

Uma abordagem para o ensino de lugares geométricos com o GeoGebra¹

An approach to teaching loci with GeoGebra

Gerson Pastre Oliveira

gpastre@pucsp.br

Péricles Bedretchuk Araujo

gepasoli@gmail.com

Resumo

A pesquisa descrita neste artigo relata uma investigação que teve por bases a Teoria das Situações Didáticas e pressupostos relativos ao emprego de estratégias pedagógicas mediadas por tecnologias para a aprendizagem em Geometria. A sequência didática proposta visou possibilitar aos participantes, estudantes do nono ano do Ensino Fundamental e do segundo ano do Ensino Médio, construir os conceitos de circunferência e mediatriz como lugares geométricos. A investigação empregou atividades nas quais situações do cotidiano, associadas à circunferência e à mediatriz como lugares geométricos, foram apresentadas aos alunos. Tais ocorrências foram utilizadas na aprendizagem de geometria, por meio de tarefas de construção, que também permitiram levantar as dificuldades de aprendizagem dos estudantes e suas estratégias, quando em contato com ambientes dinâmicos como os que foram proporcionados pelo GeoGebra. O estudo permitiu considerar que a intervenção mediada pelo software auxiliou os estudantes na superação dos problemas encontrados. Semelhante efeito também pode ser creditado à proposta colaborativa das situações didáticas planejadas.

Palavras-chave: Geometria dinâmica, lugares geométricos, teoria das situações didáticas, GeoGebra.

Abstract

The research described in this paper reports an investigation that was to base the Pedagogical Situations Theory and assumptions relating to the use of teaching strategies mediated by technologies to learning in Geometry. The proposed educational sequence aimed to enabling participants, students in 9th year of Elementary School and 2nd year of High School build the concepts of circumference and perpendicular bisector as geometric loci. The investigation used activities in which everyday situations associated with the circumference and the perpendicular bisector as geometric loci were presented to students. Such occurrences were used in the learning of geometry through construction tasks those also allowed to evaluate the learning difficulties of students and their strategies, when in contact with dynamic environments such as those provided by GeoGebra. The work results allowed considering that the intervention mediated by the software helped students to overcome the cognitive problems encountered. This effect can also be credited to the collaborative proposal of the teaching situations planned.

Keywords: Dynamic geometry, loci, Pedagogical Situations Theory, GeoGebra.

¹ Este artigo é resultado de pesquisa apoiada pela Fapesp (Processo no. 2010/01225-8) e pelo CNPq (Processo no. 401390/2010-1).

Resumen

Este trabajo presenta una investigación basada en la Teoría de las Situaciones Didácticas y en supuestos relacionados con el uso de estrategias pedagógicas mediadas por tecnologías para la aprendizaje de geometría. La secuencia didáctica propuesta tenía por objeto permitir a los participantes de la investigación, estudiantes del noveno año de la escuela primaria y del segundo año de la escuela secundaria, construir los conceptos de circunferencia y mediatriz como lugares geométricos (loci). La investigación utiliza actividades en que las situaciones cotidianas relacionadas con la circunferencia y la mediatriz como lugares geométricos fueron presentadas a los estudiantes. Tales acontecimientos fueron utilizados en el aprendizaje de geometría a través de tareas de construcción que también pudieron evaluar las dificultades de aprendizaje de los estudiantes y sus estrategias al entrar en contacto con entornos dinámicos, tales como los proporcionados por GeoGebra. El estudio permitió tener en cuenta que la intervención mediada por el software ayudó a los estudiantes para superar los problemas encontrados. Un efecto similar puede ser acreditado a la propuesta colaborativa de las situaciones de enseñanza previstas.

Palabras clave: Geometría dinámica, lugares geométricos, teoría de las situaciones didácticas, GeoGebra.

Introdução: sobre a pesquisa e sua fundamentação teórica

Este artigo relata uma pesquisa concluída e levada a efeito no âmbito do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, envolvendo alunos de uma escola pública de Educação Básica, cursando séries finais do Ensino Fundamental ou o Ensino Médio. O objetivo era avaliar se uma sequência de situações adidáticas, estruturadas em uma estratégia pedagógica, mediada pelo *software* GeoGebra, poderia contribuir para a aprendizagem dos temas “circunferência” e “mediatriz”, vistos como lugares geométricos.

