de Matemática (UFRGS) e doutorando em Informática na Educação (UFRGS). Professor do IFRS – Caxias do Sul.

[2] Doutor em Informática na Educação (UFRGS). Professor do Instituto de Matemática da UFRGS.

1. Introdução

Esse artigo consiste em apresentar o desenvolvimento de uma pesquisa em nível de mestrado, que ocorreu desde a elaboração do material didático, acompanhado de experimentação e análise dos dados obtidos no nível básico de ensino, com alunos do 1º ano do ensino médio do IFRS - Campus Caxias do Sul, durante o segundo semestre de 2011. A proposta consistiu em realizar uma investigação sobre a utilização do conceito de função no contexto da ciência, onde uma proposta metodológica foi elaborada na forma de sequência didática, que abordasse com os alunos as funções exponenciais e logarítmicas através das diversas aplicações no cotidiano.

Pela análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1999), aconteceu a considerável manifestação em propor aos professores que as sequências de atividades, envolvendo funções e dispostas nos livros didáticos, não fossem encaradas como a única forma do professor abordar esse conteúdo com os alunos, mas sim como uma sugestão que poderia ser complementada com outras desenvolvidas pelo professor, uma vez que as aplicações do assunto funções, em diversos contextos na ciência, são fundamentais.

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (PCN+, 2002, p. 44).

Com isso, observou-se a necessidade do professor buscar alternativas metodológicas para obter resultados mais eficientes no processo de aprendizagem dos alunos. Ao abordar na sala de aula problemas que motivam e são capazes de despertar a curiosidade do aluno, através de situações previamente modeladas matematicamente e que estão presentes no cotidiano, o professor torna a matemática uma ciência aplicada em contextos práticos, favorecendo o momento da aprendizagem.

Neste artigo, apresentamos uma abordagem envolvendo funções exponenciais e logarítmicas por meio de problemas encontrados em alguns contextos da ciência, onde a possibilidade dos alunos desenvolverem atividades em grupo, propiciou aos mesmos participar da construção dos conceitos matemáticos envolvidos. Neste caso, a matemática desenvolvida juntamente com os alunos e pelos alunos é uma grande fonte de conhecimento em sala de aula, uma vez que a formulação de hipóteses e argumentação são características essenciais do pensamento matemático, onde isso é um fator que influencia na qualidade da aprendizagem dos alunos.

2. O que há nas diretrizes?

Em PCN+ (2002, p.121), verifica-se que a proposta para o estudo das funções deve permitir ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações problema, tornando possível a construção dos modelos descritivos de alguns fenômenos, possibilitando várias conexões dentro e fora da própria matemática. O mesmo documento sugere que uma proposta de ensino desse conteúdo fosse iniciada diretamente pela noção de função, para descrever situações de dependência entre duas grandezas, permitindo o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas graficamente ou algebricamente.

Destaque para uma das ideias apresentadas nas diretrizes: os problemas envolvendo aplicação cotidiana não devem ser deixados de lado no início do estudo, a sugestão é que eles devem ser capazes de motivar e apresentar diversos contextos envolvendo funções para o aluno. A enumerável quantidade de situações envolvendo funções, permite que sejam incorporados ao ensino desse conteúdo exemplos do cotidiano e representações gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos envolvendo dependência entre grandezas.

A matemática desenvolvida na sala de aula da escola é importante fonte de conhecimento onde estão envolvidas inúmeras relações entre alunos e professor, alunos e alunos. No decorrer das atividades, o professor deve estar constantemente questionando-se quanto a relevância das propostas que são discutidas em sala de aula com os alunos. Será que isso é realmente necessário? Qual a utilidade desse assunto para a vida dos meus alunos? Como posso saber se meus alunos realmente se envolveram e se apropriaram desse conteúdo?

Os questionamentos propostos no parágrafo anterior são pertinentes ao se investigar novas possibilidades metodológicas em educação matemática, uma vez que conduzem o professor a pensar como e quais são os conteúdos abordados em sala de aula. Trata-se de uma possível redistribuição dos conteúdos para qualitativamente melhorar a abordagem de tópicos presentes na matemática do ensino médio.

De acordo com PCN+ (2002, p.120), esse questionamento previamente concebido pelo professor é válido, e pode esclarecer as possíveis falhas apresentadas pelos alunos na aprendizagem de determinado conteúdo. Um aspecto importante para destacar e que é observado nas diretrizes, é que todo o aprendizado envolvido perde o seu contexto se não se explicitasse aos alunos a sua importância, como por exemplo, os problemas que envolvem logaritmos estão presentes em questões tecnológicas e em outras ciências para expressar grandezas cujo intervalo de variação é exponencial. Portanto, sem a motivação adequada ao iniciar o conteúdo, torna-se difícil a compreensão do assunto pelos alunos.

3. A teoria cognitiva envolvida na pesquisa: Campos Conceituais e Representações Semióticas

A partir do momento em que o professor se dá conta de que a escola não deve ser apenas consumidora dos conhecimentos acadêmicos, mas uma produtora de saberes matemáticos, constrói-se a possibilidade de conceber o aluno como um ser matemático, que possui esquemas próprios que constituem a base essencial para a realização de suas atividades matemáticas.

Vergnaud (1982) propõe que o conhecimento está organizado em campos conceituais, cujo domínio ocorre ao longo de um período de tempo, através de experiência, maturidade e aprendizagem. O campo conceitual é um conjunto de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, interligados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de apropriação das ideias matemáticas.

O campo conceitual é definido também como sendo o conjunto de situações cuja apropriação requer, por sua vez, o domínio de vários conceitos, procedimentos e representações de naturezas distintas. Neste caso, os conceitos são definidos por três conjuntos: o primeiro é um conjunto de situações que constituem o *referente* do conceito, o segundo é um conjunto de invariantes operatórios que produzem o *significado* do conceito, e o terceiro é um conjunto de representações simbólicas que constituem o seu *significante*.

O conceito central na teoria dos campos conceituais é o de esquema, que aparece proposto em duas definições encontradas em Vergnaud (1996):

Definição 1: O esquema é uma organização invariante da atividade para uma classe de situações dadas.

Definição 2: O esquema é formado por quatro componentes:

1. Um objetivo, sub-objetivos e antecipações;
2. Regras de ação, tomada de informações e controle;
3. Invariantes operacionais;
4. Possibilidade de inferências em situações.

Os conceitos em ato são as atitudes que permitem ao sujeito selecionar as informações relevantes para a produção de uma solução de acordo com os seus objetivos. Os conceitos também permitem que o sujeito determine as propriedades e relações que o ajudarão na resolução de um problema, ou seja, o conceito em ato ainda pode ser considerado uma ação pertinente no contexto de um problema. A passagem a seguir explicita bem as noções envolvidas na segunda definição:

> Numa situação dada, o sujeito dispõe de muitos tipos de conhecimento para identificar os objetos e suas relações e a partir daí estabelecer objetivos e regras de conduta pertinentes. Os conhecimentos são conhecimentos em ato, designados aqui por "invariantes operatórios" para indicar que estes conhecimentos não são necessariamente explícitos, nem mesmo conscientes para certos entre eles. O conceito de invariante operatório permite falar nos mesmos termos às vezes da percepção, quer dizer da identificação dos objetos materiais e suas relações, da interpretação das informações perceptivas nas situações onde há espaço para a incerteza, e os pensamentos que portam os objetos altamente elaborados da cultura. (VERGNAUD, 1998, p. 10).

