http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p1

Les problèmes dans l'acquisition des connaissances mathématiques: apprendre comment les poser pour devenir capable de les résoudre?

Os problemas na aquisição de conhecimentos matemáticos: aprender a elaborá-los para se tornar capaz de resolvê-los?

Problem solving in learning mathematics: learn how to construct problems first in order to became able to solve them?

Raymond Duval

duval.ray@wanadoo.fr

Resume

Les problèmes qui sont donnés dans l'enseignement sont des problèmes fabriqués pour faire découvrir ou utiliser une connaissance mathématique. Mais la résolution de problème reste toujours une boîte noire pour la plupart des élèves, et elle n'apprend pas à reconnaître quelle est la connaissance mathématique à utiliser dans les diverses situations de la réalité. Dans cet article nous expliquons que la fabrication et la résolution de problèmes sont les deux côtés d'une même activité, et pourquoi, contrairement à la pratique institutionnelle, il faut d'abord apprendre comment fabriquer les problèmes pour devenir capables de les résoudre. Pour analyser l'activité de fabrication/résolution de problèmes, nous devons distinguer deux types de problèmes: les problèmes d'application et les problèmes d'exploration. Il faut aussi prendre en compte le fait que ces deux types de problèmes mobilisent au moins deux registres de représentation, le plus souvent trois. Cet article comprend quatre parties. Dans la première, nous dégageons les quatre facteurs qui commandent la fabrication d'un problème d'application à partir d'un traitement mathématique élémentaire. Dans la seconde, nous montrons pourquoi la résolution d'un problème implique une activité cognitive différente et plus complexe que celle requise pour sa fabrication. Or c'est cette activité qui constitue le travail réellement demandé à l'élève. Dans la troisième, nous présentons le type de tâche requis pour apprendre à fabriquer , à partir d'une traitement mathématique élémentaire, non pas un problème mais une grande variété de problèmes. Pour les problèmes d'application, il faut substituer la notion de champ de problème à celle de problème. Dans la dernière partie, nous montrons que les problèmes d'exploration exigent une activité de conversions directes et de conversion inverses, qui est plus importante encore que celle requise pour les problèmes d'application.

Mots cles: Résolution de problème. Fabrication de problème. Problème d'application. Problème d'exploration. Conversion directe. Conversion inverse. Traitement mathématique élémentaire. Description complete. Description minimale.

Resumo

Os problemas propostos em sala de aula são elaborados com o intúito de promover a descoberta ou a utilização de um conhecimento. Mas, a sua resolução é uma caixa preta para grande parte dos alunos e não ensina como reconhecer qual é o conhecimento matemático a ser utilizado em diversas situações da realidade. Neste artigo, explicamos que a elaboração e a resolução de problemas são dois lados de uma mesma atividade e, por conta da prática institucionalizada, é preciso aprender a fabricar problemas para se tornar capaz de resolvê-los. Na análise da atividade de fabricação/resolução de problemas devemos distinguir dois tipos: os problemas de aplicação e os problemas de exploração. É preciso ainda levar em conta o fato de que estes tipos de problemas mobilizam ao menos dois registros de representação, mais geralmente três. Este artigo compreende quatro partes. Na primeira, destacaremos os quatro fatores que comandam a elaboração de um problema de aplicação a partir de um tratamento matemático elementar. Na segunda, mostraremos porque a resolução de um problema implica em uma atividadade cognitiva diferente e mais complexa do que aquela requerida na sua elaboração. É esta atividade de resolução de problema que constitue, realmente, o que é solicitado ao aluno. Na terceira parte deste artigo, apresentamos o tipo de tarefa requisitada para se aprender a elaborar, a partir de um tratamento matemático elementar, não um único problema, mas uma grande variedade. Na última parte, mostraremos que os problemas de exploração exigem atividades de conversões diretas e de conversões inversas que são ainda mais importante do que aquelas requisitadas em problemas de aplicação.

Palavras-chave: Resolução de problemas. Elaboração de problemas. Problemas de aplicação. Problemas de exploração. Conversão direta. Conversão inversa. Tratamento matemático elementar. Descrição completa. Descrição minimal.

Abstract

The problems that are given in education are problems that have been built in order to introduce students to some mathematical knowledge or make them use it. But problem solving remains always a black box for most students, and does not teach them to recognize the relevant mathematical knowledge to use when they are faced with situations of reality. In this paper we show that problem building and problem solving are two sides of the same activity, and why, unlike the institutional practice, one must first learn how to build problems to become truly able to solve problems. In order to analyze this activity of problem building/solving, we must distinguish two kinds of problems: application problems and exploration problems. We must also take into account the fact that these two kinds of problems mobilize at least two registers of representation, usually three. This paper is made up of four sections. In the first, we identify the four factors that determine any application problem building from an elementary mathematical treatment. In the second, we show why solving a problem requires a cognitive activity different and more complex than that required to build it. Nevertheless it this activity which is the real workload asked students. In the third, we present the kind of task required to learn how to build, from an elementary mathematical treatment, not a problem but a wide variety of problems. For application problems, it is necessary to substitute the notion of problem field to that of problem. In the last part, we show that the exploration problems require an activity of direct conversion and reverse conversions, which is greater and more complex than that required for the application problems.

Keywords: Problem solving. Problem building. Application problem. Exploration problem. Elementary mathematical treatment. Direct conversion. Reverse conversion. Whole description. Minimal description.

La résolution de problème est le lieu où l'enseignement des mathématiques se trouve en porte-à-faux avec son principal objectif d'éducation. La résolution de problème est, en effet, la seule situation pour apprendre les mathématiques puisque « faire des mathématiques » c'est résoudre des problèmes, et que les mathématiques permettent de résoudre de nombreux problèmes dans tous les domaines de la réalité. Mais, dans les classes, elle est source de blocages ou d'échecs insurmontables pour la très grande majorité des élèves. La résolution de problème est et reste la boîte noire de l'apprentissage des mathématiques. Pour comprendre ce dysfonctionnement didactique il faut s'interroger sur qu'est un problème de mathématiques et sur la manière dont la résolution des problèmes est habituellement analysé

Les problèmes donnés dans l'enseignement sont toujours des problèmes fabriqués dans le but de faire utiliser une procédure ou une propriété mathématique. Le travail de résolution est toujours analysé par rapport à la solution mathématique, c'est à dire par rapport à l'utilisation de la procédure, ou de la propriété, qui a commandé la fabrication du problème. Cela conduit donc à expliquer les erreurs et les échecs des élèves comme « misconception », ou « en voie d'acquisition » ou encore de «non-acquisition» de la procédure ou de la propriété à utiliser. Mais ce type d'analyse revient à négliger les questions suivantes qui se posent pourtant pour tous les problèmes et quels que soient les « concepts » à utiliser. Comment reconnaître la propriété ou la procédure à utiliser? Et même si elle a été suggérée au cours d'un échange, comment l'utiliser en prenant bien compte toutes les données du problème, sans en oublier ou sans se méprendre sur leur signification? Enfin, lorsque la solution a été bien expliquée au terme d'une séquence didactique, comment peut elle être appliquée à d'autres problèmes qui paraissent proches ou qui paraissent n'avoir rien de commun? Et le cycle des difficultés recommence. Il n'y a pas de transfert dans l'activité de résolution des problèmes de mathématiques.

Résoudre un problème est une activité qui ne peut pas être analysée uniquement du point de vue mathématique. Le point de vue cognitif est au moins aussi important, si l'on veut que la résolution de problèmes fonctionne réellement comme situation d'apprentissage et, surtout, que tous les élèves deviennent capables d'utiliser les connaissances acquises pour résoudre les problèmes qu'ils rencontreront dans n'importe situation de la réalité. Dans cet article, nous allons développer l'analyse cognitive de ce qu'est un problème mathématique et de ce qui rend les élèves capable de les résoudre. Car d'un point de vue cognitif, la capacité à résoudre des problèmes dépend de la compréhension du processus de fabrication des problèmes.

***

Tous les problèmes didactiques, c'est à dire tous les problème fabriqués pour faire découvrir une propriété ou une procédure, ou pour en évaluer l'acquisition, peuvent se regrouper en deux grands types: les problèmes d'application et les problèmes d'exploration. Dans les problèmes d'application il s'agit d'utiliser une connaissance mathématique pour résoudre un problème. Dans les problèmes d'exploration il s'agit d'observer des phénomènes comme la progression d'une suite de nombres ou les variations d'une figure, etc. pour dégager une formule générale qui décrive la progression ou d'identifier des invariants ou encore de déterminer un minimum ou un maximum. Ces deux types de problème se distinguent essentiellement par la manière dont on accès aux données du problème. Dans les problèmes d'application toutes les données nécessaires pour obtenir l'information cherchée sont fournies au départ. Dans les problèmes d'exploration, au contraire, il y a seulement un champ d'exploration qui est déterminé par une règle de production, et on a toute liberté pour produire soi-même les données en fonction des observations que l'on fait. Ces problèmes conduisent le plus souvent à l'élaboration de conjectures. Les problèmes de démonstration sont d'un autre type (Duval, 2007, 2011). Nous ne les prendrons pas en compte ici, parce que les objectifs de l'enseignement général des mathématiques sont maintenant centrés sur l'utilisation pratique des connaissances et tendent à exclure les démonstrations.

***

Pour montrer comment et pourquoi la capacité à résoudre les problèmes mathématique implique la capacité à poser soi-même des problèmes, nous allons suivre la démarche suivante.

Tout d'abord, pour analyser le processus de fabrication des problèmes d'application nous utiliserons la distinction entre description complète d'un traitement mathématique élémentaire et description minimale des données d'un problème. Elle permet de mettre en évidence la présence de quatre facteurs intervenant dans le processus de fabrication. Chaque facteur contribue à déterminer un niveau spécifique d'organisation et de représentation des données d'un problème. On est ainsi conduit à substituer la notion de champ de problème à celle de problème. Tout problème d'application est seulement un problème particulier dans un champ très vaste de problèmes possibles.

L'activité cognitive requise pour résoudre ces problèmes consiste à refaire à l'envers les conversions successives de représentations des données qui sont faites pour fabriquer un problème. Cela veut dire que les élèves doivent d'abord être capables de distinguer les niveaux de représentation des données qui sont superposés ou mélangés dans l'énoncé verbal ou dans les figures. C'est la condition cognitive pour pouvoir reconnaître TOUTES les données du problème, les « informations utiles», de l'énoncé. Le travail de résolution commence donc par des conversions inverses. Or elles sont cognitivement plus complexes que celles, directes, faites pour fabriquer le problème. Car, il y a plusieurs alternatives possibles pour chacune. Le choix de la conversion inverse pertinente dépend souvent de la manière dont les autres données sont verbalement qualifiées et du nombre de données manquantes.

Nous pourrons alors voir pourquoi il faut sortir de la pratique institutionnelle, jamais remise en question, qui sépare et cloisonne les deux activités de fabrication et de résolution de problèmes en deux rôles institutionnels. Aux enseignants, aux auteurs de manuels, le rôle de construire des problèmes, et aux élèves celui de les résoudre! Il faut, au contraire, faire découvrir aux élèves comment ils peuvent eux-mêmes fabrique une variété de problèmes à partir d'un traitement mathématique élémentaire. C'est la condition pour qu'ils deviennent capables de reconnaître quand, où, et pourquoi une connaissance mathématique peut être utilisée pour résoudre un problème. La capacité à résoudre des problèmes ne se développe pas à partir de problèmes particuliers, mais dans la prise de conscience du champ de problèmes possibles qu'un traitement mathématique élémentaire permet de résoudre. Pour cela, des tâches spécifiques doivent être organisées en fonction des facteurs qui interviennent dans la fabrication d'un problème d'application, et non pas en fonction d'un contenu mathématique.

Enfin nous analyserons les problèmes d'exploration. A la différence des problèmes d'application, ils ne comportent aucune donnée autre qu'une règle de production de données. Il n'y a donc pas besoin d'apprendre à les fabriquer pour pouvoir les résoudre. En revanche, le travail d'observation requis pour établir la conjecture d'une formule, d'une invariance ou pour identifier un minimum exige une activité de transformation de représentations sémiotiques comme pour les problèmes d'application. Et cette activité cognitive est plus diversifiée et plus complexe que celle mobilisée pour résoudre les problèmes d'application. Car il faut être capable d'effectuer des traitements dans deux registres différents pour produire les données nécessaires à l'observation. Et il faut être aussi capable d'effectuer les conversions concomitantes pour voir dégager une formulation littérale, identifier un minimum, énoncer une propriété. Autrement dit, ce type de problème exige que les élèves aient déjà pris conscience des opérations de transformation qui sont propres à chaque registre mobilisé pour explorer dans un registre, et qu'ils soient aussi capables de mettre en correspondance certains éléments des contenus de deux représentations produites dans deux registres différents.