No contexto supramencionado, de acordo com Brousseau (2008), uma *situação adidática* é aquela na qual o estudante não tem a revelação, por parte do professor, da intenção de ensinar, ainda que este tenha planejado dada situação de modo a estabelecer condições favoráveis para a construção do novo saber. O aluno não buscará a solução de problema para responder ao professor, mas para solucionar a situação que lhe é apresentada, ganhando maior autonomia. O professor não intervém diretamente para que o aluno adquira o conhecimento esperado: o aprendiz adapta-se a um ‘meio’, que é fator de desequilíbrios.

Ainda em relação aos conceitos mencionados, uma figura geométrica se caracteriza por determinadas propriedades que a individualizam. Neste contexto, a concepção de lugar geométrico pode ser vista como “um conjunto de pontos que apresentam uma determinada propriedade: se certo ponto possui a propriedade x , então ele pertence ao lugar geométrico dos pontos que satisfazem x ” (Camargo, n.d., s/p).

Segundo King e Schattschneider (1997), os lugares geométricos representam um assunto evitado em livros de geometria, ainda que representem um tema que pode enriquecer o seu estudo. Entender as propriedades geométricas que estão atreladas a uma determinada figura e como elas se relacionam, pode possibilitar um entendimento de conceitos geométricos como a circunferência, mediatriz, bissetriz e outros. Especificamente nesta pesquisa, os lugares geométricos trabalhados são a circunferência e a mediatriz, que têm as seguintes definições:

Circunferência: lugar geométrico dos pontos de um plano que são equidistantes de um ponto dado, chamado centro da circunferência – a distância constante é a medida do raio;

Mediatriz: lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes dos extremos de um segmento (Camargo, n.d., p. 2).

Estas definições também podem ser encontradas em livros didáticos. No caso da circunferência como lugar geométrico, uma definição pode ser: “a circunferência é um lugar geométrico no plano, pois todos os seus pontos têm uma propriedade comum: estão a uma mesma distância a um ponto fixo” (Mori e Onaga, 2009, p. 226).

Um ponto que se move em um plano, com determinadas propriedades, pode ser visto como um lugar geométrico – por exemplo, a distância deste ponto em relação a dois outros pode ser constante e igual a x . A curva formada pelo ponto em questão pode ser de difícil visualização com recursos estáticos – não é impossível, apenas mais difícil. Esta é a argumentação de King e Schattschneider (1997), que acrescentam ser difícil para as pessoas imaginarem um ponto se movendo em uma configuração na qual pode haver outros pontos e ainda serem capazes de apontar o lugar geométrico. Uma possibilidade existente nos programas de Geometria Dinâmica é a capacidade de visualização de lugares geométricos por meio do traçado de um ponto, entre outros recursos. Evidentemente, o recurso sozinho não tem o poder de melhorar a capacidade de aprendizagem de um estudante em particular – ou de um grupo: são as estratégias pedagógicas planejadas no âmbito das situações de aprendizagem as responsáveis por fomentar este processo (Oliveira, 2009).

No que diz respeito à Geometria Dinâmica, argumenta Gravina (1996):

a partir de exploração experimental viável somente em ambientes informatizados, os alunos conjecturam e, com o feedback constante oferecido pela máquina, refinam ou corrigem suas conjecturas, chegando a resultados que resistem ao “desenho em movimento”, passando então para a fase abstrata de argumentação e demonstração matemática (Gravina, 1996, s/p).

Nas tarefas desta pesquisa, os lugares geométricos são utilizados em uma série de construções geométricas, considerando uma abordagem com o *software GeoGebra*. Entende-se, desta forma, que o uso das tecnologias não significa a simples transposição das aulas tradicionais para o computador, mas expressa uma mudança na forma de ensinar, representando uma forma de estimular o aluno a ganhar autonomia, avançando desde a perspectiva de um simples executor de tarefas automatizadas, para a de alguém que aprende a aprender. Denota, também, uma postura diferenciada do professor, de modo que ele possa transitar e saber usar os potenciais oferecidos pelas TICs.