Os campos conceituais de Vergnaud foram essenciais nessa pesquisa, porque possibilitaram desenvolver atividades que envolvessem os alunos na criação de seus próprios esquemas que facilitassem a sua aprendizagem. Através da sequência didática desenvolvida ao longo de cinco dias, foi possível possibilitar o contato dos alunos com situações, problemas e contextos que envolvem a aplicação do conceito de funções, funções exponenciais e funções logarítmicas em situações do cotidiano.

Através de uma organização disposta em grupos, os alunos produziram coletivamente os seus registros e impressões sobre os procedimentos na resolução dos problemas, caracterizando a elaboração dos conceitos e teoremas em ação, propostos por Vergnaud. Nas atividades propostas, ocorreu a possibilidade dos alunos discutirem e elaborar a estratégia cognitiva que melhor se adaptasse a cada problema proposto, sendo que nesse momento ocorre também a possibilidade de socializar e compartilhar as ideias matemáticas presentes.

Ainda observa-se que o método proposto por Vergnaud nos campos conceituais, possibilitou o desenvolvimento de competências e habilidades em grande parte dos alunos, onde também foi possível reconhecer as dificuldades específicas de aprendizagem encontradas em alguns dos alunos durante o desenvolvimento das atividades.

A apresentação da função exponencial e da função logarítmica a partir de problemas envolvendo modelagem possibilitou que os alunos desenvolvessem estratégias e métodos para compreender a matemática envolvida em cada um dos problemas. Pode-se dizer que essas estratégias e métodos constituem a *semiósis* da situação e, ao realizar a conversão e fazer o tratamento das informações, ocorre o processo de *noésis* na apropriação dos conceitos matemáticos pelo sujeito.

Duval (2009) salienta que não deve-se confundir um objeto e sua respectiva representação, uma vez que realizando uma sequência de operações em mais de um sistema de representação, é implícito a compreensão de que nenhuma das representações consideradas é propriamente o objeto matemático, mas apenas um representante, um ente que está "no lugar dele" com a finalidade de permitir o acesso ao objeto matemático.

Em Duval (2003), o autor enfatiza que a originalidade da atividade matemática concentra-se na mobilização simultânea de, pelo menos, dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação. Logo, as atividades cognitivas envolvidas no ensino e na aprendizagem da matemática requerem regras de codificação próprias. Cada um dos registros desenvolvidos possui limitações representativas específicas, surgindo, portanto, a necessidade da utilização de outros sistemas de expressão e de representação, além da linguagem usual e de imagens como ferramenta para a verdadeira compreensão do conceito matemático.

Considerando a possibilidade de representar os objetos conceituais matemáticos, Duval (2009) propõe que a noção de tratamento e de conversão sejam operações cognitivas, diretamente envolvidas durante o processo de compreensão do conhecimento matemático, isto é, na construção dos conceitos. Para a aprendizagem de matemática, é importante destacar que a movimentação nos registros é o principal aspecto para a solução dos problemas cognitivos encontrados pelos professores durante a aula.

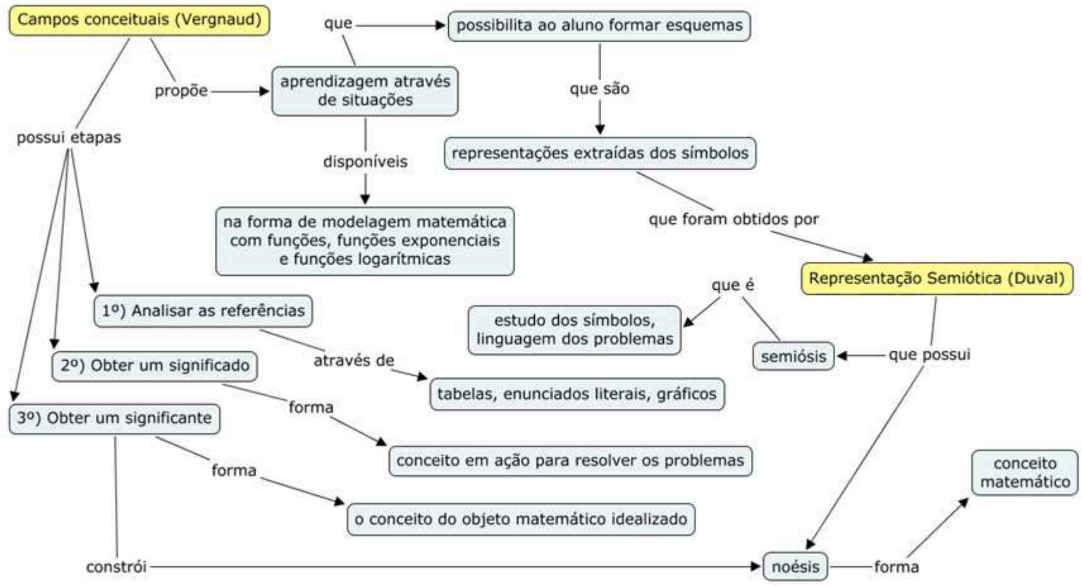
Os problemas propostos neste estudo durante a sequência didática, tinham como objetivo propiciar aos alunos a elaboração e manipulação de diferentes registros semióticos, envolvendo funções, funções exponenciais e logarítmicas, baseados em linguagem natural, algébrica e cartesiana, sendo possível que os alunos transitassem entre os registros criados e convertessem adequadamente as informações.

As representações semióticas surgiram em vários momentos durante a execução da sequência de atividades. Inicialmente os alunos deveriam manipular funções através de gráficos e tabelas, extraindo e manipulando as representações das situações apresentadas. A apresentação da função exponencial e da função logarítmica através de diferentes problemas, possibilitou que os alunos desenvolvessem estratégias e métodos para compreender a matemática envolvida em cada uma das situações. Essas estratégias e métodos constituem a *semiósis* da situação e, ao realizar a conversão e fazer o tratamento das informações, ocorre o processo de *noésis* na apropriação dos conceitos matemáticos.

Logo, a teoria das representações de Duval contribuiu nessa pesquisa para a apropriação dos conceitos matemáticos envolvidos nos problemas apresentados onde, ao se deparar com cada uma das situações propostas, os alunos produziram e manipularam diferentes registros semióticos. Ao propor a realização das atividades em grupos, ocorreu a possibilidade dos alunos desenvolverem os próprios registros de representação para a matemática envolvida de forma coletiva, possibilitando que a escolha do registro mais satisfatório para a aprendizagem ocorresse através da discussão realizada internamente com o grupo de trabalho.

Escolher o registro semiótico mais adequado para aplicar os tratamentos implica, primeiramente, no desenvolvimento do raciocínio, consequentemente, leva a resolução correta dos problemas matemáticos, e finalmente conduz à aprendizagem. Resumidamente, podemos mostrar através do mapa conceitual da figura 1 as relações entre as teorias cognitivas presentes nessa pesquisa, bem como destacar as principais características.

Figura 1 – Mapa conceitual com os aspectos de teoria cognitivista da pesquisa.