***

Les analyses cognitives seront faites chaque fois sur deux ou trois problèmes qui apparaissent semblables mais dont les solutions mathématiques sont différentes. Nous avons choisi t les plus élémentaires possibles parmi ceux qui sont fréquemment donnés au Primaire ou Collège.

Les problèmes plus élaborés ou plus longs ne sont que des problèmes gigognes qui utilisent successivement le même traitement mathématique élémentaire ou des traitements différents.

La méthode d'analyse est celle des registres de représentation sémiotique. La première règle est la séparation des deux types de transformations de représentations qui permettent de trouver la solution mathématique d'un problème. On liste ainsi les différentes représentations sémiotiques que les élèves doivent être capables de produire, et dont ils doivent aussi pouvoir reconnaître l'équivalence sémantique pour pouvoir trouver la solution ou, plus simplement, en comprendre l'explication. Des exemples en sont donnés dans des tableaux (Figures 1, 4, 6, 7, 8, 9). On pourra commencer par les regarder avant d'entrer dans les différentes analyses.

I. La fabrication des problèmes d'application.

Pour analyser la structure des problèmes donnés dans l'enseignement, il faut partir de la notion de *traitement mathématique élémentaire*. Cette notion revient à envisager une propriété mathématique ou une procédure sous la forme où elle est directement utilisable pour effectuer un traitement du type calcul ou inférence. Ainsi une opération arithmétique correspond à un traitement mathématique élémentaire. Ce traitement comporte trois nombres dont deux sont associés par un symbole d'opération, le troisième leur étant lié par un symbole de relation. De même, une propriété correspond au schéma d'implication sous-jacent aux définitions et aux énoncés des théorèmes. Ce schéma permet d'affirmer une propriété lorsque certaines conditions sont données à titre d'« hypothèses » ou à titre de conclusions antérieures. Cette notion de traitement mathématique élémentaire permet de distinguer quatre niveaux dans le fabrication d'un problème d'application.

I.1. Les problèmes utilisant les opérations arithmétiques

(1) La **description complète d'un traitement mathématique élémentaire**. Elle consiste dans *le nombre de DONNEES qu'un traitement mathématique élémentaire permet de prendre de compte*. Elle se fait dans le registre de l'écriture symbolique de relations entre des nombres, ou entre des lettres qui ont un statut d'inconnue, de variable, etc. Une description complète prend ainsi la forme d'une égalité numérique, d'une équation, d'un système d'équations, etc.

Ainsi une opération arithmétique correspond à une description complète de trois données, chaque donnée correspondant à un nombre:

$$\mathbf{(-2) + (+3) = 1}$$

Mais une description complète peut associer deux opérations arithmétiques, et comporter quatre données:

$$\mathbf{2 + (2 + 1) = 5}$$

On voit qu'une description complète correspond au résultat d'un traitement mathématique élémentaire ou de l'association de plusieurs traitements mathématiques élémentaires. Il n'y a évidemment aucun problème dans une description complète. Mais *elle constitue la grille d'analyse pour identifier, dans une situation, les informations qui vont prendre le statut de données et permettre ainsi de poser un problème que l'on peut résoudre* en utilisant ce traitement mathématique élémentaire.

(2) La **description minimale d'un traitement mathématique élémentaire**. Elle consiste dans la réduction des données au minimum requis pour retrouver celles qui sont supprimées, ou qui manquent, en utilisant un traitement mathématique élémentaire.

Pour une description complète, il y a plusieurs suppressions possibles de données et donc plusieurs descriptions minimales différentes possibles. Ainsi, pour description complète avec une seule opération arithmétique, on peut supprimer à la fois l'une des trois données numériques et le symbole de l'opération. Il y a donc trois descriptions minimales possibles, chacune comportant deux données numériques et une donnée manquante. Pour laisser ouvert le choix entre l'opération et l'opération opposée, on peut le remplacer le symbole d'opération par le connecteur logique « ET »[1]:

$$(-2)\ \text{ET} \ldots = 1$$

Pour une description complète avec deux opérations arithmétiques, mais dont la seconde porte sur une comparaison entre deux des nombres de la première opération, les descriptions minimales comportent deux données numériques et deux données manquantes.

$$\ldots\ \text{ET}\ (\ldots\ \text{ET}\ 1) = 5$$

[1] Cette suggestion nous a été faite par le professeur Luiz Gonzaga Xavier de Barros.

Tous les problèmes fabriqués pour faire faire le « passage de l'arithmétique à l'algèbre » sont dérivés d'une description complète de ce type.

(3) **L'application d'une description minimale à une situation de la réalité**. *Elle exige le recours à un deuxième registre de représentation sémiotique pour décrire ou pour visualiser les DONNEES NON-NUMERIQUES. Ce deuxième registre peut être celui de la langue naturelle, ou celui des configurations géométriques si les descriptions minimales se réfèrent à une propriété géométrique.*

L'application d'opérations arithmétiques à une situation de la réalité requiert la qualification verbale des données numériques recueillies selon un couple d'expressions antonymes. Les termes antonymes indiquent la valeur d'entier positif ou négatif correspondant à chaque donnée numérique indiquée. Car dans la réalité les données numériques correspondent à des grandeurs ou des quantités.

Dans les problèmes à une seule opération arithmétique, les expressions antonymes sont des verbes (gagner/perdre ou avancer/reculer, etc.) ou des adverbes (… de plus que… , …de mois que…). Evidemment les deux données numériques peuvent être qualifiée par le même verbe ou se trouver opposées par les deux verbes antonymes. Autrement dit, *un calcul portant sur des quantités ou des grandeurs se fait avec les entiers relatifs*. Un changement de la qualification verbale d'une donnée numérique entraîne soit le changement d'entier positif en entier négatif, ou inversement, soit un changement dans l'interprétation du connecteur « ET », c'est à dire dans le choix de l'opération arithmétique à effectuer.

Dans les problèmes fabriqués pour faire faire le « passage de l'arithmétique à l'algèbre », la comparaison entre les deux données manquantes peut être décrite par des expressions comme « plus grand que » ou « plus petit que ». Et cette expression correspond à une opération arithmétique:

(… ET …) = 1

ou

((… ET 1) ET …) = 5

Les flèches explicitent la possibilité d'employer une même lettre pour *désigner DEUX OCCURRENCES de la même donnée manquante* dans le registre des écritures symboliques.

(4) **La scénarisation d’un problème.** *Elle consiste dans la description qui évoque une situation concrète que l’on suppose familière ou motivante pour les élèves.* Ainsi il ne faut pas confondre la qualification verbale des données numériques avec la description verbale d’une situation concrète. Par exemple, le couple antonyme { gagner, perdre } appliqué à l’une des descriptions minimales d’une opération arithmétique peut être utilisé dans une grande variété de situations concrètes de jeux, d’échanges, et.

La scénarisation des problèmes de mise en équation peut même prendre un caractère surréaliste comme dans cette description:

> En rassemblant toutes les poules et les moutons d’une ferme, on compte 37 têtes 96 pattes. Combien y a-t-il de poules et de lapins dans votre ferme?

Ce problème a donc deux données numériques et quatre données manquantes ou, plus exactement, deux couples de données manquantes. Car, dans cet énoncé, les données manquantes sont sémantiquement liées par la connaissance empirique qu’une poule a deux pattes et un mouton quatre! Cette connaissance empirique évite de faire appel à des expressions comparatives comme dans le domaine précédent: « un mouton a *deux fois plus de* pattes qu’une poule »! Cependant elle doit être explicitée pour être convertie en une seconde opération arithmétique: (… ET …) = 2.

La scénarisation d’un problème constitue le niveau de surface dans la structure d’un problème. Mais c’est celui auquel les enseignants accordent une grande importance lorsqu’il s’agit de choisir des problèmes. Et, hélas, ce niveau n’est pas réellement distingué du précédent même dans les recherches didactiques.

Le tableau ci-dessous montre comment la structure des problèmes d’application repose en fait sur une double formulation: l’une dans un registre d’écriture qui permet un calcul de trouver les données manquantes à partir de celles indiquées dans l’énoncé, et l’autre dans un registre qui permet la description verbale ou qualitative des données numériques et des données manquantes.

Figure 1 – Analyse comparative de la structure d'un problème.

I. DESCRIPTION COMPLETE correspondant à un traitement mathématique élémentaire	**(–2) + (+3) = 1** *Trois données numériques*	**2 + (2 + 1) = 5** ou **3 + 2 = 5** et 3 – 2 =**1** *Quatre données numériques,* l'opération associée portant sur la comparaison de deux données de la première)
II. DESCRIPTION MINIMALE par suppression d'une ou de deux données	(–2) ET … = 1 (une des trois descriptions minimales possibles)	**… ET (… ET 1)** = 5 (la description minimale la plus intéressante)
III. APPLICATION A LA REALITE **par des expressions verbales qui reliant les nombres** *à des quantités dénombrées ou des grandeurs mesurées.*	**perd 2** ET… **en tout gagne 1**	… **1 de plus que**… et **en tout.**
IV. Scénarisation d'une situation concrète. **DOUBLE FORMULATION D'UN PROBLEME:** énoncé ET égalité numérique ou équation Le passage d'une formulation à l'autre relève d'une **CONVERSION**.	P. joue une partie et **perd 2** billes. Il joue une deuxième partie. **En tout il a gagné 1** billes. Que s'est-il passé à la 2ème partie? **(–2) ET …. = 1** Les « problèmes additifs »: équivocité à la fois des verbes et des signes (+ et –)	Un journal **et** son supplément coûtent **5 reals**. Le journal coûte **1 real de plus que** son supplément. Combien coûte le journal? **b + (b +1)** = 5 Introduction **d'une même lettre pour les deux données manquantes**: désignation directe et désignation fonctionnelle

I.2. Les problèmes utilisant des propriétés géométriques.

La même analyse peut être faite pour les problèmes fabriqués pour utiliser une propriété géométrique. La différence à prendre en compte vient du caractère « biface » des données. D'un côté elles renvoient à la superposition de deux types de visualisation, et, de l'autre côté, à l'écriture symbolique ou numérique d'une relation entre grandeurs.

Prenons l'exemple de la propriété énocée comme le « théorème direct de Thalès » ou *l'excerpt theorem*. Son intérêt est de permettre le calcul de la grandeur ou de la distance des objets inaccessibles *dont on peut seulement viser un point*: la hauteur d'un immeuble, d'une montagne, la distance d'un bateau éloigné de la côte, etc. L'utilisation de ce théorème pose deux questions:

— Quelles données numériques relever physiquement pour pouvoir calculer une grandeur ou une distance que l'on ne peut pas mesurer?

— Quelle relation mathématique utiliser pour pouvoir la calculer à partir des mesures réellement faites sur le terrain?

Ces deux questions sont inséparables. La relation mathématique qui permet à la fois de déterminer quelles données numériques relever physiquement et de calculer la distance non mesurable, et de choisir l'égalité de deux rapports de grandeur pertinente. Mais, bien qu'inséparables, ces deux questions ne peuvent pas être confondues. Car *la réponse à la première dépend des points de repères d'où on peut viser l'objet inaccessible* et entre lesquels on peut effectuer des mesures. Mais la réponse à la seconde question dépend du choix entre les différentes égalités de rapports de grandeurs correspondant à l'énoncé du théorème. Les données ont donc deux faces: l'une relative à la configuration géométrique et à sa mise en correspondance avec des repères sur le terrain, et l'autre relative à l'écriture symbolique d'égalités de rapports.

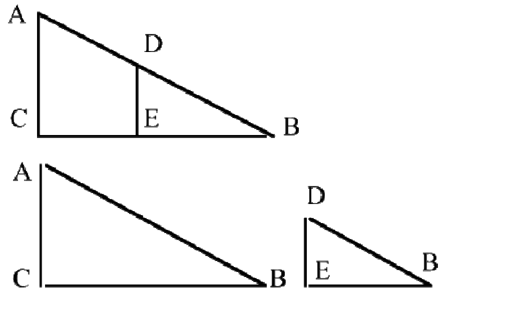
Soit la scénarisation d'une des descriptions minimales possibles du théorème:

> Pour mesurer la hauteur d'un arbre, on tient verticalement un bâton de 3 mètres, à 10 mètres du pied de l'arbre. En posant la tête à même le sol à 2 mètres du bâton, on voit son sommet aligné avec celui de l'arbre. Quelle est la hauteur de l'arbre.?