Metodologia

Foi importante, na investigação aqui relatada, eleger um estilo de trabalho para os sujeitos, de tal forma a favorecer um ambiente de interações intensivas, tanto quanto possível. Esta ambientação surgiu com base nas ideias do trabalho colaborativo, favorecendo o relacionamento social dos indivíduos ao incentivar as discussões entre os seus membros, gerando momentos ricos de aprendizagem onde um membro pode incentivar o outro a expor suas ideias, reformulá-las, compartilhar seus conhecimentos, buscando o êxito da tarefa na qual estão envolvidos. A ideia de colaboração na aprendizagem foi assim definida por Ramos e Quartiero (como citado em Oliveira, 2007, p. 113):

(...) entendemos a colaboração ‘como atividade síncrona e coordenada que resulta de uma tentativa contínua de construir e manter uma concepção compartilhada de um problema’ (Roschelle e Teasley como citado em Rosatelli et al, 2003, p. 48). Neste sentido, a colaboração caracteriza-se como uma ação na qual os objetivos e os problemas são partilhados, visando à construção do conhecimento e a aprendizagem.

Participaram da pesquisa nove alunos voluntários, com idades entre 14 a 16 anos, dos quais três eram do 9º ano do Ensino Fundamental e seis do 2º ano do Ensino Médio, em uma escola pública situada no município de São Paulo. As sessões ocorreram em horário diverso das aulas regulares. Os alunos foram divididos em 3 grupos, com 3 alunos cada. Os grupos foram indicados por A, B e C, e os alunos de cada grupo como A1, A2, A3, e assim por diante. A sequência de ensino foi aplicada por um dos pesquisadores e contou com a colaboração da professora de Matemática da turma. Foram utilizados 12 computadores e um projetor

multimídia² durante as quatro sessões de aplicação do instrumento, que contava com 13 tarefas, das quais 3, em função da relevância, são descritas neste artigo.

Nesta pesquisa, os procedimentos metodológicos consideraram os pressupostos da Engenharia Didática, caracterizada como:

[...] um esquema experimental baseado sobre “realizações didáticas” em sala de aula, isto é, sobre a concepção, realização, a observação e a análise de sequências de ensino (Artigue como citado em Machado, 2008, p. 235).

Os procedimentos adotados na metodologia da engenharia didática distinguem quatro fases. Nas análises preliminares, são realizadas as considerações sobre o quadro teórico didático envolvido. No caso desta investigação, tais elementos compreendem a Teoria das Situações Didáticas, de Brousseau (1997), bem como conhecimentos ligados aos lugares geométricos “circunferência” e “mediatriz”, além de um exame sobre livros didáticos que trazem os temas em estudo e suas abordagens. Na fase de análise a priori, o pesquisador define as variáveis didáticas presentes nas tarefas, bem como indica as possibilidades de resolução das mesmas. A fase da experimentação realiza-se no momento em que ocorre o contato do pesquisador com os alunos que participaram da investigação e prevê uma explicação dos objetivos e das condições em que a pesquisa será realizada, assim como o estabelecimento do contrato didático na consecução das tarefas (Brousseau, 2008). Por fim, na análise a posteriori e validação, foram coletados os dados obtidos na fase de experimentação, resultados estes oriundos tanto das observações desenvolvidas em cada sessão quanto das produções desenvolvidas pelos alunos com o *software* GeoGebra. É o momento em que se comparam análise a priori e a posteriori, validando ou não as hipóteses levantadas.

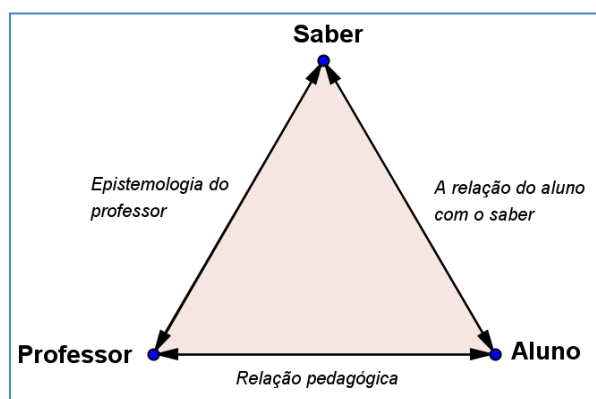
Assim, entende-se, no âmbito deste trabalho, que o sucesso do emprego de tecnologias digitais em sala de aula está em estabelecer as estratégias apropriadas para o desenvolvimento cognitivo do aluno e o aperfeiçoamento das práticas de ensino por parte do professor. Nesta investigação, a sequência com esta visão está integrada à propositura de problemas, de acordo com a Teoria das Situações Didáticas. Para Brousseau (como citado em Almouloud, 2007, p.31),

² Os alunos utilizaram os computadores individualmente, discutindo os resultados no âmbito do grupo posteriormente. Os outros 3 computadores foram utilizados, respectivamente, por um dos pesquisadores, pela professora de Matemática das turmas e para o projetor multimídia, utilizado para socialização dos resultados entre os alunos e para os momentos de institucionalização.