4. Aspectos metodológicos

Flick (2006) apresenta uma definição inicial sobre o que é pesquisa qualitativa:

> A pesquisa qualitativa é uma atividade situada que posiciona o observador no mundo. Ela consiste em um conjunto de práticas interpretativas e materiais que tornam o mundo visível. Essas práticas transformam o mundo, fazendo dele uma série de representações, incluindo notas de campo, entrevistas, conversas, fotografias, gravações e anotações pessoais. Nesse nível, a pesquisa qualitativa envolve a postura interpretativa e naturalística do mundo. Isso significa que os pesquisadores desse campo estudam as coisas em seus contextos naturais, tentando entender ou interpretar os fenômenos em termos dos sentidos que as pessoas lhes atribuem. (FLICK, 2006, p. 16).

Entende-se que uma pesquisa qualitativa propõe a adoção de uma postura adequada do professor pesquisador diante dos alunos na sala de aula. Na busca pela compreensão sobre o entendimento do assunto funções, em especial as funções exponencial e logarítmica, as observações sobre como os alunos reagem diante das situações propostas e os métodos pedagógicos utilizados em aula pelo professor pesquisador constituem importantes recursos durante o momento da aplicação das atividades propostas e futura análise dos dados coletados.

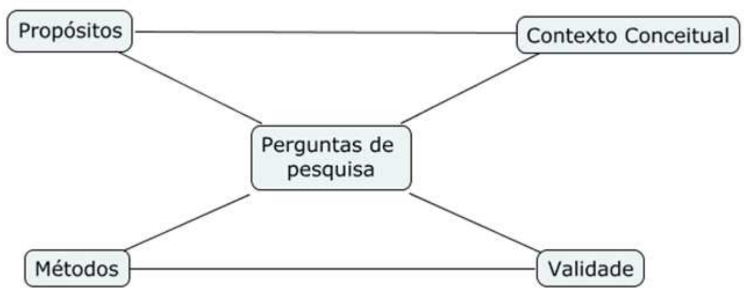
Um desenho de pesquisa, elaborado adequadamente na pesquisa, é o principal instrumento para planejar o estudo e garantir a qualidade dos seus resultados. Ragin (1994) define a expressão "desenho de pesquisa" da seguinte forma:

> O desenho de pesquisa é um plano para coletar e analisar as evidências que possibilitarão ao investigador responder a quaisquer perguntas que tenha feito. O desenho de uma investigação toca em quase todos os aspectos de uma pesquisa, desde os detalhes minuciosos da coleta de dados até a seleção de técnicas de análise de dados. (RAGIN, 1994, p. 191).

Durante a execução desse trabalho, percebeu-se que o desenho da pesquisa ocorreu durante todas as etapas no projeto de investigação. Em todas as etapas, a presença de vários componentes que estão envolvidos e possuem relações mútuas entre eles e que ocorrem durante o trabalho foram consideradas, onde cada um desempenha um papel importante e único durante a execução do projeto.

Maxwell (2005, p. 5) apresenta, por meio de um esquema, conforme mostra a figura 2, os componentes envolvidos na execução de um projeto e, além disso, propõe que o conceito de desenho da pesquisa utilizado pelo pesquisador considere diferentes abordagens, evitando, assim, a rigidez no entendimento do que venha ser uma pesquisa qualitativa durante as etapas envolvidas.

Figura 2 – Modelo interativo de desenho da pesquisa proposto por Maxwell (2005).



Na presente pesquisa, notou-se a importância do esquema, mostrado anteriormente, no que diz respeito à construção e elaboração das atividades para serem utilizadas com os alunos. A interatividade proposta por Maxwell (2005) sugere que o professor pesquisador, em suas atividades na sala de aula, deve estar constantemente desenvolvendo métodos para validar os questionamentos criados durante o momento de aprendizagem dos seus alunos.

Quanto à metodologia de trabalho adotada na realização das atividades em sala de aula, foi utilizada a engenharia didática proposta por Artigue (1996). Nesse tipo de proposta, o ambiente de investigação é a sala de aula. O professor e a sua sala de aula constituem peças importantes para o desenvolvimento de uma pesquisa, sendo aqui reafirmado o papel do professor em ser professor pesquisador durante o processo.

Artigue (1996, p. 193) apresenta as etapas da engenharia didática. São elas:

1º) análise prévia da situação;

2º) construção das situações didáticas da engenharia;

3º) experimentação;

4º) análise e avaliação dos resultados obtidos na fase anterior.

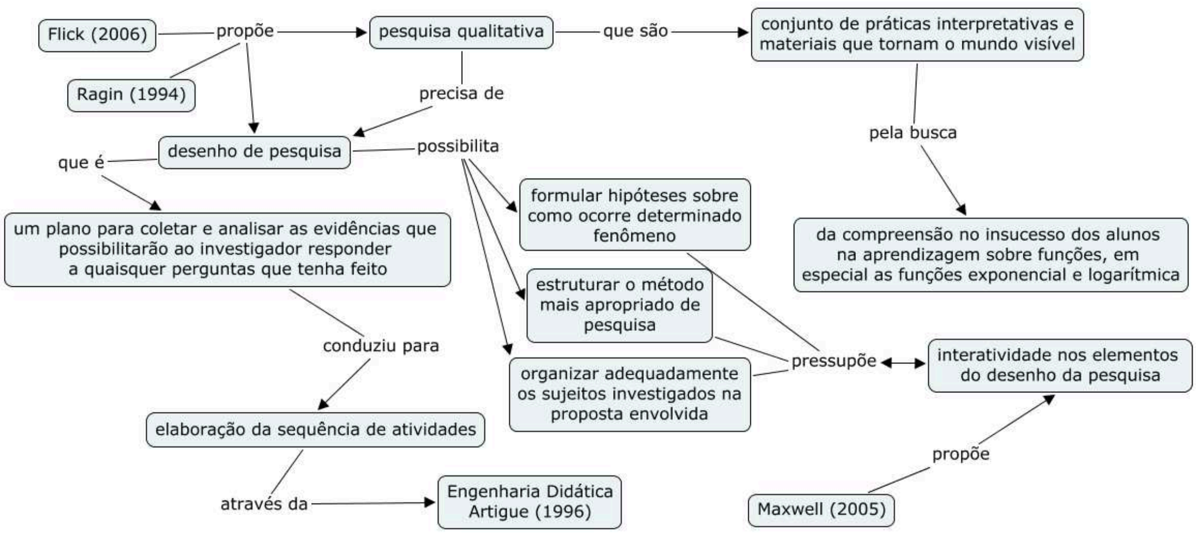
A análise prévia da situação possui um caráter importante dentro da pesquisa qualitativa, pois é a partir dela que o professor pesquisador identifica as características que tornam o ensino de determinado assunto insatisfatório, no que diz respeito à aprendizagem dos alunos. Nessa etapa, além da percepção epistemológica que envolve o conteúdo, o professor percebe o confronto entre as formas de ensino geralmente utilizadas e as concepções, dificuldades e obstáculos na trajetória de aprendizagem dos alunos. Dessa forma, Almouloud e Coutinho (2008, p. 67) destacam aspectos importantes que devem ser observados pelo professor pesquisador ao elaborar as situações didáticas:

- Analisar a importância das situações para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomada de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem;
- Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

Após a construção das atividades, pode-se caracterizar a fase da experimentação como o momento de se colocar em prática toda a sequência de atividades elaboradas, tendo em vista a reformulação quando as análises locais durante a aplicação identificam essa necessidade, o que provoca voltar à análise prévia, realizando as devidas complementações. A análise posterior fundamenta-se no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação, que podem ser observações realizadas durante a aula ou as produções dos alunos durante as atividades.