Nous pouvons donc y distinguer les trois niveaux sous-jacents.

(1) La description complète du traitement mathématique. Elle comporte l'écriture symbolique de quatre égalités de rapports de longueurs. Trois se réfèrent aux côtés de deux triangles ayant un sommet commun et dont les côtés respectifs opposés à ce sommet sont parallèles. La quatrième égalité correspond au gnomon des ombres: dans deux triangles, dont les côtés sont parallèles ou alignés, mais n'ayant pas de sommet commun, les longueurs des côtés du petit triangle sont respectivement proportionnelles à celles des côtés du grand triangle. Naturellement, une description complète peut comporter deux traitement élémentaires, c'est à dire à deux égalités différentes à utiliser.

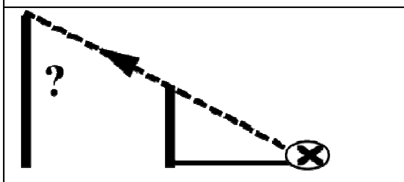
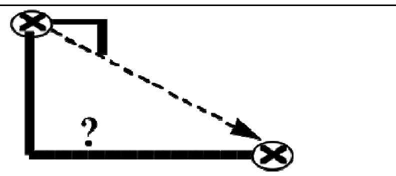
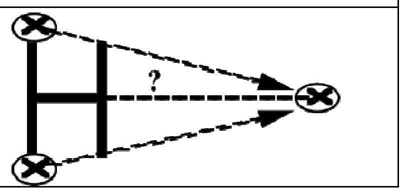
Figure 2 – Description complète sous condition de parallélisme de deux côtés.

	BA/ BD = BC/BE BA/ BD = AC/DE BC/BE = AC/DE DE/ EB = AC/CB (le gnomon et les ombres)

(2) La description minimale concerne le choix d'une des quatre égalités de rapports de longueurs et requiert, pour l'égalité de rapports choisie, trois données numériques. Elles sont fournies dans l'énoncé: **3** mètres, « **10** mètre de .. », « à **2** mètres de.. ». La donnée manquante est désignée verbalement « la hauteur de l'arbre ».

(3) L'application à la réalité ne se fait ni par le langage, ni par les configurations géométriques, mais par l'élaboration de schémas de visée. Dans un schéma de visée, *tous les objets sont réduits à des points et le schéma met en évidence les relations topologiques qui les* relient. Ces schémas correspondent aux différentes situations réelles de visée. Le choix d'une des d'une des quatre égalités de rapports de longueurs est donc imposé par les points de repère dont on dispose sur le terrain. Les qualifications verbales des données numériques comme « **à** 2 mètres **de** … » désignent une position dans la schéma de visée.

Figure 3 – Schémas de visée et choix d'une description minimale.

Visée d'un sommet à partir du sol	Visée d'un objet au niveau 0 à partir d'un sommet	Double visée d'un objet éloigné
		

La situation de double visée d'un objet éloigné implique une description complète qui ne comporte pas une seule égalité de rapports de grandeur, mais deux. Dans ce cas, il faut utiliser une égalité intermédiaire. La description minimale comporte alors deux données manquantes.

(3) La scénarisation du problème porte sur le choix de l'objet inaccessible dont il faut calculer soit la grandeur soit la distance d'éloignement. Ce peut être la hauteur d'un arbre ou celle

d'une pyramide. La scénarisation fait appel à des images d'objets ou à des photographies. C'est une représentation iconique, mais d'une tout autre nature que le schéma de visée, car *elle représente les objets eux-mêmes par leur contour, en les juxtaposant.* La description verbale d'une situation concrète correspond alors à celle d'une image concrète.

Il y a des différences profondes de fonctionnement cognitif entre ces trois types de visualisation que tous les problèmes utilisant des propriétés géométriques conduisent à superposer en une seule « figure ». Mais cette superposition permet de changer la distance entre deux points de repères (1D), qui se visualise en un schéma de visée, en la grandeur d'un objet (sa «hauteur» par exemple) qui, elle, se visualise par le côté d'une configuration triangulaire (2D). On a donc là deux descriptions verbales sémantiquement équivalentes d'un point de vue mathématique!

I.3. Structure des problèmes et génération d'un champ de problèmes

La distinction de quatre niveaux dans la structure des problèmes permet de *comprendre comment on peut fabriquer un corpus considérable de problème*s *à partir d'un traitement mathématique élémentaire.* Chacun des quatre niveaux correspond en fait à un facteur de variation dans la manière d'utiliser un traitement mathématique élémentaire.

(F1.1) La description complète d'un traitement mathématique élémentaire indique toutes les données numériques et symboliques (symboles d'opération et de relation) constituant ce traitement. Elle peut aussi condenser sa double utilisation, comme tous les problèmes destinés à favoriser le passage de l'arithmétique à l'algèbre et qui peuvent aussi bien être résolus de manière arithmétique que par une mise en équation.

(F1.2) La description minimale d'une situation est évidemment le premier facteur essentiel de variation dans la fabrication d'un problème. Le nombre des descriptions minimales possibles dépend de la variation des données que l'on peut supprimer.

(F2.1) L'application d'une description minimale à une situation de la réalité est le deuxième facteur essentiel de variation dans la fabrication d'un problème. Il exige la mobilisation d'un deuxième registre pour qualifier les données numériques fixées ainsi que les données manquantes. La qualification des données, qu'elle soit verbale, figurale ou schématique **permet de diversifier** les utilisations possibles de chaque description minimale en fonction des situations différentes que l'on peut rencontrer dans la réalité. Car avec leur qualification verbale ou leur qualification figurale *les données numériques, ou littérales, d'une description minimale prennent un caractère « biface ».*

(F2. 1) La scénarisation renvoie à toutes les situations particulières qui relèvent de la même application d'une description minimale. Les situations sont choisies en fonction de ce que l'on suppose familier ou intéressant pour les élèves. Mais en réalité *ce facteur est neutre pour la compréhension des problèmes,* pour leur résolution et surtout pour devenir capable d'utiliser des connaissances mathématiques pour résoudre des problème de la réalité. Car le seul point important de reconnaître à quelle description minimale correspond un problème rencontré concrètement.

Ces quatre facteurs permettent de construire l'arbre de tous le problèmes possibles utilisant un même traitement mathématique élémentaire. L'ensemble des problèmes que l'on peut ainsi générer avec ces quatre facteurs constitue ce que nous appellerons un champ de problème. Mais deux facteurs seulement sont mathématiquement essentiels pour la fabrication et la résolution de problèmes, les facteurs F1.2 et F2.1. *Car ils constituent les deux formulations sémantiquement équivalentes d'un problème:* l'une dans le registre monofonctionnel des écritures symboliques de relations, lequel permet de calculer, et l'autre dans le registre multifonctionnel de la langue naturelle ou dans celui de la visualisation géométrique. Les deux autres facteurs dépendent soit du moment dans l'organisation curricula ire de l'acquisition de connaissances (F1.1) soit de l'innovation pédagogique ou didactique pour motiver les élèves ou pour justifier l'introduction d'une nouveau « concept » ou d'une nouvelle procédure (F2.2).

On peut ainsi montrer que tous les problèmes didactiques construits à des fins d'apprentissage ou d'évaluation résultent des choix qui sont implicitement ou explicitement faits pour chacun des quatre facteurs de variation. *Chaque problème donné aux élèves n'est que l'une des nombreuses variantes terminales possibles dans l'arbre des problèmes que ces quatre facteurs permettent de construire.* Autrement dit, ce ne sont pas les problèmes qui sont importants — car ils ne sont que l'une des variantes terminales possibles que l'on va considérer indépendamment des autres —, mais le champ de problèmes. Cela entraîne deux conséquences pour tous les problèmes d'application:

— l'analyse a priori d'un problème consiste à le situer dans le champ de problèmes qu'on peut fabriquer à partir de l'utilisation d'un traitement mathématique élémentaire.

— Résoudre un problème, c'est faire à rebours le processus de sa construction, en partant de la scénarisation pour retrouver la description complète initiale.

(4) Pourquoi les problèmes restent-ils la boite noire de l'enseignement des mathématiques?

Cette question constitue, avec celle de la démonstration, le défi majeur de l'enseignement des mathématiques. Mais elle presque toujours ignorée dans les travaux didactiques toujours en quête d'un bon problème pour l'enseignement. Or la fabrication et le choix des problèmes donnés aux élèves sont aléatoires, même s'ils sont motivés par l'objectif de l'acquisition d'une connaissance et par l'intérêt qu'ils doivent susciter chez les élèves. Car les « auteurs » de problèmes et les enseignants lorsqu'ils choisissent des problèmes dans un manuel, ne prennent pas en compte le champ des problèmes, mais s'en tiennent chaque fois à un problème particulier. Le caractère équivoque de ce qu'on appelle « un problème » apparaît à travers les discussions qui surgissent régulièrement autour des activités qui sont données aux élèves dans un but d'apprentissage. On peut les regrouper autour de quatre interrogations.

Q.1 Qu'est-ce qu'un problème dans l'enseignement des mathématiques?

Cette question est posée de manière purement différentielle, en opposant problème et simple exercice, ou encore vrai ou faux problème. Ainsi les problèmes additifs à une seule opération sont ils des problèmes ou de simples exercices? Et les problèmes arithmétiques fabriqués pour motiver l'introduction de l'algèbre sont-ils plus des problèmes que les problèmes additifs? La présentation d'une description minimale (F1. 2) sans aucune qualification verbale ou figurale des données numériques (F2.1) peut elle considérée comme un simple exercice ou comme un problème? Ou bien, le critère qui permet de distinguer un problème et un exercice est-il dans le nombre des données manquantes, le fait qu'il n'y ait qu'une seule donnée manquante excluant que cela puisse être un problème?

Q.2 Les problèmes doivent-ils être posés dans le contexte de situations réelles et pratiques?

Cette question manifeste les deux préoccupations majeures d'un enseignement des mathématiques pour tous les élèves jusqu'à seize ans Il y a les difficultés spécifiques de compréhension auxquelles l'enseignement des mathématiques se heurte systématiquement. A la différence de toutes les connaissances dont les processus d'acquisition et la validation se fondent sur l'observation et sur l'expérience, les mathématiques apparaissent vite inaccessibles, parce que « théoriques », « abstraites » , sans autre commencement qu'en elles-mêmes. Aussi la nécessité pédagogique d'une approche pragmatique, ancrée dans des problèmes réels, s'est elle imposée. Et il y a l'objectif général d'un enseignement commun des mathématiques. Les élèves doivent non seulement prendre conscience que les mathématiques sont utiles dans n'importe quelle activité professionnelle, mais ils doivent surtout *savoir les utiliser* dans toutes les circonstances où ils auront des problèmes à résoudre. la scénarisation des problème est ainsi privilégiée.

Ces deux préoccupations condusient, en réalité, à méconnaître complètement la distance cognitive considérable qui existe entre une connaissance mathématique et son application dans une situation réelle.

Q.3 Comment déterminer le rapport entre résolution de problème et acquisition de connaissance?

Le critère d'acquisition réelle d'une connaissance est sa mobilisation spontanée dans des situations totalement différentes de celle où elle a été apprise. Ainsi la capacité à utiliser des connaissances pour résoudre des problèmes ne se détermine par la réussite locale à quelques problèmes, mais par la capacité à résoudre n'importe quel problème appartenant au même champ de problèmes. Ainsi, la réussite à certains problèmes et un échec répété aux autres problèmes d'un même champ signifient-t-ils l'absence d'une réelle acquisition par les élèves ou, au contraire faut-il introduire *a posteriori* une classification locale des problèmes et parler d'étapes dans l'acquisition des connaissances? Cette question n'a rien de théorique. Les nombreuses recherches qui ont été faites, depuis 1978, sur les problèmes additifs viennent l'illustrer. Ainsi on a systématiquement choisi la deuxième alternative, mais sans jamais obtenir d'acquisition réelle pour l'énoncé le plus difficile, celui avec deux verbes antonymes et dont la question porte sur la transformation initiale (Duval, 2012). Les mêmes constats peuvent être faits pour les problèmes de mise en équation, ou ceux qui requièrent l'utilisation d'une propriété géométrique.