Um processo de aprendizagem pode ser caracterizado de modo geral (se não determinado) por um conjunto de situações identificáveis (naturais ou didáticas) reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos de alunos, modificação característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos.

Nesta teoria, o principal elemento de estudo é a própria situação didática, no contexto da qual se pode identificar certas ordens de interações existentes entre o saber, o professor e o aluno, em dadas situações de ensino, como explicitado na próxima figura.

Figura 1 – Triângulo didático



Fonte: ALMOULOU, 2007, p. 32. Adaptado.

Tal como nos aportes construtivistas piagetianos, considera-se aqui que o sujeito aprenda pela adaptação a um *milieu* antagônico, ou seja, um meio que é agente de dificuldades, desequilíbrios e contradições diversas. São as respostas inéditas as atestadoras da aprendizagem de dado estudante. O *milieu*, como adversário, não é uma condição indesejável, pelo contrário, deve ser desta forma para que possa existir a superação desde o conhecimento estruturado no sujeito, a partir da percepção e avanço, até o desequilíbrio cognitivo. A responsabilidade pela criação e organização de um *milieu* com intencionalidade didática deve ser do professor, que criará situações passíveis de acionar as aprendizagens matemáticas pretendidas. Assim, uma situação didática poderia ser definida como

O conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo *milieu* (contendo eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um

saber constituído ou em constituição (Brousseau como citado em Almouloud, 2007, p. 33).

Como elemento importante da situação adidática, surge o conceito de *devolução*: o professor propõe uma tarefa e estimula o aluno a aceitá-la como desafio a resolver. A esse respeito, Brousseau (2008, p. 91) afirma que “a devolução é ato pelo qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema e o mesmo assume as consequências dessa transferência”.

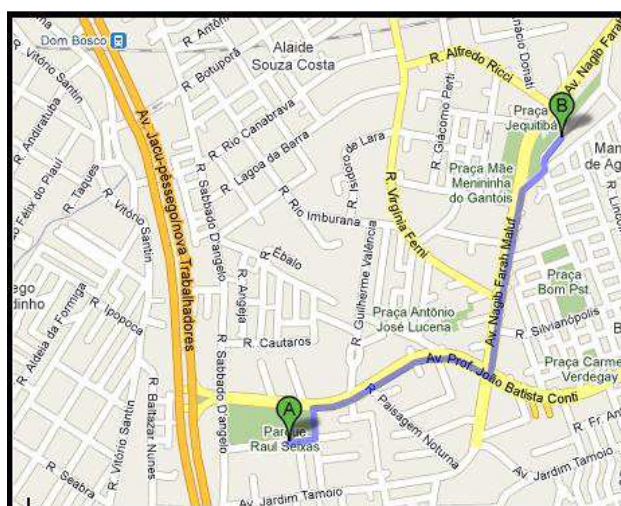
Em seguida, então, são mencionadas as tarefas analisadas e expostas neste artigo.

Tarefas e análises

Para a primeira tarefa, o seguinte enunciado estava disponível com as distâncias anunciadas já em escala:

Um carro está a 3,5 cm do Parque Raul Seixas, do qual já havia passado, e a 4,5 cm da Praça Jequitibá. Em qual lugar o veículo se encontra? Observe a direção em que o carro vai³. Abra o arquivo correspondente, localize o mapa e resolva a atividade no GeoGebra (adaptado de Brasil, 1973, p. 53)

Figura 2 – Mapa da tarefa 1



Fonte: Google Maps.

³ O pesquisador encarregado da aplicação das tarefas explicou aos participantes que, apesar do enunciado, o carro não se deslocava, necessariamente, por uma estrada determinada.