Portanto, considerando a possibilidade da pesquisa ser de caráter qualitativo, organizada a partir de um desenho de pesquisa e elaborada por meio da engenharia didática, através de um mapa conceitual, conforme mostra a figura 3, pode-se organizar a metodologia de pesquisa utilizada nesse trabalho a fim de proporcionar ao leitor uma visão global da justificativa dessa escolha metodológica na proposta de ensino elaborada.

Figura 3 – Mapa conceitual sobre os aspectos metodológicos.



5. O encaminhamento da proposta

O conjunto elaborado de atividades, foi aplicado em uma turma de alunos da 1º série do ensino médio, integrado em plásticos[3] do Instituto Federal do Rio Grande do Sul – Campus Caxias do Sul. No início das atividades propostas, alguns alunos apresentavam dificuldades envolvendo as operações com os números representados na forma decimal e fracionária, sendo que desconheciam a relação existente entre números decimais e sua representação na forma fracionária. Com o objetivo de evitar futuras dificuldades nas atividades envolvendo

[3] Modalidade de ensino na qual o aluno cursa o ensino médio tradicional, juntamente com o curso técnico. Disponível em: http://www.caxias.ifrs.edu.br/site/conteudo.php?cat=11&sub=101. Acesso em 30/08/2011.

funções exponenciais e logarítmicas, alguns conteúdos do ensino fundamental foram relembrados, tais como operações entre números e regras de potência.

Ainda é importante destacar que uma exposição do conceito de função, como relação entre grandezas através de contextos práticos em situações e problemas que envolvam a análise de tabelas e interpretação de gráficos cartesianos, procura evitar o estudo de fórmulas prontas, que não possuem sentido durante o processo de aprendizagem.

Durante essa pesquisa, ressaltou-se para os alunos que seria feito um estudo da função exponencial e da função logarítmica, ambas do ponto de vista em aplicações na ciência. No decorrer da sequência de atividades, os alunos perceberam, através dos problemas apresentados envolvendo funções exponenciais e logarítmicas, que elas são de grande importância para a compreensão de fenômenos do cotidiano. Até aquele momento, no contexto escolar da turma investigada, a exploração de problemas feita pelos alunos, sob a orientação do professor, ainda não havia sido realizada.

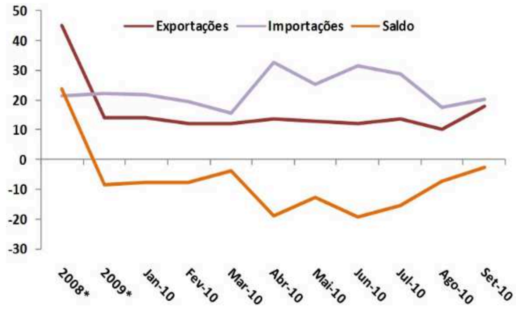
A organização das atividades durante a sequência didática seguiu as seguintes etapas:

- ***Dia 1 – Conceitos iniciais sobre funções através de problemas***

As atividades deste dia foram constituídas por problemas envolvendo a relação entre grandezas, através de tabelas numéricas e representações gráficas. Foram, ao todo, sete problemas, dos quais os quatro primeiros expressavam funções dadas através de tabelas numéricas, e os demais envolviam atividades de interpretação sobre gráficos extraídos de páginas da internet. Os gráficos apresentavam aos estudantes situações atuais e encontradas no cotidiano, demonstrando para eles a importância do estudo desse assunto, conforme apresenta o exemplo da Figura 4.

Figura 4 – Exemplo de problema envolvendo gráfico de função.

<u>Problema 7:</u> A representação gráfica a seguir apresenta a análise da balança comercial de lácteos do Brasil no ano de 2010.



*Média mensal

Fonte: Aliceweb/MDIC

Figura 1. Balança comercial de lácteos brasileira, em US$ milhões.

Fonte: http://www.cigeneticabovina.com.br/index.php?ref=04&id=1754.

Com base nas observações feitas no gráfico acima, pergunta-se:

i) Em algum momento as importações e as exportações foram em quantidades iguais? Justifique a sua resposta.

ii) Qual dos três gráficos apresenta maior período de estabilidade entre Janeiro (2010) e Julho (2010)? Justifique a sua resposta.

iii) No período de Agosto (2010) a Setembro (2010) qual possuiu maior crescimento: exportação ou importação? Justifique a sua resposta.

iv) Entre Março (2010) e Agosto (2010) houve um crescimento ou decrescimento nas importações de lácteos? Justifique a sua resposta.

• *Dias 2 e 3 – Função exponencial e Função logarítmica (respectivamente)*

Inicialmente, destacou-se para os alunos que a função exponencial é utilizada na modelagem de algumas formas de crescimento ou decrescimento presentes em alguns fenômenos da natureza, como também no funcionamento dos juros compostos, importantes na matemática financeira. Também foi destacado que a função logarítmica é amplamente utilizada para a modelagem de inúmeros fenômenos da natureza, tais como: calcular a intensidade de terremotos, a altura de determinadas plantas, o pH de soluções químicas, entre outras.

Percebeu-se, nesses dois encontros, o grande interesse por parte dos alunos envolvidos com as atividades propostas, uma vez que eles reconheceram a importância da abordagem desses assuntos na escola. A apresentação dessas funções, por meio de problemas, é essencial para que o aluno perceba a importância delas em diversas situações cotidianas.

Através de situações problema, durante os dois primeiros dias de atividades, os alunos foram orientados pelo professor pesquisador durante a elaboração das soluções para cada um dos problemas. A modelagem matemática envolvendo função exponencial e logarítmica foi apresentada através de tabelas numéricas, onde os alunos deveriam interpretar os fenômenos e deduzir a lei de formação de cada problema, com a orientação do professor, se necessário.

Figura 5 – Exemplo de problema envolvendo função exponencial.

Problema 1: Devido às doenças ocorridas em uma pequena cidade, serão utilizadas duas funções $f(t)$ e $g(t)$ para modelar o crescimento populacional dos ratos e das pessoas respectivamente, em um período entre 0 e 5 anos. Inicialmente, há 50000 ratos e 10000 pessoas. O pesquisador verificou que a cada ano que passa, a população de ratos *dobra* de tamanho e a as pessoas *triplica*. Vamos construir uma tabela para representar essa situação (pode deixar as potências indicadas):

Tempo(anos)	Nº de ratos
0	50000
1	
2	
3	
4	
5	

Tempo(anos)	Nº de pessoas
0	10000
1	
2	
3	
4	
5	

Vamos generalizar a ideia? Para uma quantidade de tempo qualquer, qual a função que representa o número de ratos e qual a função que representa o número de pessoas dessa cidade? Quando o número de pessoas supera o número de ratos? Justifique a sua resposta.

Figura 6 – Exemplo de problema envolvendo função logarítmica.