L'échec du transfert de la résolution d'un problème à celle des autres problèmes du même champ apparaît surtout dans les périodes de transition d'un cycle d'enseignement à un autre, du primaire au collège ou du collège au lycée, et non pas à l'échelle locale d'une séquence d'activités qui a pour (sous)-objectif l'acquisition d'une procédure ou d'une notion particulières. Elle apparaît également avec la résolution de problèmes réels. Non seulement elle présuppose l'acquisition de la connaissance mathématique à appliquer, mais aussi *la* *capacité à reconnaître quand et comment l'utiliser.* Il y a là une circularité didactique dont la complexité cognitive est méconnue ou simplement niée.

Q.4 Pourquoi les problèmes sont-ils toujours présenté de manière unilatérale?

Cette question n'est jamais abordée dans les recherches didactiques. Et pourtant elle porte sur les deux caractéristiques de la structure des problèmes didactiques. L'une est *la variation des descriptions minimales qui détermine les différentes possibilités mathématiques d'utiliser un traitement mathématique élémentaire* dans le contexte d'une activité mathématique dans celui d'un problème réel. L'autre est *l'équivalence sémantique entre deux formulation des données d'un problème* (*supra,* Figure 1). C'est cette double formulation qui permet de considérer les connaissances mathématiques comme une modélisation de situations réelles et de les utiliser pour résoudre les problèmes qu'elles posent. Sans cette double formulation les problèmes ne pourraient être résolus mathématiquement ou ne seraient que des problèmes mal posés.

Or ce qu'on donne aux élèves comme problème à résoudre c'est seulement une des descriptions minimales possibles à partir d'une description complète (F1.2), et toujours sous la forme d'un énoncé dans lesquelles les données sont qualifiées, verbalement, figuralement et souvent iconiquement (F2.1 et F.2.2). Cela revient à aplatir les niveaux qui constituent la structure du problème et à neutraliser les facteurs de variation auxquels ces niveaux correspondent. Tout problème posé devient ainsi une boite noire. Comment alors ne pas confondre les éléments de ces différents niveaux que l'énoncé du problème semble réduire à un seul?

II. Résoudre un problème: quel travail réel pour l'élève?

La résolution mathématique d'un problème d'application comprend essentiellement deux étapes:

— Convertir les qualifications verbales des données ou la visualisation des rapports géométriques entre ces données en l'écriture de la description minimale correspondante.

— Effectuer l'opération, ou les opérations, correspondant à cette écriture minimale qui permettent de retrouver la description complète initiale d'un traitement élémentaire et donc les données manquantes.

Et c’est là que surgissent des difficultés qui n’existent pas dans la fabrication d’un problème. Elles concernent les conversions inverses à effectuer ou la discrimination visuelle des unités figurales pertinentes, laquelle va souvent contre la reconnaissance perceptive spontanée de formes. Autrement dit, la complexité de la résolution de problèmes vient de la première étape, celle des conversions, et non pas au calcul à effectuer à partir de la description minimale.

II.1 Face à un énoncé « sans prises » qui laisse perplexe

Les énoncés de problèmes apparaissent uniformes et indifférenciables aux yeux des élèves. Les seules différences frappantes concernent uniquement la variation des situations concrètes évoquées (F.2.2). Les difficultés de compréhension viennent de ce que toutes les données à prendre en compte sont d’abord verbales et non pas numériques, et relatives aux relations entre certaines unités figurales d’une figure. Le premier travail à faire consiste alors en une double tâche de reconnaissance et une tâche d’organisation:

(1) Reconnaître les qualifications verbales, ou les relations entre des unités figurales, qui sont mathématiquement requises pour retrouver la description minimale.

(2) Reconnaître le traitement mathématique élémentaire qui permet de retrouver la donnée manquante ou les données manquantes.

(3) Organiser toutes les données fournies et la donnée manquante en une description minimale qui corresponde au traitement mathématique élémentaire à utiliser.

Les difficultés de la première tâche sont bien connues. Elles sont généralement associées à des difficultés de compréhension de l’énoncé c’est à dire de sélection de toutes les informations qu’il contient. Celles de la deuxième tâche sont moins apparentes pour une raison simple. Les problèmes étant posés dans le cadre de séquences d’activités visant l’acquisition d’une nouvelle procédure ou d’une nouvelle propriété, c’est le traitement mathématique élémentaire correspondant qu’il faut chercher à utiliser. La situation n’est plus la même, lorsque les même problèmes sont posés en dehors de tout contexte particulier d’enseignement, par exemple plusieurs mois ou plusieurs années plus tard (Duval, 2012). Mais les difficultés les plus profondes concernent l’organisation de toutes les données en une description minimale. Car cette organisation est une réorganisation de l’énoncé commandée par la passage d’un registre multifonctionnel —la langue commune ou l’un des registres de visualisation — à un registre spécifiquement mathématique dont l'unique fonction est le calcul. Ainsi, les problèmes dans lesquelles les difficultés rencontrées sont les plus spectaculaires, sont les problèmes demandant une mise en équation. Elles restent souvent insurmontables tout au long du curriculum.

II.2 La conversion des données non-numériques d'un énoncé de problème.

Les données non-numériques de l'énoncé ne se convertissent pas en nombres, mais en symboles d'opérations ou de relations. Cette conversion est le point crucial dans la résolution d'un problème, car la réorganisation des données de l'énoncé se fait à partir de ces deux types de symboles. Or cette conversion cognitivement complexe et elle peut varier considérablement d'un énoncé à un autre énoncé dans un même champ de problèmes.

Reprenons l'exemple des deux premiers problèmes (*supra*, Figure 1, ligne 4). Pour obtenir les égalités numériques ou littérales, à trou, qui conduisent à la solution du problème, il suffit de regarder la conversion des trois qualifications verbales suivantes en symboles d'opération ou de relation: « gagner », «perdre», « de plus que ». Dans le tableau ci-dessous, nous les avons notées respectivement C^{-1}), (C^{-2}) et (C^{-3}), parce que ce sont les conversions inverses de celles qui ont été implicitement faites en fabriquant ces problèmes.

Figure 4 – Les conversions inverses à effectuer à partir d'un énoncé de problème.

	Une seule occurrence dans l'énoncé		**Deux occurrences** (le même antonyme ou les deux)	**Une donnée manquante**	**Deux données manquantes**
Qualification verbale d'une donnée numérique	**(C^{-1})** Sens des relatifs	**(C^{-2})** Opération	**(C^{-2})** choix de l'opération	**(C^{-3})** comparaison	**(C^{-3})** désignation fonctionnelle
perd 2	(– 2)	**… –2**	**ET** (+ ou –)		
gagne 1	(+ 1)	**…** + 1	**ET** (+ ou –)		
j: 1 **de plus que** s				J – 2 =1	J – s = 1 se condense en (s+1) pour désigner j

La conversion d'une qualification verbale dépend de deux choses:

— Le fait d'être employée une ou deux fois dans l'énoncé

— Le fait qu'elle réfère à une donnée manquante ou à deux (« …de plus que … »).

Il en résulte une ambivalence sémantique qui rend équivoque la qualification verbale d'une donnée numérique et l'emploi des signes «+» et «–». Car aussi bien dans la langue naturelle, que dans l'écriture symbolique, on emploie les mêmes mots ou les même signes pour désigner le sens des entiers relatifs et les opérations, une relation organisant une égalité numérique et une relation organisant l'écriture d'un nombre (2+1).

On peut ainsi remarquer que l'occurrence d'un seul des deux verbes antonymes dans l'énoncé n'exige pas de distinguer l'opération et le sens des nombres relatifs. En revanche, lorsqu'il y a deux occurrences, les verbes référent uniquement au sens des relatifs et il faut choisir l'une des deux opérations additives. Mais rien alors n'indique laquelle choisir. De même, l'expression comparative correspond à une égalité numérique lorsqu'un des deux termes comparés est une donnée numérique. En revanche, lorsque les deux termes correspondent à deux données numériques manquantes, il faut recourir à une notation fonctionnelle et donc utiliser une lettre. On retrouve là le schéma général des problèmes de mise en équation: donner seulement la somme et la différence de deux « choses ».

Pour écrire la relation entre les données numériques, verbales et manquantes , il faut donc pouvoir effectuer au moins deux trois tâches de conversion suivantes:

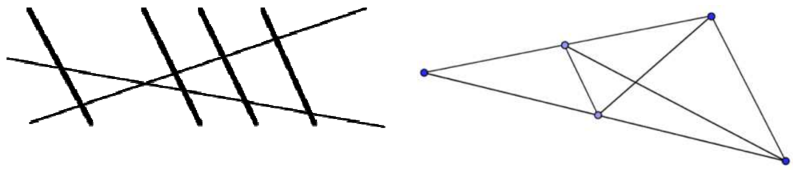
— (C^{-1}) Ecrire un nombre relatif
— (C^{-2}) Ecrire un symbole d'opération correspondant au traitement mathématique élémentaire
— (C^{-3}) Utiliser un symbole d'opération pour désigner fonctionnellement l'un des données manquantes

Comprendre un énoncé de problème c'est pouvoir effectuer ces conversions spontanément ou presque. Et c'est là que se produisent de manière systématique tous les blocages ou toutes les erreurs récurrentes, qui sont souvent insurmontables pour la grande majorité des élèves. Car il n'y a aucune règle de codage ni aucun traitement mathématique pour effectuer ces conversions, les qualfications verbales étant plurivoques. Leur interprétation dépend de deux choses qui n'ont rien de conceptuel du point de vue mathématique. Il suffit de modifier légèrement l'une des deux pour que la conversion à effectuer soit différente.

II.3 Le cas des problèmes mobilisant une visualisation géométrique.

L'utilisation des propriétés géométriques implique la mobilisation de représentations visuelles. Or les représentations visuelles qui correspondent à une description complète sont les configuration géométriques sous-jacentes à un théorème. Cette configuration géométrique est *une représentation non iconique, dans laquelle les seules unités figurales mathématiquement pertinentes sont des unités figurales 1D:* des droites parallèles, des droites sécantes et tous les segments déterminés par leurs intersections.

Figure 5 – Configurations correspondant au théorème de Thalès.



L'utilisation de ces configurations requiert *qu'on puisse d'abord reconnaître toutes les unités figurales 2D, et plus précisément de tous les triangles pris deux à deux.* Car l'écriture, littérale ou numérique, de l'égalité entre deux rapports suppose la reconnaissance des unités figurales 1D qui appartiennent respectivement à deux unités figurales 2D. Ce qui est important est l'articulation des figures géométriques avec le registre permettant d'écrire le traitement mathématique élémentaire correspond à l'énoncé du théorème (*supra*, Figure 2).

La représentation visuelle correspondant à l'application concrète de l'une des descriptions est un schéma (*supra,* Figure 3). *Ce schéma est une représentation iconique dans laquelle les unités figurales importantes sont les positions correspondant aux points de repères et au point visé dans une situation réelle*. Ici la prise en compte du parallélisme peut d'une certaine manière être négligée. Mais l'orientation verticale et horizontale des lignes reliant les points devient primordiale. Le *contour triangulaire du schéma* permet de le superposer sur des sous-figures particulières de la configuration géométrique, au risque de les faire confondre pour un jeune élève (*supra*, Figure 2).

La complexité cognitive de la première phase de compréhension et de résolution de ces problèmes ne vient pas du langage mais de la visualisation géométrique elle-même et de son articulation avec l'écriture littérale ou numérique de l'égalité de deux rapports. Pour écrire la relation entre les données numériques, verbales et manquantes, il faut donc pouvoir effectuer au moins les tâches suivantes:

— Reconnaître, parmi tous les couples de triangles ayant un côté parallèle, *le couple de triangles pertinent* en fonction des trois données numériques associées dans l'énoncé à trois des côtés de ce couple.

— Ecrire la description minimale qui correspondant au couple de triangles pertinents (*supra,* Figure 2)

— Mettre en correspondance une description minimale avec une situation ou un schéma de visée, dans le cas d'une application réelle du théorème.

Ici, les difficultés de compréhension viennent de ce que beaucoup d'élèves en restent toujours à une simple reconnaissance perceptive des figures, même après huit ou neuf années d'enseignement de la géométrie! En outre, utiliser des figures géométriques comme si elles pouvaient directement schématiser une situation de visée dans la réalité vient renforcer la confusion. Car on ne peut pas passer directement d'une figure géométrique à une situation de la réalité sans la production, implicite ou explicite, d'un schéma intermédiaire.