Nesta tarefa, os grupos poderiam criar segmentos de 3,5 e 4,5 cm como raios de duas circunferências, que teriam, por exemplo, dois pontos comuns marcados como lugares nos quais o veículo poderia estar. Ocorre, porém, que um dado grupo poderia, por exemplo, entender que o veículo estaria em um ponto qualquer dos segmentos, e não em pontos de intersecção das circunferências, o que não seria uma solução válida.

A análise a posteriori desta tarefa pode ser vista no quadro seguinte.

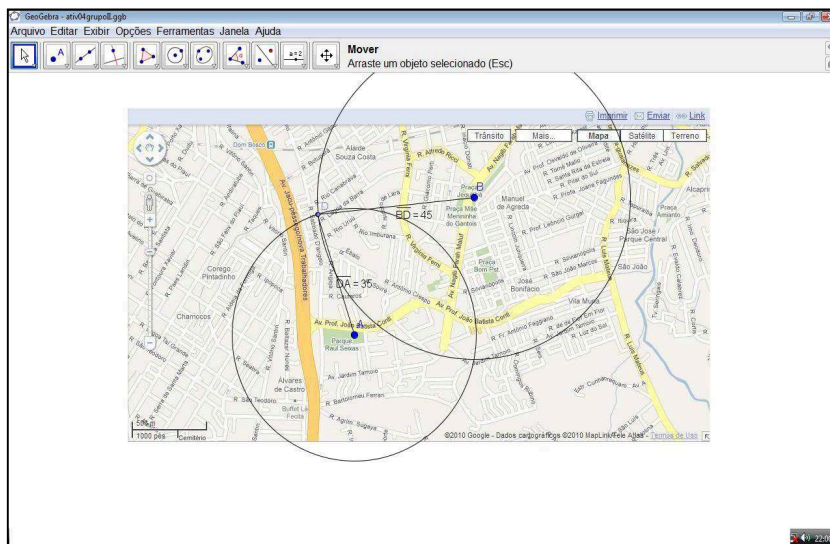
Quadro 1 – Tarefa 1: análise a posteriori

Situação adidática e institucionalização	Tarefa 1
Ação	Os grupos fazem a leitura e a interpretação do enunciado. Analisam a situação proposta. De início, os grupos entenderam que tinham que medir a distância entre as duas praças: tentam descobrir se o ponto está entre elas. Fazem testes com o <i>GeoGebra</i> . Observamos nesta fase que um grupo procurava estabelecer uma estratégia que lhes possibilitasse encontrar um terceiro ponto. Houve várias tentativas, como só usar a ferramenta “segmento por dois pontos”.
Formulação	Observaram a necessidade de usar segmentos nas medidas do problema como raios de circunferências que tivessem intersecção entre si. Os alunos propõem o uso das ferramentas “segmento com comprimento fixo” e “circunferência”.
Validação	Os grupos comunicam suas estratégias uns aos outros. Simulam a situação no programa <i>GeoGebra</i> e argumentam que as ferramentas “segmento com comprimento fixo” e “compasso” deveriam ser aplicadas em cada ponto definido do mapa. Neste caso, definiram o tamanho dos dois segmentos, aplicaram a ferramenta “compasso” em cada ponto e obtiveram os dois pontos que são a intersecção das duas circunferências.
Institucionalização	A partir dos argumentos levantados durante as discussões, o pesquisador organiza as conclusões, solicitando que os alunos meçam as distâncias dos pontos encontrados para as referências e observem que a intersecção das circunferências possibilitou encontrar os pontos solicitados.

Analisando as gravações em áudio desta sessão, foi possível observar que alguns alunos entenderam que o carro ia de uma praça a outra. O pesquisador observou que isto não ocorria. Os membros do grupo C queriam usar a ferramenta “segmento por dois pontos”, mas havia o obstáculo de como definir a medida. Neste meio tempo, os integrantes do grupo A procuravam encontrar a solução fazendo várias tentativas, ou seja, através da experimentação com uso da interface computacional. Depois de certo tempo, o grupo B apresentou uma solução válida para a questão. O aluno B3 dividiu com os demais grupos a solução apresentada, que consistia no uso das ferramentas “segmento com comprimento fixo”, a partir de um ponto A com 3,5 cm e de um ponto B com 4,5 cm. Em seguida, usaram a ferramenta “compasso” sucessivamente nos pontos A e B, marcando pontos de intersecção entre as

circunferências encontradas e argumentando que estes seriam os lugares possíveis para a localização do veículo.