Problema 2: Leia o texto: "**pH** é o símbolo para a grandeza físico-química **potencial hidrogeniônico**, que indica a acidez, neutralidade ou alcalinidade de uma solução aquosa. O termo **pH** foi introduzido, em 1909, pelo bioquímico dinamarquês Soren Peter Lauritz Sorensen (1868-1939) com o objetivo de facilitar seus trabalhos no controle de qualidade de cervejas. O "p" vem do alemão potenz, que significa poder de concentração, e o "H" é para o íon de hidrogênio (H^+)."
Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki

O cálculo matemático para determinar o pH de um solução aquosa é dado pela relação $P(H^+) = -\log_{10}(H^+)$ onde H^+ representa a quantidade de íons de Hidrogênio na solução. A definição inicial de solução ácida, básica e neutra é: para $pH = 7$ temos uma solução neutra, $pH > 7$ tem-se a solução básica e para $pH < 7$ tem-se a solução ácida. A faixa de valores é $0 \le pH \le 14$ Entretanto, hoje é de conhecimento científico que há soluções com pH fora dessa faixa.

Fonte: http://solucoesqm.blogspot.com/

Um químico, em seu trabalho cotidiano de laboratório precisa calcular o pH de quatro soluções que estão dispostas na figura acima. Antes de efetuar os cálculos, ele obteve as quantidades dos íons de Hidrogênio das soluções:

Cor da solução	Concentração
Azul	$H^+ = 10^{-8}$
Rosa	$H^+ = 10^{-4}$
Verde	$H^+ = 10^{-7}$
Laranja	$H^+ = 10^{-12}$

a) Classifique cada uma das soluções da tabela acima em ácida, básica ou neutra, efetuando alguns cálculos.
b) Pelas regras de potência, qual das substâncias na tabela acima possui a maior concentração hidrogeniônica? E a menor concentração? Justifique a sua resposta.

• *Dia 4 – Atividades no laboratório de informática*

O contato com a tecnologia informática é essencial para os alunos se apropriarem de determinados conteúdos na escola, e o responsável por esse contato durante a permanência dos estudantes na escola é o professor. Nos três primeiros dias de atividades, os alunos não haviam elaborado ainda a construção dos gráficos das funções exponenciais e logarítmicas.

Durante o quarto dia de atividades, com o uso do software *Winplot*[4], eles foram conduzidos para atividades que envolviam a construção e interpretação dos gráficos dessas funções. Os estudantes fizeram as construções dos gráficos e, com isso, foi possível que eles realizassem

[4] Software livre, disponível em: http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html

uma análise envolvendo as propriedades dessas funções, tais como: domínio, imagem, crescimento/decrescimento e concavidade.

- ***Dia 5 – Atividade avaliativa***

No último dia de atividades, os alunos participaram de uma avaliação diagnóstica onde o objetivo consistia em abordar com eles novos problemas de modelagem, envolvendo os conteúdos trabalhados na sequência didática até então. Os questionamentos foram propostos com a finalidade de verificar se os alunos conseguiam interpretar as situações problema apresentadas, utilizando a teoria de funções exponenciais e logarítmicas.

Figura 7 – Exemplo de atividade na avaliação final.

2) Um biólogo está estudando uma colônia de bactérias que está se desenvolvendo nos alimentos de uma cidade da América do Sul. A cada hora que passa, ele anota o número de indivíduos presentes em um pedaço de alimento. Os dados estão na tabela abaixo.

Tempo	Nº de indivíduos
1	300
2	90000
3	27000000
4	8100000000
t	$N(t) = ?$

Obtenha uma expressão para a função $N(t)$.

Quem é a variável independente dessa função? E a variável independente?

6. Análise dos resultados obtidos

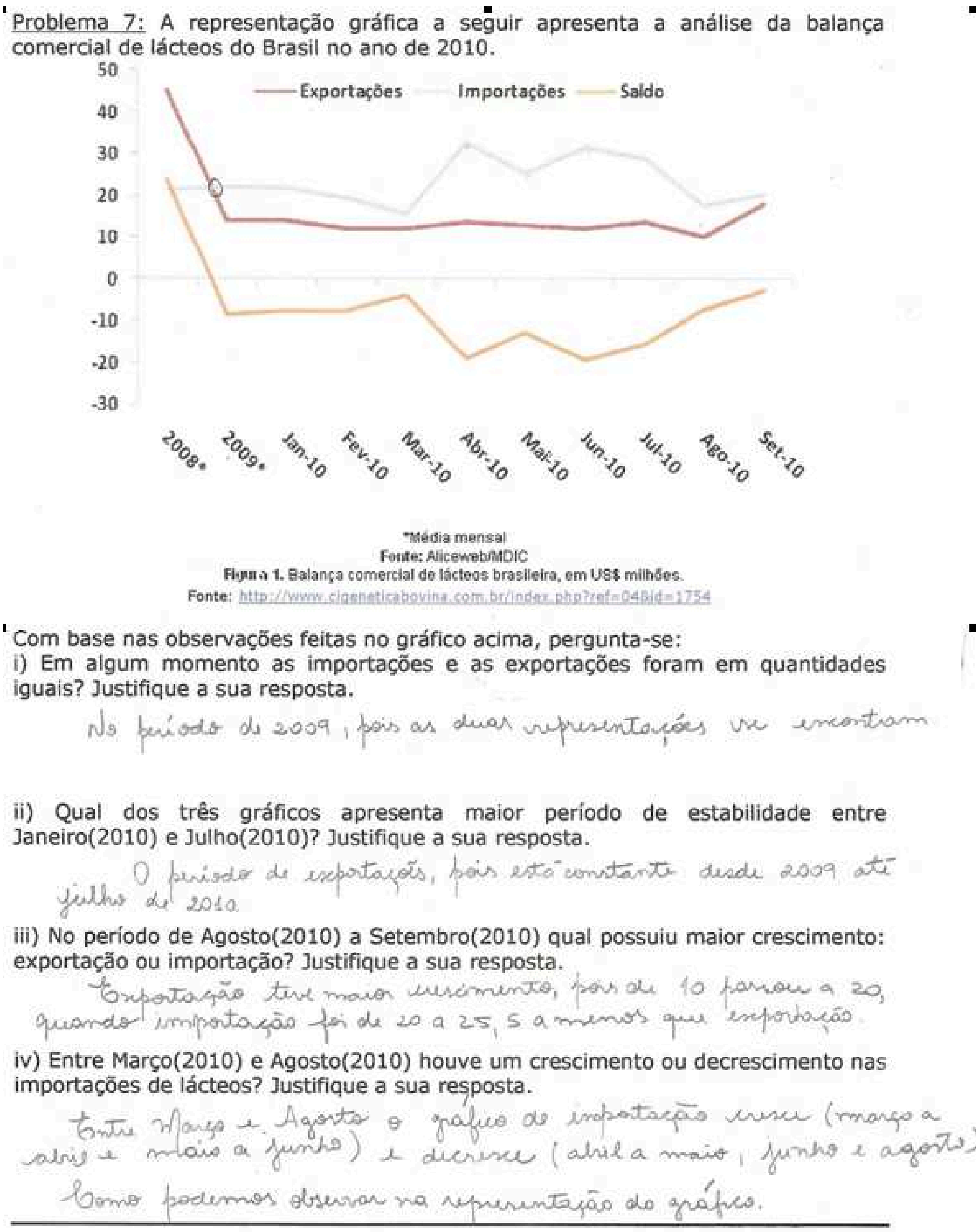
Nesta seção vamos apresentar um pouco da produção dos alunos durante a execução da sequência didática. Com base no referencial teórico utilizado para fundamentar a pesquisa, faremos uma análise sobre as resoluções produzidas pelos grupos de alunos.