On prendra évidemment bien soin de ne pas confondre deux utilisations totalement différentes des propriétés géométriques. Ainsi dans le cas d'application d'un théorème, le rôle de la langue naturelle est négligeable. Mais, dans le cas des démonstrations, où le raisonnement doit exclusivement s'appuyer sur l'utilisation valide de théorèmes, le rôle de la langue naturelle devient primordial car elle devient le registre de traitement (Duval, 2007).

(3) Le recours didactique à des représentations auxiliaires.

Les problèmes les plus élémentaires exigent la conversion de toutes les données non-numériques en symboles d'opération et de relation correspondant au traitement mathématique à utiliser. Et là, face à l'énoncé, beaucoup d'élèves « ne savent pas quoi faire ». Ce blocage initial ou les erreurs initiales de compréhension renvoient toujours à la même question: *Comment distinguer, dans un énoncé, les données non numériques pertinentes de celles qui ne le sont pas?* Car, à l'intérieur d'un même champ de problèmes, il faut souvent convertir de manière différente les mêmes qualifications verbales (*supra* Figure 4), ou reconnaître dans les mêmes figures des unités figurales différentes (*supra* Figures 2, 3, 5). Le blocage des élèves, leurs erreurs de compréhension, sont le défi récurrent que les enseignants doivent relever. Comment aider les élèves à convertir des énoncés de problèmes, structurellement toujours les mêmes, en l'écriture d'une égalité numérique à trou, ou en celle d'une équation, pour parvenir à la solution?

Une grande partie de la littérature consacrée à la résolution de problèmes, depuis les années 1975-1980, porte sur cette question précise. Elle est dominée par la même idée directrice. *Il faut recourir à des représentations qui soient directement compréhensibles par tous les élèves et qui donc court-circuitent le plus possible le langage, c'est à dire le coté «verbal» de l'énoncé.* Ces représentations sont alors utilisées pour présenter plus concrètement les données du problème, ou pour servir d'intermédiaire entre l'énoncé du problème et la reconnaissance de la description minimale des données du problème. L'importance qui a été donnée aux représentations « iconiques » et aux signes utilisés dans une fonction déictique — ou à des gestes déictiques dans le cadre d'échanges oraux –, s'inscrit dans la logique de cette idée directrice. Nous qualifierons d'« auxiliaires » et de « transitoires » les représentations utilisées pour établir un pont entre l'énoncé du problème et la description minimale. Il est évidemment impossible d'évoquer les nombreuses recherches et innovations qui ont été développées dans cette perspective. Elle présentent, cependant, deux caractéristiques communes.

Tout d'abord les représentations auxiliaires restent *restreintes à un champ de problème.* Autrement dit, dès qu'on change de champ de problème, il faut changer de représentation auxiliaire. Ainsi, pour le champ des problèmes additifs, on trouve toute la gamme des représentations iconiques possibles, depuis des images de collection d'objets correspondant aux données numériques jusqu'aux schémas de transformation de Vergnaud ou aux représentations bidimensionnelles de R. Damm (Duval, 2005a; Elia, 2005). Pour les problèmes de mise en équation, c'est l'organisation des données en tableau qui s'impose. En effet, bien que l'énoncé ne comporte que deux données numériques, la description complète sous-jacente à la fabrication du problème comporte six données, recouvrant deux égalités numériques (*supra*, Figure 1). Ces six données numériques de la description complète correspondent respectivement à 3×2 cases intérieures[2] d'un tableau. Et les données verbales du problème correspondent aux marges du tableau. En fait le sous-tableau des cases intérieures doit comporter autant de lignes que d'équations à écrire (Didierjean et *alii*, 1997).

[2] Dans un tableau, il faut distinguer les cases intérieures et les marges. Les marques indiquent la nature des données numériques que l'on va inscrire dans les cases intérieures (Duval, 2003).

Pour les champs de problèmes déterminés par l'utilisation d'une propriété géométrique, la situation est plus complexe comme on l'a vu plus haut, puisqu'il faut à la fois distinguer trois types de représentations visuelles et les superposer comme si c'était la même représentation!

Ensuite, les représentations auxiliaires sont utilisées *pour présenter UN problème, c'est à dire pour présenter des problèmes PRIS ISOLEMENT*. Mais elles ne sont pas utilisées pour présenter la variation des descriptions minimales possibles qui constituent un champ de problèmes possibles. Ce champ n'est jamais réellement un objet d'étude et de prise de conscience pour les élèves. On fait comme si le travail fait en classe sur un problème, — c'est à dire sur une description minimale particulière et sur un exemple d'application à la réalité— était transférable par les élèves pour la résolution de problèmes qui se rapportent à d'autres descriptions minimales possibles et à des contextes d'application totalement différents. En outre, cela laisse entière la difficulté concernant l'articulation entre la représentation auxiliaire utilisée, qui est essentiellement *iconique,* et le *langage* toujours mobilisé. Car les explications que l'enseignant donne sur les propriétés ou sur les procédures à utiliser sont faites *oralement,* et donc dans le même registre discursif que *l'énoncé écrit du problème*.

On peut donc se demander si le recours à des représentations auxiliaires permet d'atteindre les objectifs de formation de l'enseignement des mathématiques: développer la capacité à résoudre des problèmes en utilisant des connaissances mathématiques qui relèvent de l'arithmétique, que de l'algèbre élémentaire, la géométrie, etc.

(4) La résolution algorithmique des traitements mathématiques élémentaires mobilisés dans la description complète: les calculs.

Elle commence lorsque le traitement mathématique a été reconnu et écrit. Car très peu de calculs se font sans un support écrit: papier, tableau, écran. Et cela pour une simple question de mémoire immédiate. C'est la phase finale de la résolution mathématique proprement dite. Elle présente deux caractéristiques essentielles.

Tout d'abord elle se fait dans un registre monofonctionnel rendant possible des transformations successives d'expressions, numériques, littérales, ou algébriques. Cette étape est celle du traitement proprement dit. Les transformations de l'étape précédente étaient des conversions fondées sur la reconnaissance d'unités de contenus verbaux et/ou figuraux qu'il fallait mettre en correspondance avec les termes d'une description minimale des données.

Ensuite, dans les registres monofonctionnels, les traitements relèvent de procédures sont des algorithmes. Cela veut dire que les traitements sont la seule phase dans la résolution d'un problème qui est facilement exécutable par les élèves après un entraînement ou, mieux encore, qui est immédiatement exécutable par l'outil informatique. On pourrait montrer que l'utilisation de cet outil conduit à privilégier, dans l'enseignement, la deuxième étape de la résolution d'un problème. Cela s'explique évidemment par le fait que *tous les traitements mathématiques élémentaires n'ont pas la même de degré de complexité opératoire.* On peut ainsi ordonner les traitements mathématiques élémentaires selon un ordre de complexité croissante qui, d'ailleurs, est l'ordre de leur introduction dans l'enseignement: les opérations additives qui, pour les très petits nombres peuvent se faire avec les doigts, les opérations multiplicatives qui exigent que l'on prenne aussi en compte le statut respectif des deux nombres multipliés ou divisés[3], le « produit en croix » lorsque l'opération porte non plus sur deux nombres mais sur trois organisés selon une égalité de rapports, la résolution d'une équation. Et c'est évidemment la complexité croissante de ces traitements, indépendamment de la nature et de la taille des nombres, qui justifie le recours à l'outil informatique[4].

Mais ce recours à l'outil informatique se fait au détriment des registres multifonctionnels de représentation sémiotique et ne permet pas d'entrer dans le processus complet qui permet de comprendre comment poser les problèmes et comment les résoudre.

III. Apprendre à construire un champ de problèmes pour développer la capacité à résoudre des problèmes.

Le principe des problèmes didactiques est l'équivalence sémantique entre deux types de représentations, radicalement différents tant du point de vue sémiotique que cognitif. D'un côté, il y a l'écriture d'une description minimale dans un registre monofonctionnel de calcul. Cette écriture est celle du traitement mathématique élémentaire à utiliser. De l'autre côté, il y a la description des données du problème que ce traitement permet de résoudre. Cette

---

[3] Les opérations multiplicatives peuvent être représentées par la mise en correspondance de deux suites régulières de nombres reliées par un coefficient (Duval, 2012a) ou par une disposition rectangulaire de marques unités.

[4] En revanche, il n'y a pas d'ordre de complexité croissante pour les traitements mathématiques élémentaires correspondant à l'utilisation des propriétés géométriques. Leut ordre d'introduction dépend une axiomatique locale qui est commandé par le choix des propriétés estimées importantes.

description est faite dans le registre multifonctionnel de la langue commune ou elle est visualisée dans une représentation iconique et/ou une configuration géométrique. Cela constitue ce qu'on pourrait appeler la dualité cognitive des problèmes.

Le fait majeur que révèle l'analyse des problèmes didactiques est la dissymétrie entre les tâches cognitives requises pour passer de l'écriture du traitement mathématique élémentaire aux descriptions verbales ou aux représentations visuelles des données, et celles requises pour faire la démarche à rebours. Elles sont beaucoup plus complexes, comme on vient de le voir, lorsqu'il s'agit de résoudre le problème posé que lorsqu'il s'agit de fabriquer le problème à résoudre. En réalité, résoudre un problème et le construire sont les deux côtés d'une même activité. On ne peut pas les dissocier dans l'apprentissage. Or, étrangement, la résolution de problèmes est toujours introduite dans l'enseignement de manière unilatérale, selon un partage institutionnel des rôles. Les élèves n'ont droit qu'à un seul côté de l'activité, le plus complexe et le plus insaisissable. Comment alors peuvent-ils apprendre à reconnaître l'utilisation possible de connaissances mathématiques dans n'importe quelle situation réelle? Et comment peuvent-ils apprendre à choisir les données pertinentes pour construire mathématiquement le problème concret qu'ils rencontrent? Ou, en classe, comment peuvent-ils apprendre à reconnaître, dans la multitude des variantes possibles, les descriptions minimales de données que les auteurs de manuel et les experts imaginent?

Pour pouvoir développer la capacité à résoudre des problèmes, il faut d'abord travailler sur la manière de les fabriquer. D'un point de vue cognitif, c'est l'objectif prioritaire. Vouloir faire résoudre des problèmes sans avoir préalablement fait prendre conscience *comment on construit un problème qui aura une solution mathématique*, c'est vouloir faire marcher les élèves sur la tête.

Il ne s'agit pas, évidemment, de demander de fabriquer un problème de la même manière qu'on demande de résoudre des problèmes. Cela se révèle très vite être une impasse. Car les élèves vont se contenter de reproduire ou d'imiter, souvent sans réussir, les énoncés de problèmes qu'on leur a précédemment donnés à résoudre. Les élèves se trouvent alors dans une autre forme d'embarras. Nous avons pu l'observer dans des classes à propos de problèmes de partage pour introduire l'opération de la division. Une élève l'avait parfaitement exprimé par cette question: « *Madame, comment on fait pour poser une question?* ». Dans un problème, la question n'est pas l'objet d'une interrogation. Elle est la simple détermination des données manquantes par rapport aux données dont on dispose et qui peuvent être utilisées dans un traitement mathématique élémentaire.

Il s'agit de faire explorer la diversité considérable des problèmes possibles que l'on peut poser à partir d'un seul traitement mathématique élémentaire. Autrement dit il faut *faire explorer, étape par étape, l'arbre des possibilités d'utilisation d'un traitement mathématique élémentaire.* Trois étapes sont essentielles dans l'organisation de cette tâche. Elles correspondent à trois des quatre facteurs qui interviennent dans le processus de fabrication d'un problème (*supra*, Figure 1).

III.1 Générer toutes les descriptions minimales possibles à partir d'une description complète.

La première activité exploratoire porte sur les différentes suppressions possibles *a minima* des termes numériques ou littéraux, ainsi que des symboles d'opérations, que l'on peut faire dans la description complète d'un traitement mathématique élémentaire, *sans perdre la possibilité de retrouver ce qu'on a supprimé.* Il ne s'agit pas là d'une activité à contre-sens de l'activité normale de calcul, mais de l'un des gestes intellectuels fondamentaux de l'activité mathématique: la recherche des conditions minimales qui permettent non seulement de garder toutes les informations, mais également d'en obtenir d'autres. On le retrouve, par exemple, dans l'élaboration de définitions en géométrie. C'est évidemment là un geste intellectuel heuristique d'analyse qui n'est pas une question de raisonnement et qui ne se rattache à aucun concept.