Figura 3 – Protocolo da solução da tarefa 1, Grupo B, parte 1



Foi observado que os grupos A e C executaram a solução proposta pelo grupo B, depois de argumentarem entre si, e de considerarem a opção válida. É possível verificar que a colocação dos segmentos, da maneira como a tarefa foi executada, implicava dificuldade de alinhá-los com exatidão a partir dos pontos dados. Uma melhor exploração da interface, com uso da ferramenta “Círculo dados centro e raio”, facilitaria a execução.

A tarefa 2 trazia o seguinte enunciado:

“uma estrada de ferro passa bem próxima a duas cidades. Irá ser construída uma nova estação, próxima a linha férrea, de modo que ela fique a uma mesma distância das duas cidades” (Casado, 2009, p. 2). Simule esta situação no GeoGebra. Confira os resultados, mude a posição das cidades ou da estação e verifique se as propriedades geométricas se mantêm.

A intenção era de que os grupos interagissem com o arquivo proposto para a tarefa e observassem que a nova estação seria um ponto da mediatriz, que se encontraria equidistante das duas cidades (pontos). A estratégia esperada seria a de desenhar pontos representando as cidades; um segmento entre eles, representando a linha férrea; o uso da ferramenta “mediatriz” ou outra que permitisse traçar a mediatriz; além de um ponto de intersecção entre a mediatriz e o segmento (ou um ponto móvel sobre a mediatriz). A partir daí, deveria haver a

movimentação dos elementos envolvidos na construção, de modo a constatar a manutenção das propriedades anunciadas.

A análise a posteriori desta tarefa pode ser vista no quadro seguinte.

Quadro 2 – Tarefa 2: análise a posteriori

Situação adidática e institucionalização	Tarefa 2
Ação	Os grupos fazem a leitura e a interpretação do enunciado. Interagem com o arquivo que simula as diferentes posições das duas cidades e a linha férrea. Os alunos movimentam a posição das cidades.
Formulação	A partir da mediatriz, a movimentação dos elementos garantia que as cidades mantinham a mesma distância da estação.
Validação	Os grupos mostravam, entre si, que as diferentes movimentações das duas cidades mantinham distâncias iguais.
Institucionalização	A partir dos argumentos levantados durante as discussões, o pesquisador organiza as conclusões e apresenta a mediatriz como uma reta que equidista de dois pontos.

Nesta tarefa, os grupos responderam as questões propostas sem maiores dificuldades. Em seu depoimento, os membros do grupo C indicaram ter compreendido o conceito: *“a segunda tarefa era igual à outra que realizamos e a distância da ferrovia até a outra cidade eram iguais. Se você mexer as cidades sempre terá a mesma medida”*.

A tarefa 3 era uma extensão da anterior, e trazia o seguinte enunciado: *“como você faria se, no lugar de duas cidades, tivéssemos três? Tente resolver com o GeoGebra”* (Casado, 2009, p. 2).

A estratégia dos grupos para encontrar uma solução poderia ser a de aplicar a construção de mediatrizes com a utilização, no *GeoGebra*, das ferramentas: “compasso” e “reta”, em conjunto, ou “mediatriz”.

Esperava-se que os estudantes, ao manipularem a figura construída na tela, percebessem que o circuncentro não se restringe a área delimitada pela região triangular, formada pelas três

idades. Esperava-se, igualmente, que pelo menos um dos pontos não fosse colinear em relação aos outros dois⁴.

Poderia acontecer que a solução que os grupos adotassem fosse a de ajustar os elementos para conseguir a posição do circuncentro, por tentativa e erro, procurando um ponto que ficasse a igual distância das três cidades, o que não seria uma construção válida.

A análise a posteriori desta tarefa pode ser vista no quadro seguinte.