Para o problema envolvendo a análise gráfica de uma situação, o grupo X, assim denotado, sentiu a necessidade de apresentar um exemplo numérico extraído por observação nas informações dispostas no gráfico, conforme a resposta apresentada no item (iii) na figura 8.

Isso mostra que, para ocorrer a confirmação das hipóteses formuladas pelo grupo, se fez necessário a utilização de uma representação expressa através de um cálculo para justificar o raciocínio, em vez de observar a inclinação dos segmentos de reta para cada situação.

A elaboração e manipulação desses esquemas cognitivos não podem ser consideradas tarefas triviais, pois se deve extrair de uma representação gráfica os elementos necessários para elaborar a justificativa no argumento proposto pelos alunos. Neste caso, a conversão e manipulação dos diferentes registros de representação semiótica possibilitam aos alunos uma tomada de decisão na escolha de qual registro é mais bem compreendido para o problema.

Figura 8 – Resolução proposta por um grupo X para um problema envolvendo gráfico.


Problema 7: A representação gráfica a seguir apresenta a análise da balança comercial de lácteos do Brasil no ano de 2010.

*Média mensal
Fonte: Aliceweb/MDIC
Figura 1. Balança comercial de lácteos brasileira, em US$ milhões.
Fonte: http://www.cigeneticabovina.com.br/index.php?ref=04&id=1754

Com base nas observações feitas no gráfico acima, pergunta-se:

i) Em algum momento as importações e as exportações foram em quantidades iguais? Justifique a sua resposta.

No período de 2009, pois as duas representações se encontram

ii) Qual dos três gráficos apresenta maior período de estabilidade entre Janeiro(2010) e Julho(2010)? Justifique a sua resposta.

O período de exportações, pois está constante desde 2009 até julho de 2010

iii) No período de Agosto(2010) a Setembro(2010) qual possuiu maior crescimento: exportação ou importação? Justifique a sua resposta.

Exportação teve maior crescimento, pois de 10 passou a 20, quando importação foi de 20 a 25, 5 a menos que exportação.

iv) Entre Março(2010) e Agosto(2010) houve um crescimento ou decrescimento nas importações de lácteos? Justifique a sua resposta.

Entre Março e Agosto o gráfico de importação cresce (março a abril e maio a junho) e decresce (abril a maio, junho e agosto). Como podemos observar na representação do gráfico.

Para a situação problema envolvendo crescimento populacional, é destacada a resolução proposta pelo grupo Y, na qual se verifica que após o grupo completar a tabela proposta na questão, e ter êxito em obter cada uma das funções, a justificativa dada pelos alunos contempla um raciocínio que envolve a base que está na função exponencial. O argumento dado por esse grupo é que pelo fato de uma população "triplicar" e a outra "dobrar", existe um momento onde é "natural" que uma ultrapasse a outra em quantidade de indivíduos, apesar de no início a que triplica estar em desvantagem. A noção conceitual envolvida para este tipo de argumento é muito ampla e exige que o aluno manipule esquemas com representações semióticas menos elementares para chegar a essa conclusão.

Figura 9 – Resolução do grupo Y para o problema do crescimento populacional.

<u>*Problema 1:*</u> Devido às doenças ocorridas em uma pequena cidade, serão utilizadas duas funções $f(t)$ e $g(t)$ para modelar o crescimento populacional dos ratos e das pessoas respectivamente, em um período entre 0 e 5 anos. Inicialmente, há 50000 ratos e 10000 pessoas. O pesquisador verificou que a cada ano que passa, a população de ratos *dobra* de tamanho e a as pessoas *triplica*. Vamos construir uma tabela para representar essa situação (pode deixar as potências indicadas):

Tempo(anos)	Nº de ratos
0	50000
1	100.000
2	200.000
3	400.000
4	800.000
5	1600.000

Tempo(anos)	Nº de pessoas
0	10000
1	30.000
2	90.000
3	270.000
4	810.000
5	2430.000

Vamos generalizar a ideia? Para uma quantidade de tempo qualquer, qual é a função que representa o número de ratos e qual a função que representa o número de pessoas dessa cidade? Quando o número de pessoas supera o número de ratos? Justifique a sua resposta.

$f(t) = 2^x . 50.000 =$ $\qquad g(t) = 3^x . 10000 =$

O nº de pessoas supera o nº de ratos no 4º ano, pois triplica a cada ano, enquanto o nº de ratos duplica.

Durante as atividades que envolviam função logarítmica, observa-se que o conteúdo que envolvia as situações-problema despertou o interesse dos estudantes, pois eles não consideravam a possibilidade do logaritmo ser aplicado em diversas situações da vida cotidiana. Essa motivação foi um dos combustíveis para que os alunos percebessem a importância do estudo dos logaritmos na escola.

Por isso, ressalta-se o problema envolvendo o pH (potencial hidrogeniônico) de substâncias químicas, considerado pela turma o mais interessante, no dia dessas atividades, pois como os alunos são do curso médio integrado ao técnico de plásticos, a disciplina de química é uma das disciplinas mais importantes do currículo.

A curiosidade dos alunos, evidenciada pela situação apresentada nesse problema, fez com que a turma conversasse com a professora de química, esclarecendo suas curiosidades sobre esse assunto. No currículo da escola, o assunto pH é abordado com os alunos no segundo ano do ensino médio. Na resolução desse problema, verificou-se que a apresentação de um texto informativo inicial possibilitou aos alunos conhecer um pouco sobre a origem do termo pH, usado em cálculos químicos.

Por isso, este trabalho evidencia as principais características na resolução proposta por um dos grupos. Quando o grupo Z identificou a necessidade de uma relação matemática para o cálculo de pH, iniciou os cálculos para descobrir quanto valia o pH de cada substância proposta. Para cada uma das substâncias dadas o grupo Z, ressaltam-se as notações $P(10^{-4})$, $P(10^{-7})$, $P(10^{-12})$ e $P(10^{-8})$. Observa-se, nessa ação, que o grupo associa de forma correta a noção de variável independente da função, possibilitando o cálculo do valor do pH de cada solução.

A ocorrência de teoremas em ação, decorrentes da construção de esquemas prévios, é frequente na resolução proposta pelo grupo Z, pois são utilizadas a definição e as propriedades dos logaritmos na resolução dos cálculos. Após obter valores de pH para cada substância, o grupo Z soube classificá-las de acordo com a definição do ponto de vista da química. Para realizar a classificação das substâncias, percebe-se que já estava constituído o conceito de ordenação pelos alunos, pois eles deveriam classificar as substâncias observando as desigualdades > (maior) e < (menor).

Cabe destacar, ainda, a necessidade do grupo Z em mudar o esquema conceitual envolvido no cálculo do logaritmo. Quando o cálculo exigiu que os alunos soubessem o valor de $\log_{10}(10)$, eles recorreram para a equação exponencial $10^x = 10$, obtendo $x = 1$ para a resposta. Isso mostra a fluência entre os esquemas e as representações decorrentes desenvolvidas pelos alunos perante o problema, onde eles recorreram para outras formas de registro, com o objetivo de obter uma solução para o cálculo de logaritmo.