Les élèves peuvent ainsi découvrir la diversité des problèmes qu'un traitement mathématique élémentaire permet de résoudre. Car d'une description minimale à l'autre, ce ne sont pas les mêmes les mêmes termes ou les mêmes données qui manquent et qu'il faut pouvoir retrouver à partir de celles qui sont conservées (*supra,* F.1 2). Autrement dit, cette activité de suppression de données est la première tâche essentielle pour comprendre ce qu'est un problème mathématique. Et, bien sûr, c'est une activité d'exploration dans la mesure où il s'agit de voir jusqu'où on peut aller dans la suppression, l'activité de contrôle étant de chercher si, les suppressions étant faites, on peut retrouver par le calcul, la description initiale.

Le même travail peut être fait avec des formules. On peut évidemment objecter qu'un tel travail n'est pas nécessaire, puisqu'un simple traitement l'économise. Par exemple, pour des formules aussi simples que v=d/t, il suffit de changer un des termes de côté pour isoler la donnée manquante. Oui! Mais les enquêtes internationales montrent que beaucoup d'élèves, en fin de scolarité commune (15-16 ans) ne parviennent pas à effectuer ce traitement et qu'ils n'ont pas pris conscience des trois descriptions minimales possibles qui déterminent trois types de problèmes possibles:

$$d/t = \dots \qquad vt = \dots. \quad v/t = \dots$$

et du choix à faire en fonction des données dont on dispose et de celle qui manque.

III.2 D'une description minimale à ses multiples conversions possibles dans les autres registres de représentation sémiotique.

La seconde tâche exploratoire dans la fabrication d'un problème doit porter sur la dualité cognitive des problèmes.

Prenons par exemple l'une des descriptions minimales possibles de l'égalité numérique (–2) + 3 = 1, c'est à dire:

$$(-2) \text{ ET } \dots. = 1$$

Son application à une situation réelle requiert la qualification verbale des deux nombres, du symbole d'opération et du symbole d'égalité. C'est là qu'apparaît l'ambivalence sémantique des verbes antonymes: dans la langue ils désignent une transformation et donc une opération, mais dans la qualification verbale des données numériques, ils indiquent seulement le sens des nombres, positif ou négatif (*supra,* § 2.2, Figure 4).

Evidemment les élèves ne peuvent pas discerner ou découvrir par eux-mêmes cette complexité sémio-cognitive des qualifications verbales de chacun de ces termes. Un mini-lexique doit donc être introduit pour que les élèves puissent l'utiliser dans leur exploration des différentes formulations possibles de problèmes correspondant à une description minimale.

Figure 6 – Mini-lexique des qualifications verbales des symboles et des nombres relatifs.

Termes d'une description minimale dans un registre monofonctionel de calcul →	**Les qualifications verbaux possibles des données quantitatives concrètes dans le registre de la langue**
(– 2) → Un nombre négatif	L'un des deux termes d'un couple de verbes ou d'expressions antonymes: *Perdre, Descendre, Reculer*, etc.
ET → **Un SYMBOLE D'OPERATION ARITHEMETIQUE: (+ ou –)** **…..** (donnée numérique manquante)	Rien: la succession de deux propositions grammaticales suffit. Ou emploi d'un adverbe
= → **SYMBOLE DE RELATION** permettant de former **UNE EXPRESSION COMPLETE**	*En tout,* *… de plus que…, de moins que …*
(+ 1) → un nombre positif	L'autre terme d'un couple de verbes ou d'expressions antonymes: *Gagner, Monter, Avancer,* etc.

On voit donc que la qualification verbale des deux données numériques d'une description minimale donne lieu à *3* possibilités selon le choix fait dans un couple de verbes antonymes (perdre, gagner). En outre, la qualification verbale de la donnée numérique manquante dépend de la comparaison des données numériques de la description minimale. Cela donne lieu à 2 autres possibilités, celles qui concernent le choix du verbe antonyme. Pour une description minimale, il y a donc 6 possibilités d'application de ce traitement mathématique élémentaire à la réalité (Facteur 2.1). Les élèves peuvent ainsi *produire et comparer 18 problèmes additifs* qui paraissent semblables, puisque leurs énoncés utilisent le même lexique, mais leur solution mathématique est différente puisqu'ils correspondent soit à des descriptions minimales différentes soit au sens positif ou négatif des nombres.

On remarquera que ce travail d'exploration est indépendant de tout choix d'une situation concrète particulière puisqu'il porte sur des couples de verbes ou d'expressions antonymes qui sont spécifiques à la langue naturelle. L'objectif de ce travail est la prise de conscience par les élèves de l'emploi plurivoque d'un de ces couples, quel qu'il soit. L'emploi d'un terme par opposition à celui de son antonyme peut ainsi désigner soit le sens d'un nombre, soit l'opération arithmétique à effectuer, soit encore une relation constituant l'expression complète d'un traitement arithmétique. Ce choix dépend des deux autres données de la description minimale.

On voit donc que ce travail d'exploration — et c'est là un point crucial pour l'apprentissage — est aux antipodes de celui demandé dans la résolution de problèmes déjà formulés dans un énoncé. Il exige que l'attention se porte sur correspondances à établir entre les unités de contenu d'une égalité numérique et les différentes qualifications verbales possibles, mathématiquement pertinentes, que l'on peut rencontrer dans les énoncés.

3.3 Des données numériques qualifiées au choix d'une situation réelle particulière.

C'est le seulement le choix d'une situation concrète (jeu de billes, déplacement sur un itinéraire, dépense et recettes, etc..) qui conduit à choisir un couple d'antonymes plutôt que tel autre. Cela intervient au moment de la rédaction de l'énoncé en référence à une situation concrète (F.2.2). Cela correspond à la description de surface finale de l'énoncé, celle qui est présentée comme « problème ». Ce choix ne change en rien la structure du problème ni les conversions inverses à effectuer pour retrouver le traitement mathématique élémentaire à effectuer. Cela n'aide pas à trouver la solution du problème et peut même constituer un écran.

Le seul intérêt de ce travail de scénarisation d'une description minimale est d'explorer la variété considérable des situations dans lesquelles on peut appliquer un traitement mathématique élémentaire donné. Ce travail peut évidemment être fait en parallèle avec les autres descriptions minimales du même traitement mathématique élémentaire.

III.4 Variations dans la description complète et introduction de l'écriture littérale

Il suffit, parfois, d'un changement minime dans la description numérique complète d'une égalité numérique, pour obtenir des descriptions minimales totalement différentes. Prenons, par exemple, une description complète comportant quatre nombres et deux symboles d'opérations en une seule expression complète:

$$2 + (2+1) = 5$$

Elle est équivalente aux deux égalités suivantes:

$$2 + 3 = 5 \quad \text{et} \quad 3 - 2 = 1$$

C'est la description complète la plus élémentaire pour fabriquer les problèmes habituellement posés pour faire passer les élèves d'une résolution arithmétique à une résolution algébrique.

Car le recours à une lettre est plus économique et plus sûr que le seul raisonnement arithmétique pour les résoudre. Dans ces descriptions complètes, on peut supprimer deux nombres et deux symboles d'opération pour obtenir la description minimale suivante

… ET **(… ET 1)** = 5

dans laquelle l'un des deux nombres donnés correspond à la différence entre les deux nombres supprimés.

Cependant il faut pouvoir marquer dans l'écriture de cette description minimale que *les deux trous correspondent au même nombre.* La seule manière de faire est de recourir à une lettre:

b ET (**b** ET 1) = 5

Le recours à une lettre se traduit donc d'emblée par deux occurrences, c'est à dire par deux emplois de cette lettre qui sont totalement différents. Dans l'un, la lettre désigne directement une donnée manquante et, dans l'autre, la même lettre est seulement un terme d'une expression formée pour désigner l'autre donnée manquante. Ce mode de désignation qu'on appelle la désignation fonctionnelle est spécifique au registre monofonctionel d'écriture symbolique d'une relation. Cette double occurrence est inhérente à l'utilisation des lettres en algèbre. Dans le tableau ci-dessous elle est marquée par la double flèche verticale.

Figure 7 – Changement de l'opération discursive de désignation dans une mise en équation

……	Quantité numérique manquante associée à un objet
ET UN SYMBOLE D'OPÉRATION ARITHMÉTIQUE	Rien: la succession de deux propositions grammaticales suffit.
(… ET 1) **un symbole d'opération arithmétique pour exprimer une COMPARAISON** entre deux données numériques manquantes **DÉSIGNATION FONCTIONNELLE**	La comparaison de la même donnée manquante avec une autre est exprimée par un adverbe de comparaison: *de plus que, de moins que* **DESIGNATION PAR UN CONSTRUCTION D'UN SYNTAGME**
= 5 SYMBOLE DE RELATION permettant de former UNE EXPRESSION COMPLETE	une conjonction de coordination entre les deux quantités manquantes dans une proposition grammaticale *et*

On peut remarquer la complexité sémio-cognitive de l'introduction d'une lettre: elle requiert nécessairement deux occurrences, même si ensuite on peut les réduire à une occurrence: **2b** + 1 = 5. Or, dans n'importe quel énoncé, cette complexité est occultée au profit de la recherché de « l'inconnue » pour désigner une donnée manquante. Il n'est alors pas surprenant que la désignation fonctionnelle reste l'un des obstacles majeurs pour mettre en équation les données d'un problème, même après plusieurs années d'enseignement de l'algèbre.

IV. Les problèmes d'exploration: traitements dans deux registres et conversions concomitantes

Avec les problèmes d'exploration, le travail demandé aux élèves est différent. Il s'agit de produire des données et non plus simplement de reconnaître celles qui sont décrites dans un énoncé ou présentées dans une figure géométrique. Car le but est d'observer une relation ou une invariance qui puisse être formulée comme un traitement mathématique élémentaire, ou comme une propriété, et non plus de retrouver les données supprimées par l'auteur du problème. Les problèmes d'exploration sont des problèmes ouverts et non plus fermés. Les problèmes d'exploration les plus élémentaires présentent les trois caractéristiques suivantes:

(1) Une règle, qui fixe une contrainte ou donne un critère, permet de produire autant de représentations différentes que l'on veut. Chaque représentation produite constitue une donnée nouvelle pour le travail d'exploration et d'observation.

(2) Cette règle porte, le plus souvent, sur la production de représentations dans des registres non discursifs. Il s'agit par exemple de produire des configurations géométriques, des graphes cartésiens, ou même des tableaux. Mais l'activité d'observation ne porte pas sur le contenu de chaque nouvelle représentation produite, mais sur *la comparaison des représentations qui sont ainsi successivement produites*.

(3) L'objectif est d'établir une conjecture ou de la démontrer. Mais, dans tous les cas, il faut convertir les représentations produites dans un registre monofonctionnel de calcul traitements. Ces conversions sont des descriptions numériques ou des descriptions littérales de la suite des représentations produites, pour pouvoir établir ensuite une formule.

A la différence des problèmes d'application, les problèmes d'exploration sont plus proches de l'activité du mathématicien, dans la mesure où leur résolution est inséparable de la production de nouvelles données et d'une conjecture généralisant qui a été observé. Mais l'activité cognitive requise pour les résoudre reste fondamentalement la même. Elle implique la mobilisation explicite ou implicite de plusieurs registres de représentation sémiotique. Et cela exige que que l'individu — un élève ou un expert, un chercheur ou un utilisateur – puisse effectuer de lui-même les deux types de transformations de sémiotiques qui constituent les gestes intellectuels propres à toute activité mathématique:

— Les conversions, c'est à dire la transformation d'une représentation produite dans un registre en une représentation sémantiquement équivalente dans un autre registre.

— Les traitements, c'est à dire la transformation d'une représentation sémiotique en une autre représentation sémiotique du même registre en fonction des possibilités spécifiques de transformation que ce registre permet de faire.

Pour le montrer, nous allons prendre l'exemple d'une activité d'exploration simple: construire des configurations polygonales successives d'éléments selon une règle de production. Son but est de prévoir le nombre d'éléments de n'importe quelle configuration de la suite des configuration générées, c'est à dire de formuler la progression du nombre d'éléments correspondant à chaque nouvelle configuration produite.

Dans cet exemple, les données sont des représentations sémiotiques produites dans le registre des configurations géométriques[5]. Cette production n'est pas un traitement. Car le traitement figural des configurations polygonales produites commence lorsqu'il s'agit d'analyser l'augmentation du nombre d'éléments d'une configuration à la suivante. La description numérique de cette augmentation est une conversion. Elle peut à son tour être convertie en une expression littérale. On obtient ainsi trois types de représentations sémantiquement équivalentes: une succession de configurations polygonales, une suite de nombres, une expression littérale, une formule. Elles constituent les différents étapes de la résolution d'un problème d'exploration.