Quadro 3 – Tarefa 3: análise a posteriori

Situação adidática e institucionalização	Tarefa 3
Ação	Os grupos fazem a leitura e a interpretação do enunciado. Usam a ferramenta mediatriz em dois pontos. Definem estratégias de como achar o centro. Alguns percebem que o centro se encontra na mediatriz e tentam ajustá-lo.
Formulação	Os grupos conjecturam sobre como procurar a ferramenta mais adequada na barra de menus: ponto médio, mediatriz, mediana.
Validação	Procuram confirmar com o professor e com os demais grupos se a mediatriz e a mediana representam o mesmo conceito ou se são distintos.
Institucionalização	A partir dos argumentos levantados durante as discussões, o pesquisador organiza as conclusões e intervém. É institucionalizado o circuncentro, como o lugar que equidista dos três vértices do triângulo. É observado que nem sempre o circuncentro se encontra no interior do triângulo.

Nesta tarefa, os alunos colocaram na tela os pontos A, B e C. A partir das discussões, compreenderam que deveriam achar um ponto que ficasse a igual distância de A e de B. Daí, os alunos anunciaram que a mediatriz possibilitaria ter todos os pontos a igual distância de A e de B. O mesmo procedimento se deu para os pontos B e C. Como as mediatrizes se intersectavam, os estudantes empregaram corretamente a ferramenta “intersecção de dois objetos”, observando, também, que tal intersecção equidistava de A, B e C.

O pesquisador solicitou que modificassem a posição das cidades (pontos A, B e C). Os grupos não imaginavam que a estação estaria, em determinadas condições, fora do triângulo formado pelos pontos A, B e C. Foi neste momento que o pesquisador instituiu o que era um circuncentro, como a intersecção das mediatrizes do triângulo formado por A, B e C.

⁴ Apesar do interesse em discutir o caso em que os três pontos fossem colineares, este tópico não foi abordado no estudo aqui relatado.

Após esta tarefa, os grupos escreveram livremente o que haviam compreendido. Observou-se, em suas produções, que os alunos compreenderam o conceito de mediatriz, bem como a diferença entre este conceito e o de mediana.

Considerações finais

Nas interações ocorridas entre os estudantes, ficou bastante clara a importância do caráter colaborativo proporcionado pelas situações adidáticas em discussão. No âmbito dos grupos, em um primeiro momento ocorriam as lógicas de ação e de formulação, posteriormente ampliadas para discussões gerais, com o intuito de obter a validação. Após a obtenção de certo grau de conhecimento sobre os conteúdos em jogo, ao final das tarefas, ocorria o momento de institucionalização.

Por vezes, as situações adidáticas de validação representaram momentos de orientação, nos quais o pesquisador atuou na tentativa de resgatar elementos essenciais ao processo, ou de recolocar os estudantes em contato com o conteúdo matemático, em relação ao qual apresentavam dificuldades. O ideal seria que tais atuações fossem reduzidas, mas isto pode representar o reflexo da necessidade que os estudantes têm de serem habituados ao trabalho com situações problema, vistas como possibilidades de engajar os aprendizes em projetos de autoaprendizado nem sempre presentes na escola tradicional.

A inserção de uma estratégia pedagógica, mediada pelo *software* GeoGebra, foi muito importante para a consolidação de algumas aprendizagens sobre a circunferência e a mediatriz como lugares geométricos. Os estudantes puderam experimentar suas hipóteses, conjecturar sobre distintas possibilidades de resolução, abandonando aquelas que não representavam caminhos vistos como válidos. Interessante observar que os aprendizes recorriam às tarefas anteriores ou à teoria aprendida nos momentos de institucionalização para dar continuidade na solução de uma tarefa nova na qual se envolviam. Este aspecto é importante para denotar a possibilidade de que os alunos não desenvolvam dependência da tecnologia para a construção de elementos matemáticos, mas que a utilizem como parceira e mediadora, na direção da resolução de um problema.

Claro que diversas dificuldades persistiram. Vários foram os momentos de intervenção orientadora do pesquisador. Em diversas circunstâncias, as ferramentas adequadas eram esquecidas ou não havia um relacionamento entre elas e as construções geométricas em processo. Entretanto, o caráter dinâmico da interface permitia retomar as conjecturas, e o

debate entre os participantes, em caráter colaborativo, criava condições para que o trabalho continuasse, ainda que na obtenção de resultados às vezes errados. Aqui, então, os pressupostos teóricos da estratégia pedagógica adotada, permitiu obter retroações a partir do *milieu*, percebendo o erro, questionando, reconstruindo e, finalmente, chegando a resultados mais satisfatórios.