Quanto ao item (b) do mesmo problema, ao representar os números 10^{-12} e 10^{-4} na sua forma decimal, utilizando a transição entre registros de representações semióticas distintos, o grupo Z procurou desenvolver uma forma para poder comparar essas duas quantidades. Ao transformar $10^{-12} = \left(\frac{1}{10}\right)^{12} = 0{,}1^{12} = 0{,}000000000001$, a cada sinal de igual observa-se a mudança na forma de representação semiótica para a quantidade 10^{-12}. Os alunos realizaram essas mudanças com o objetivo de visualizar qual o melhor critério de comparação entre as quantidades envolvidas que eles poderiam utilizar. Quando eles representaram na forma decimal, cada uma das quantidades puderam comparar satisfatoriamente os dois valores entre si e deduzir uma conclusão.

Figura 10 – Resolução do grupo Z para o problema envolvendo o pH.

Problema 2: Leia o texto: "**pH** é o símbolo para a grandeza físico-química **potencial hidrogeniônico**, que indica a acidez, neutralidade ou alcalinidade de uma solução aquosa. O termo **pH** foi introduzido, em 1909, pelo bioquímico dinamarquês Soren Peter Lauritz Sorensen (1868-1939) com o objetivo de facilitar seus trabalhos no controle de qualidade de cervejas. O "p" vem do alemão potenz, que significa poder de concentração, e o "H" é para o íon de hidrogênio (H^+)."

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki

O cálculo matemático para determinar o pH de um solução aquosa é dado pela relação $P(H^+) = -\log_{10}(H^+)$ onde H^+ representa a quantidade de íons de Hidrogênio na solução. A definição inicial de solução ácida, básica e neutra é: para $pH = 7$ temos uma solução neutra, $pH > 7$ tem-se a solução básica e para $pH < 7$ tem-se a solução ácida. A faixa de valores é $0 \le pH \le 14$ Entretanto, hoje é de conhecimento científico que há soluções com pH fora dessa faixa.

$P(10^{-4}) = -\log_{10} 10^{-4}$
$P(10^{-4}) = (-4) . -\log 10$
$P(10^{-4}) = (-4) . (-1)$
$P(10^{-4}) = 4$
Rosa é ácido.

Fonte: http://solucoesqm.blogspot.com/

$P(10^{-7}) = -\log_{10} 10^{-7}$
$P(10^{-7}) = (-7) . -\log 10$
$P(10^{-7}) = (-7) . (-1)$
$P(10^{-7}) = 7$
Verde é neutro

Um químico, em seu trabalho cotidiano de laboratório precisa calcular o pH de quatro soluções que estão dispostas na figura acima. Antes de efetuar os cálculos, ele obteve as quantidades dos íons de Hidrogênio das soluções:

$P(10^{-12}) = -\log_{10} 10^{-12}$
$P(10^{-12}) = (-12) . -\log 10$
$P(10^{-12}) = (-12) . (-1)$
$P(10^{-12}) = 12$
Laranja é básico

Cor da solução	Concentração
Azul	$H^+ = 10^{-8}$
Rosa	$H^+ = 10^{-4}$
Verde	$H^+ = 10^{-7}$
Laranja	$H^+ = 10^{-12}$

a) Classifique cada uma das soluções da tabela acima em ácida, básica ou neutra, efetuando alguns cálculos.

$P(H^+) = -\log_{10}(H^+)$
$P(10^{-8}) = -\log_{10}(10^{-8})$
$P(10^{-8}) = (-8) . -\log 10$
$P(10^{-8}) = (-8) . (-1)$
$P(10^{-8}) = 8$

$10^x = 10$
$x = 1$

Azul é básica

b) Pelas regras de potência, qual das substâncias na tabela acima possui a maior concentração hidrogeniônica? E a menor concentração? Justifique a sua resposta.

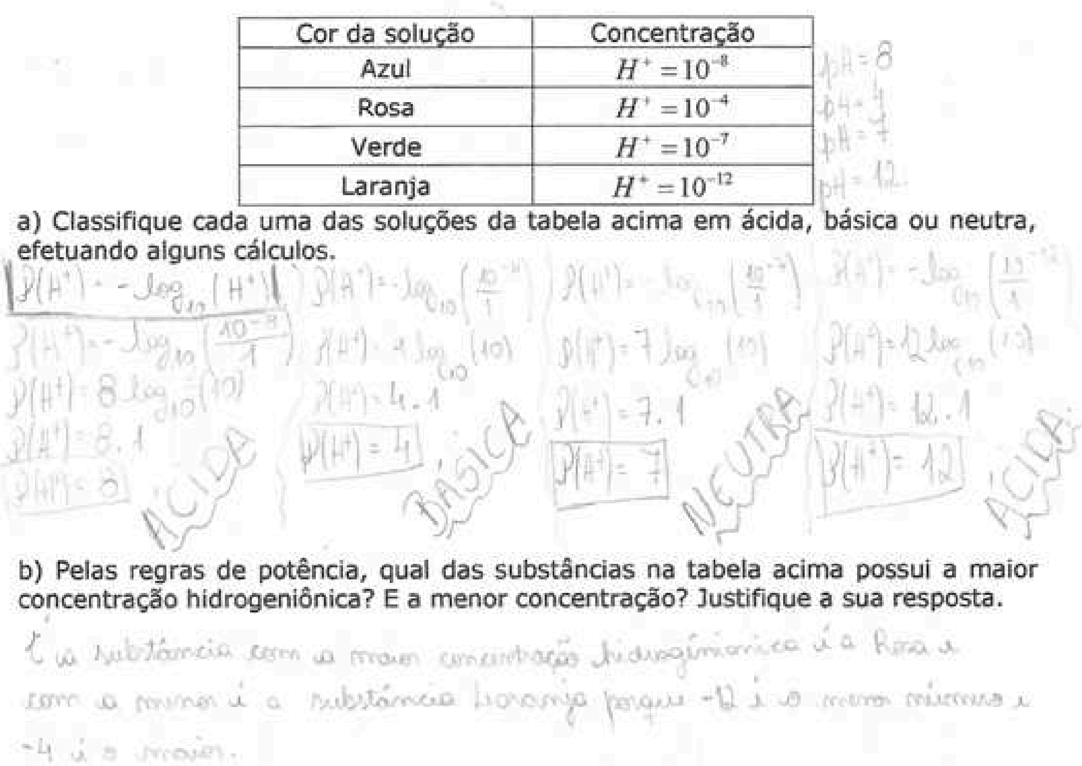
$10^{-12} = \left(\frac{1}{10}\right)^{12} = 0{,}1^{12} = 0{,}000000000001 \rightarrow$ Menor
Pois tem menos íons de H^+

$10^{-4} = \left(\frac{1}{10}\right)^{4} = 0{,}1^{4} = 0{,}0001 \rightarrow$ Maior
Pois tem mais íons de H^+.

Diferentemente do grupo apresentado anteriormente, a resolução apresentada pelo grupo T para o problema do pH envolve a observação de outras características. Nota-se que os alunos não recorreram para outra forma de esquema conceitual para o cálculo de $\log_{10}(10)$, uma vez que eles já haviam aprendido como obter o valor desse tipo de logaritmo, escrito em base 10, em aulas anteriores à sequência didática.