[5] Les figures géométriques les plus simples et les plus typiques comme le triangle, le carré, etc. sont en réalité des configurations d'unités figurales 1D et 0D. Car ce qui est reconnu comme une figure simple est une unité figurale nD qui peut se déconstruire en unités figurales (n-1) D. Ainsi par exemple un cubre ou une pyramide sont une unité figurale 3D qui se déconstruit en configurations d'unités 2D, puis 1D et 0D.

IV.1 Deux variantes d’une même activité d’exploration

ll y a un grande variation possible de règles de production. Tout d’abord, les configurations polygonales à produire peuvent être des carrés, des hexagones réguliers ou toute autre forme de polygone régulier. Ensuite, le critère ou la contrainte pour produire une nouvelle configuration peut être d’effectuer un demi « encerclement » ou un « encerclement » complet, en conservant la même configuration polygonale. Mais, quelle que soit la règle choisie, la question est de prévoir la progression du nombre d’éléments pour n’importe rang dans la suite des configurations ainsi produites.

Dans l’exemple suivant nous avons pris la configuration polygonale la plus simple en variant seulement la procédure d’encerclement.

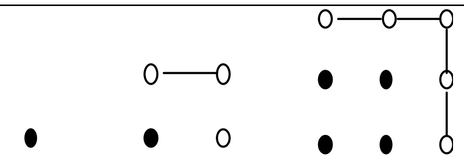
Figure 8 – Deux variantes d’un même activité d’exploration.

Règle de production: ajouter une rangée verticale et une horizontale de manière à obtenir une nouvelle disposition en carré

Une variante par «encerclement» complet

L’analyse cognitive de cette activité consiste à expliciter les conversions et les traitements que le travail d’exploration mathématique requiert de manière implicite ou explicite. Les deux tableaux ci-dessous (Figure 8 et 9) présentent cette analyse cognitive pour ces deux variantes.

Figure 9 – Analyse cognitive de la première variante de l'activité d'exploration.

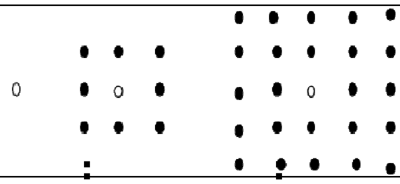
Règle de production	
VOIR: reconnaître toutes les différentes unités figurales pertinentes	unités figurales **2D** (forme carrée) , **1D** (les deux rangées du contour) et **0D** (le jeton d'angle
Conversion: description numérique de *chaque représentation obtenue.*	**1** **4** **9**
Conversion: description numérique de la progression: *rangées horizontale et verticale ajoutées*	**1** **+ 3** **+ 5**
PLACE DE LA CONFIGURATION DANS LA SUITE DES CONFIGURATIONS	***1*** ***2*** ***3*** *la suite de ces nombres* ***SE CONDENSE*** *en une lettre* **n**
Conversion: description littérale de n'importe quelle représentation obtenue	$\mathbf{n^2}$ *ici il y a congruence* entre le nombre indiquant la place de la configuration et le nombre de jeton des rangées ajoutées
Conversion: description littérale de la progression: les *deux rangées ajoutées*	**2n – 1** (le demi périmètre *moins le jeton du coin* qu'il ne faut pas compter deux fois)

Il y a deux manières différentes de voir les configurations produite. L'une s'en tient à la simple reconnaissance perceptive de la disposition globale en carré. L'autre existe qu'on isole d'une part les deux rangées ajoutées et d'autre part le jeton du coin commun à ces deux rangées. Cela n'est pas nécessairement évident dans le mesure où la reconnaissance de la forme globale 2D tend à occulter perceptivement celle des deux unités figurales 1D et de l'unité figurale 0D. Ainsi *il y a deux manières de convertir la suite des configurations obtenues en une suite de nombres:* l'une s'en tient à tous les éléments de chaque configuration, et l'autre porte sur les éléments ajoutés pour chaque nouvelle configuration produite, c'est à dire la rangée horizontale et la rangée verticale ajoutée.

En revanche, l'opération qui consiste *à condenser une suite de nombre en une expression littérale* s'avère être un saut cognitif plus complexe. Tout d'abord, il faut ajouter une troisième suite de nombres, celle correspondant à la place de la configuration dans la l'ordre de production des configuration successives. Ensuite, il faut porter son attention sur le fait que l'augmentation des deux nouvelles rangées correspond au demi périmètre, mais en ne comptant pas deux fois le jeton formant le coin de ces rangées. En d'autres termes *il faut mettre en correspondance les termes de la description littérale avec deux unités figurales 1D et avec une unité figurale 0D*. Ces mises en correspondance qualitatives sont essentielles, car autrement on ne peut pas voir pourquoi condenser la suite numérique 1, 3, 5, 7… dans l'expression littérale 2n –1. A moins, bien sûr, d'avoir déjà le reflexe cette expression littérale pour désigner n'importe quel nombre impair.

Supposons maintenant que cette activité soit réussie par les élèves, peut-on supposer qu'ils seront aussi en mesure de réussir la deuxième variante de cette activité d'exploration?

Figure 9 – Analyse cognitive de la seconde variante de l'activité d'exploration.

Règle de production	
VOIR: **reconnaître** toutes les unités figurales pertinentes (et les réorganiser en sous-confiurations triangulaires?)	**2D** (forme carrée) , **1D** (les rangées formant le contour), **0D** (les jetons d'angles)
Conversion: description numérique de *chaque représentation obtenue*.	**1** 3×3 5×5 7×7
Conversion: **description numérique** des *quatre nouvelles rangées*	**0** **(3×4) – 4** **(5 × 4) – 4** **(7 × 4) – 4** **0** **8** **16** **24**
PLACE DE LA CONFIGURATION DANS LA SUITE DES CONFIGURATIONS	***1*** ***2*** ***3*** ***4*** *la suite de ces nombres **SE CONDENSE** en une lettre:* **n**
Conversion: description littérale de n'importe quelle représentation obtenue	**$(2n–1)^2$** *ici il n'y a plus de congruence entre le nombre indiquant la place et le nombre des jetons de chaque rangée*
Conversion : description littérale des quatre rangées ajoutées **et traitement de l'expression littérale**	**4 (2n-1) – 4** $\longrightarrow$ **8n–8** *le périmètre moins les quatre coins*

Ici l'exploration s'avère beaucoup plus complexe. Car pour décrire numériquement le contenu de chaque nouvelle configuration, il faut explicitement pouvoir prendre en compte le nombre de rangées (vertical ou horizontale) de la configuration, le nombre de rangées ajoutées pour l'obtenir (le périmètre) et le nombre de jetons d'angle à enlever. Et il faut, en plus, prendre en compte la place de configuration dans la succession des configurations produites. Car, à la différence de la variante précédente, le nombre de jetons par rangées et le nombre indiquant la place de la configuration ne sont plus les mêmes, puisque l'augmentation du nombre de jetons par rangée correspond à la suite des nombres impairs. Enfin, les descriptions numériques fondées sur le dénombrement des éléments de chaque configuration devient vite impossible parce que la production de nouvelles configurations devient vite trop coûteuse.

Un véritable traitement figural est exigé si la règle de production ne porte plus sur des carrés, mais sur des hexagones réguliers et si la contrainte est le pavage d'un disque de rayon 1. Car il faut substituer aux unités figurales 2D des unités 1D, et les regrouper sous forme d'embranchements successifs. De même la reconfiguration d'une forme globale triangulaire d'éléments en un rectangle permet de découvrir la somme des entiers de 1à n. Dans la variante ci-dessus, chaque configuration, à partir du rang 3, peut se décomposer en 8 sous-figures triangulaires: 1 + ($\mathbf{3} \times 8$) , 1 ($\mathbf{6} \times 8$) , etc. (Duval, 2005b).

IV. 2 Les processus cognitifs de la résolution de problème en mathématiques.

Résoudre des problèmes n'est pas d'abord une affaire de connaissances mathématiques à utiliser, même si, ensuite, démontrer les résultats trouvés requiert l'utilisation de connaissances mathématiques. La résolution de problème mobilise des processus cognitifs qui sont essentiels pour le développement de la pensée mathématique et qui ne dépendent d'aucune manière d'un contenu mathématique particulier. *Dans l'activité intellectuelle de la résolution de problème, l'envers cognitif de l'activité est au moins aussi important que l'endroit mathématique.* Et ce côté cognitif de l'activité n'est ni le reflet ni la réplique du côté proprement mathématique. L'intérêt des problèmes d'exploration par rapport aux problèmes d'application est de mettre mieux en évidence l'importance des processus cognitifs dans toute activité mathématique.

Il y a tout d'abord les conversions des configurations polygonales en une suite de nombre ou en expressions littérales pouvant aller jusqu'à l'expression complète d'une formule. Or on peut voir ici clairement sur quoi se fonde le processus cognitif de ces différentes conversions. *Ce processus cognitif se fonde sur les mises en correspondance explicites de certaines unités du contenu de la représentation de départ avec d'autres unités de contenu de la représentations d'arrivée.* Dans les deux tableaux ci-dessus (*supra* Figure 8 et 9), nous les avons représentées par des flèches. Bien évidemment, nous ne les avons pas toutes marquées, pour ne pas surcharger et brouiller les deux figures. Mais il est déjà facile d'observer les obstacles de non congruence qui viennent de la distance cognitive entre le registre de départ et le registre d'arrivée, comme dans le cas de la deuxième variante de l'activité ci-dessus (Figure 9).

Il y a ensuite les traitements qui sont propres à chacun des registres mobilisés. Dans l'exemple ci-dessus, les transformations portent sur les configurations géométriques. Elles constituent des traitements spécifiquement figuraux qui très vite se font contre la reconnaissance immédiate et persistante du contour global d'une unité figurale 2D. Pour pouvoir effectuer ces traitements figuraux, il faut *reconnaître plus ou moins rapidement* les différentes unités figurales 1D, 0D ou même d'autres sous configurations 2D, contre la prédominance perceptive de certains contours fermés 2D. « *Voir* » en géométrie consiste en cette déconstruction dimensionnelle des formes 2D perceptivement reconnues et en leur réorganisation en d'autres unités figurales possibles 2D. Ce type de transformation se fait évidemment indépendamment de toute hypothèse ou de tout codage des figures. Il est même préalable à la possibilité d'utiliser les propriétés données par hypothèse ou par codage. En ce sens, « *voir* » relève d'un processus cognitif qui reste indépendant de la compréhension des concepts ou de la connaissance de propriétés. Or il n'y a qu'en géométrie que l'on pratique cette déconstruction visuelle des formes. En dehors de la géométrie, on s'en tient à la reconnaissance perceptive des formes et à leur interprétation iconique (Duval, 2012b).

Il y a enfin le fait que certaines conversions peuvent mobiliser une verbalisation implicite, sans recourir d'abord à des termes ou des propriétés mathématiques. Dans les activités précédentes d'exploration, la conversion en expressions littérales peut se faire soit à partir des suites de nombres, soit directement de la visualisation. Dans ce deuxième cas, il y a une description verbale implicite de ce que l'on remarque sur la figure, sans faire aucun dénombrement. Et c'est cette description verbale implicite qui va guider l'écriture littérale. Dans les deux tableaux ci-dessus (Figure 8, 9), nous avons explicité cette description verbale implicite de ce qu'il faut voir et qui ne dépend d'aucune propriété mathématique. De manière plus générale, faire expliciter cette verbalisation implicite est essentiel dans toutes les séquences d'activité où l'on veut faire passer les élèves de manipulation d'un matériel à des activités sur des configurations géométrique que l'on construit avec un instrument (Duval, 2005a).

L'activité cognitive qui permet de résoudre les problèmes d'exploration est donc la même que celle qui est requise pour résoudre les problèmes didactique d'application de connaissances mathématiques. La seule différence que l'on peut remarquer entre ces deux types de problèmes porte sur le point suivant. Dans les problèmes d'application, le travail de résolution commence par la conversion des données du problème dans un registre qui va permettre d'effectuer un traitement figural ou un calcul. Dans les problèmes d'exploration, le travail commence au contraire par un traitement, le plus souvent dans un registre autre que le registre monofonctionnel permettant de calculer. Mais cela reste secondaire, puisque pour pouvoir travailler les élèves doivent avoir pris conscience des deux types de transformations de représentations sémiotiques.