O uso do GeoGebra permitiu aos grupos de estudantes, por causa da estratégia adotada, desenvolver autonomia para experimentar e validar as suas conjecturas. Possibilitou, também, compreender os conceitos de circunferência e mediatriz como lugares geométricos. Além disso, foi possível, para os alunos, investigar a equidistância quando os grupos usavam a ferramenta “distância” para verificar a regularidade da propriedade pela qual um ponto da mediatriz se mantinha equidistante de dois outros.

A respeito das construções geométricas desenvolvidas, o GeoGebra mediou a validação da construção por meio do recurso “arrastar”, aplicado aos diferentes elementos da construção quando perceberam que a mesma se mantinha inalterada – ou a percepção de erros, quando a construção “desmanchava”.

Algumas dificuldades precisam ser destacadas. Por exemplo, os grupos se prenderam excessivamente ao traçado do desenho: na tarefa que envolvia a colocação de um ponto (circuncentro) equidistante de três outros, os grupos, em sua maioria, responderam que o ponto devia ficar no meio na região triangular, ou seja, prenderam-se muito a concepções intuitivas ligadas ao desenho e não levaram em conta as propriedades da figura geométrica. Para mudar isso, procurou-se orientar os grupos a usar o recurso de “arrastar”, no qual um dos três pontos foi escolhido e a sua movimentação permitia aos estudantes ver o circuncentro fora da região triangular, com a manutenção da característica de ficar equidistante dos três pontos. Esta situação permitiu caracterizar o circuncentro como um lugar geométrico – e seria bastante difícil de ser aplicada sem a mediação do *software*. Outras dificuldades ocorreram na interpretação dos textos das tarefas e na tentativa de obter resultados simplesmente ajustando as figuras a uma configuração preconcebida, e que seria próxima a solução buscada, ignorando propriedades geométricas fundamentais. Estes aspectos carecem de maior atenção por parte dos currículos oficiais que, em sua implementação, precisam de maiores espaços para tarefas que visem superar estas limitações para além da eventual intervenção do professor.

Outras sugestões referem-se a pesquisas com outros lugares geométricos, como a bissetriz, o arco-capaz e retas paralelas, bem como investigações que envolvam áreas, sólidos

geométricos, estudo de curvas e movimento de pontos, sob o ponto de vista dos lugares geométricos.

Referências

Almouloud, S. A. (2007). **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: UFPR, 2007. Brasil. Ministério da Educação e Cultura. Fundação Nacional de Material Escolar (1973). *Desenho 2: plano – espaço*. Brasília: MEC.

Brousseau, G. (2008). **Introdução ao Estudo das Situações didáticas**: conceitos e métodos de ensino. São Paulo: Ática.

Brousseau, G. (1997). **La théorie des situations didactiques**. Acesso em 30 de maio, 2010, de <<http://perso.wanadoo.fr/daest/Pages%20perso/Brousseau.htm#ligne>>.

Camargo, M. A (n.d.). **Arcos e cordas: conceitos de desenho geométrico**. Acesso em 20 de agosto, 2010, de <http://educacao.uol.com.br/matematica/ult1705u8.jhtm>

Casado, M. J. (2009). **Lugares geométricos**. Acesso em 08 de março, 2010, de <<http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/Geogebra/index.htm>>.

Gravina M.A. (1996). Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. In **Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, Belo Horizonte. Acesso em 20 de agosto, 2010, de <http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/curcom2/artigo/artigo.htm>.

King, J. E. & Schattschneider, D. (1997). **Geometry Turned On**: Dynamic Software in Learning, Teaching and Research. The Mathematical Association of America, 1997. Acesso em 20 de agosto, 2010, de <http://mathforum.org/dynamic/geometry_turned_on>.

Machado, S. D.A. (2008). Engenharia Didática. In Machado, S.D.A.(org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC.

Mori, I. & Onaga, D. S. (2009). **Matemática, Ideias e Desafios**. São Paulo: Saraiva - 8º e 9º anos.

Oliveira, G. P. (2009). Estratégias didáticas em Educação Matemática: as tecnologias de informação e comunicação como mediadoras. **Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Brasília: SBEM. 1 CD-ROM.

Oliveira, G. P. (2007). Avaliação da aprendizagem em cursos online colaborativos: uma abordagem multidimensional. **Tese de Doutorado** (Educação). São Paulo: USP.