Para a resolução do item (b), o grupo T estabelece uma comparação entre expoentes, sendo considerada desnecessária a comparação entre as quantidades através de outras formas de representação. Isso demonstra a capacidade desses alunos em deduzir uma conclusão, não utilizando a conversão entre diferentes registros de representações semióticas como o grupo Z havia proposto. Os professores devem notar que esse fenômeno é comum em sala de aula, pois cada aluno desenvolve a quantidade de registros das representações semióticas que considerar mais adequada para efetuar as conversões entre os esquemas construídos, tornando eficaz a sua apropriação dos conceitos.

Figura 11 – Resolução do grupo T para o problema do pH.



Cor da solução	Concentração	
Azul	$H^+ = 10^{-8}$	pH = 8
Rosa	$H^+ = 10^{-4}$	pH = 4
Verde	$H^+ = 10^{-7}$	pH = 7
Laranja	$H^+ = 10^{-12}$	pH = 12

a) Classifique cada uma das soluções da tabela acima em ácida, básica ou neutra, efetuando alguns cálculos.

$p(H^+) = -\log_{10}(H^+)$

$p(H^+) = -\log_{10}\left(\frac{10^{-8}}{1}\right)$ | $p(H^+) = -\log_{10}\left(\frac{10^{-4}}{1}\right)$ | $p(H^+) = -\log_{10}\left(\frac{10^{-7}}{1}\right)$ | $p(H^+) = -\log_{10}\left(\frac{10^{-12}}{1}\right)$

$p(H^+) = 8\log_{10}(10)$ | $p(H^+) = 4\log_{10}(10)$ | $p(H^+) = 7\log_{10}(10)$ | $p(H^+) = 12\log_{10}(10)$

$p(H^+) = 8 \cdot 1$ | $p(H^+) = 4 \cdot 1$ | $p(H^+) = 7 \cdot 1$ | $p(H^+) = 12 \cdot 1$

$\boxed{p(H^+) = 8}$ ÁCIDA | $\boxed{p(H^+) = 4}$ BÁSICA | $\boxed{p(H^+) = 7}$ NEUTRA | $\boxed{p(H^+) = 12}$ ÁCIDA

b) Pelas regras de potência, qual das substâncias na tabela acima possui a maior concentração hidrogeniônica? E a menor concentração? Justifique a sua resposta.

É a substância com a maior concentração hidrogeniônica é a Rosa e com a menor é a substância Laranja porque -12 é o menor número e -4 é o maior.

Do ponto de vista da teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o uso de problemas e situações em sala de aula implica, para o aluno, a elaboração de representações que então proporcionam o desenvolvimento de esquemas, que simbolizam a organização das representações extraídas do problema matemático.

As representações, segundo Duval, são consideradas semióticas, pois através da interpretação, avaliação e organização das informações, os alunos manipulam os esquemas cognitivos para converter as representações em registros, ou seja, transformam as referências apresentadas em uma situação em significado e, consequentemente, em significante que é a fase final para a apropriação do conceito apresentado.

7. Conclusões

Procurou-se apresentar, com a pesquisa relatada nesse artigo, que abordar conteúdos de matemática através de situações problema privilegia fortemente o diálogo entre os alunos, onde eles podem construir suas hipóteses e verificar sua validade. Neste contexto, o professor conduz o aluno durante o seu processo de aprendizagem, evidenciando os principais elementos que devem ser extraídos das situações problema apresentadas. O reconhecimento das propostas nas diretrizes oficiais (PCN), conduz o docente para tornar a matemática da escola uma fonte de conhecimentos inesgotável para os alunos, desde que através da sua proposta metodológica o professor consiga mostrar aos alunos a importância que a matemática possui no âmbito da ciência.

Durante as aulas de matemática, o que se nota é o professor iniciando a aula com os conceitos e definições, seguidos de exemplos e exercícios que são apenas reproduções de propriedades e relações. Em um próximo momento (nem sempre), ocorre a apresentação dos problemas onde, eventualmente, são investigadas pelo professor e alunos, as características mais interessantes presentes nas situações. Acreditamos que esse encaminhamento metodológico pode não proporcionar aos alunos a possibilidade de desenvolver o seu potencial matemático adequadamente, pois o ensino neste caso se caracteriza essencialmente pela transmissão do conhecimento pelo professor.

A presente pesquisa demonstrou que a apresentação de situações problema envolvendo o conceito de função, funções exponenciais e logarítmicas, juntamente com o desenvolvimento das atividades em grupo, possibilitou uma aula de matemática mais produtiva em termos de construção do conhecimento, pois os alunos interagiram intensamente entre si durante o encaminhamento das resoluções, confrontando hipóteses, evidenciando a formação e manipulação de esquemas e a construção dos registros de representações semióticas para os conceitos matemáticos.

Basso (2009, p. 18) apresenta um esquema sugerindo uma possível ordem que os professores podem adotar ao criar o seu planejamento metodológico. A partir da necessidade de resolver certos problemas, buscou-se desenvolver com os alunos a investigação necessária para, enfim, apresentar os conceitos de matemática envolvidos. Percebe-se, assim, que desenvolver os conceitos de matemática, utilizando essa maneira, desperta o interesse e curiosidade dos alunos em conhecer as aplicações da teoria matemática em situações do cotidiano, tornando o momento da aprendizagem infinitamente melhor e com resultados qualitativamente positivos.

Figura 12 – Esquema metodológico proposto por Basso (2009, p.18).

8. Referências

ARTIGUE, Michèle. Engenharia didáctica. In: BRUM, J. (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes pedagógicos. p.193-217. 1996.

ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**. V3.6, p.62-77, Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC. 2008. Disponível em: <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/download/13031/12137&sa=U&ei=558VT4vON4_CgAfz3tG_Aw&ved=0CBQQFjAA&usg=AFQjCNEozUOBLWI-nxvoiiRbri1RCr9pkg>. Acesso em 05 jan. 2012.

BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. Palestra Matemática na Escola: Experiências e Perspectivas. **Mesa Redonda Ciência - Formação aos professores da Rede Municipal de Ensino de Porto Alegre**. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~mbasso/apresentacoes/expmat_SMED2009.pdf>. Acesso em 31 jan. 2012.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**, Brasília, 1999. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em 12 set. 2011.

________. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN + Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais** – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 12 set. 2011.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D.A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, p.11-33, 2003.

________. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Tradução: Lênio Fernandes Levy, Marisa Rosâni Abreu de Silveira. 1º Ed. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2009.

FLICK, Uwe. **Desenho da pesquisa qualitativa**. 1º Ed. Porto Alegre, Artmed, 2009.

MAXWELL, Joseph Alex. **Qualitative Research Design. An Interactive Approach**. 2. ed. Thousand Oaks, CA: Pine Forge Press. 2005.

RAGIN, Charles. **Constructing Social Research: The Unit and Diversity of Method**. Thousand Oaks, CA: Pine Forge Press. 1994.

VERGNAUD, Gerard. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In: CARPENTER, T., MOSER, J. & ROMBERG, T. **Addition and subtraction. A cognitive perspective**. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erbaum. p. 39-59. 1982.

________. A teoria dos campos conceptuais. In: BRUM, J. (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes pedagógicos, p.155-191. 1996.

________. **Qu'est-ce que la penseé? dans les actes du Colloque**: Qu'est-ce que la penseé? Suresne, Laboratoire De Psychologie Cognitive et Activités Finalissés, Université Paris VIII, p.1-28. 1998.