Conclusion

Le rôle central donné à la résolution de problème dans l'enseignement des mathématiques vient d'un principe pédagogique évident. On ne peut pas apprendre des mathématiques sans faire au moins un tout petit peu de mathématiques. Et on ajoute, comme si cela était tout aussi simple: pour savoir ce que ce que faire des mathématiques, il faut regarder comment travaillent les mathématiciens. Mais c'est là qu'une double équivoque se glisse. L'une porte sur ce qu'est un « problème». L'autre sur ce qu'est le travail mathématique permettant de résoudre des problèmes. Car le travail mathématique requiert des gestes intellectuels et un fonctionnement cognitif de la pensée qui sont profondément différents de ceux qui sont communément mobilisés dans les autres domaines de connaissance.

***

Tous les problèmes donnés dans l'enseignement sont des problèmes fabriqués à des fins didactiques. Les problèmes d'exploration sont ceux qui paraissent le plus proches du travail du mathématicien, puisqu'ils requièrent une recherche à travers la production et l'observation de données pour élaborer une conjecture. Mais les problèmes d'application sont au moins aussi importants que les problèmes d'exploration. Car les mathématiques sont maintenant utilisées dans tous les domaines d'activité et dans toutes les disciplines scientifiques. Apprendre à reconnaître quand et comment utiliser des connaissances mathématiques est donc aussi essentiel que résoudre des problèmes d'exploration.

Toute résolution de problèmes d'application se fonde sur l'équivalence sémantique entre deux représentations des données du problème respectivement produites dans deux registres différents. L'un des registres est le registre multifonctionnel de la langue naturelle ou celui des figures géométrique. L'autre est un registre monofonctionnel qui permet un traitement par calcul, numérique ou algébrique. Résoudre un problème d'application, c'est essentiellement reconnaître toutes les données non numériques de son énoncé, qu'il s'agisse de qualifications verbales ou de représentations iconique superposées ou non à des configurations géométrique pour écrire la description numérique, ou algébrique, minimale à partir de laquelle on va effectuer le calcul.

La capacité à résoudre des problèmes d'application ne dépend pas du degré de complexité des traitements mathématiques élémentaires à utiliser. Il est en effet important de ne pas confondre le degré de complexité croissante des traitements mathématiques élémentaires qui sont successivement introduits dans l'enseignement, et la résolution des problèmes construits pour les faire utiliser. La difficulté de la résolution de problème demeure fondamentalement la même qu'il s'agisse de problèmes additifs avec les nombres relatifs, de problèmes de mise en équations, de l'utilisation de propriétés géométriques, etc. Cette difficulté est d'une autre nature. Elle tient au jeu complexe des conversions à mettre en œuvre pour reconnaître toutes les données à utiliser et pour intégrer leurs aspects non numériques dans la description minimale du traitement mathématique pertinent.

Pour développer la capacité à résoudre des problèmes d'application, il faut apprendre à les poser en partant d'un traitement mathématique élémentaire donné. Cela exige un travail spécifique dans lequel les élèves sont conduits à générer un champ de problèmes. Et ce travail doit être organisé de manière à ce que l'attention des élèves se porte sur la variation des données dont on dispose au départ, sur celle de leur présentation et sur celle des situations, sans que ces différentes variations soient confondues. Car, comme pour toute acquisition importante, le développement de la capacité à résoudre des problèmes se manifeste par le transfert à tout un champ de problèmes possibles. La réussite à un ou deux problèmes ne signifie aucunement une réelle compréhension et acquisition en ce domaine. L'impasse des activités d'apprentissage fondées sur la résolution de problème vient de ce que les problèmes sont présentés isolément les uns des autres. La recherche du bon problème, ou de la bonne situation problème, dont la résolution seraint transférables par les élèves sur les autres problèmes utilisant le même concept, est illusoire. De même l'idée que les problèmes d'application de connaissances mathématiques à des situations rencontrées dans la réalité seraient plus accessibles aux élèves que les autres types de problème! Car la distance cognitive à franchir pour voir comment on passe des unes aux autres est plus importante que ce que est admis dans toutes les théories de la connaissance et dans les théories didactiques.

Les problèmes d'exploration paraissent très différents des problèmes d'application, si on s'en tient au seul point de vue mathématique. Mais d'un point de vue cognitif, leur résolution requiert la même capacité à reconnaître parmi des représentations produites dans des registres différents, celles qui sont sémantiquement équivalentes, c'est à dire qui représentent le même objet. Cette reconnaissance passe par la mise en correspondance des unités propres aux contenus respectifs des deux représentations. Il s'agit du processus cognitif fondamental de la pensée mathématique. Il ne se fonde sur aucun concept mais permet au contraire de les construire.

***

La deuxième équivoque porte sur l'analyse du travail de recherche dans la résolution d'un problème. Par rapport à quoi analyser ce travail? Par rapport à ce que font les mathématiciens ou par rapport à la solution mathématique du problème, ou par rapport à ce que la pensée mathématique elle-même a de différent au regard des autres formes de pensée? Cette possibilité revient à s'interroger sur les gestes intellectuels propres à tout travail en mathématiques, quel qu'en soit le domaine particulier, arithmétique, algèbre, géométrie, analyse, etc.

Pour décrire les gestes intellectuels de l'activité mathématique, il faut partir des deux caractéristiques de la connaissance mathématique. D'une part, l'accés aux objets passe y toujours par le production de représentations sémiotiques. D'autre part, le travail mathématiques consiste à transformer des représentations sémiotiques en d'autres représentations sémiotiques. La notion de registre de représentation, qui est inséparable de la distinction et de la classification des registres, permet de distinguer les deux grands types de transformation des représentations: les conversions et les traitements. Mais elle permet aussi d'analyser les traitements qui sont spécifiques chaque registre.

La puissance de la pensée en mathématiques vient de ce qu'elle peut mobiliser tous les types de registre. Cela explique l'importance et la complexité cognitive des deux types de transformations de représentation. Les conversions sont importantes puisqu'elles permettent de changer de registre. Leur complexité vient de la distance cognitive entre les contenus respectifs des représentations produites dans deux registres différents. Du point de vue mathématique, ce sont les traitements qui sont importants puisque, selon le type de registre utilisé, on peut se livrer à des explorations intuitives, effectuer des calculs, démontrer. Mais il y a un fossé cognitif considérable entre les registres multifonctionnels, dans lesquels les traitements ne peuvent jamais être algorithmisés, et les registres fonctionnels qui permettent de développer des algorithmes non seulement de calcul mais aussi de production de représentations graphiques.

Les recherches sur la résolution de problème sont toujours faites du point de vue mathématique, sans jamais prendre en compte le fonctionnement cognitif qui permet de parvenir à la solution du problème. Ainsi l'analyse du travail de résolution, souvent appelée l'« analyse a priori », est faite à partir de la solution mathématique du problème posé. Puis les productions des élèves sont analysées en fonction de leur distance par rapport aux connaissances mathématiques à utiliser. Car on postule que le fonctionnement cognitif requis pour faire des mathématiques serait le même que celui spontanément mobilisé dans tous les autres domaines de connaissance. Cette approche unilatérale est souvent justifiée par l'expérience des mathématiciens. Or ceux-ci expliquent leur travail ou vulgarisent les mathématiques, comme si on pouvait «voir » directement les objets mathématiques dont ils parlent, tellement l'activité de transformation de représentations sémiotiques leur est devenue spontanée et transparente!

Mais en est-il de même pour les élèves? Quelles avancées significatives peut-on espérer pour l'enseignement des mathématiques, à partir de cette approche unilatérale de la résolution de problème, et à partir de l'observation de ce que font des élèves, si la très grande majorité d'entre eux ignorent les gestes intellectuels qui rendent capable de « faire des mathématiques »? Car sans une prise de conscience de ces gestes intellectuels, il ne peut pas y avoir de transfert des connaissances mathématiques apprises pour résoudre les problèmes d'application et d'exploration.

***

L'analyse des conditions cognitives du développement de la capacité à résoudre des problèmes s'applique à tous les problèmes qui sont fabriqués à des fins d'enseignement. Nous avons pris comme exemples des problèmes mobilisant le calcul sur les entiers relatifs ou la connaissance de propriétés géométriques. Mais nous aurions aussi pu prendre comme exemple des problèmes utilisant la connaissance des fonctions affines. La seule différence dans le déroulement de l'analyse cognitive de leur résolution aurait porté sur les types de registres mobilisés. Alors que les problèmes que nous avons analysés mobilisent une registre multifonctionnel et un registre monofonctionnel pour les calculs, ceux utilisant les fonctions mobilisent deux types de registre monofonctionnel: celui pour les calculs et l'autre, les représentations graphiques cartésiennes, pour algorithmiser en quelque sorte l'analyse des unités visuelles 1D/2D ou 2D/2D, c'est à dire les droites, les courbes, les surfaces.

On voit donc surgir une distinction, purement cognitive et sans signification du point de vue mathématique, entre deux types de problèmes: ceux qui mobilisent au moins un registre multifonctionnel avec un seul registre monofonctionnel, et ceux qui mobilisent deux types de registres monofonctionnel. L'intérêt de cette distinction est de mieux poser la question des objectifs et de l'apport de l'enseignement des mathématiques dans la formation générale de tous les élèves.

Les registres monofonctionnels sont les registres mathématiques de représentation par excellence, puisque leur développement à accompagné l'émergence de l'algèbre et de l'analyse à partir des XVI-XVIIème siècles et qu'il a constitué une véritable révolution sémiotique (Duval, 2011b). Ce sont les registres monofonctionnels ont donné aux mathématiques une capacité de traitement qui n'a cessé de s'accroître et qui a fait des mathématiques l'outil décisif des autres disciplines scientifiques. La capacité à résoudre ces problèmes présuppose la reconnaissance quasi immédiate de l'équivalence sémantique entre des équations et des graphiques cartésiens. Cette reconnaissance exige évidemment que l'on ait appris à lire ce « langage mathématique » qui permet de calculer et de voir, c'est à dire d'articuler ces deux types de représentation pour pouvoir effectuer leur conversion dans les deux sens. Les ordinateurs, qui sont des machines symboliques, sont venus automatiser la production de ces deux types de représentations sémiotiques, typiquement mathématiques, ainsi que leur traitement.

Les registres multifonctionnels apparaissent comme les registres culturellement communs de représentation sémiotique, puisque ce sont les langues naturelles et tous les types de « dessin » schématisant les formes perçues. Ces registres permettent aussi d'effectuer des traitements mathématiques, mais ils souffrent de trois handicaps majeurs. Tout d'abord les traitements mathématiques qu'ils permettent d'effectuer ne sont pas algorithmisables. Ensuite, ces traitements peuvent être confondus avec d'autres traitements non mathématiques, comme c’est le cas pour les raisonnements ou pour la manière de voir des figures en géométrie. Enfin la conversion des représentations produites dans un registre multifonctionnel dans un registre monofonctionnel s’avère cognitivement plus complexe celle entre deux registres monofonctionnels. *Cependant, malgré ces handicaps, les registres multifonctionnels s’avèrent essentiels pour le développement de la pensée en mathématiques et en dehors des mathématiques.* Ainsi le langage naturel est nécessaire en mathématiques pour énoncer des définitions, des théorèmes, pour déduire, pour avancer des conjectures, etc. Et il exige que l’on différencie entre les manières spontanées de parler ou d’argumenter d’une part, et les raisonnements mathématiques d’autre part (Duval, 2011a). De même les configurations géométriques conduisent à développer une manière créative de voir qui repose sur la déconstruction dimensionnelle et sur l’intégration des unités figurales dans des configurations d’unités supérieures. Et cela entraîne un véritable développement de l’imagination.

L’apport de l’enseignement des mathématiques dans la formation de base des élèves ne peuvent pas être les mêmes selon que les registres monofonctionnels sont privilégiés au détriment des registres multifonctionnels ou, au contraire, qu’une importance au moins égale leur est reconnue. Le déplacement du curseur entre ces types de registres dépend des choix politiques et philosophique concernant l’éducation. Mais, de toute manière, si l’objectif principal est d’apprendre à utiliser des connaissances mathématiques pour résoudre des problèmes de la réalité, une attention toute spéciale doit être accordée à une utilisation différenciée de la langue naturelle et aux développement des différents types de visualisation.

Références

DIDIERJEAN, G.; DUPUIS, C.; DUVAL, R; EGRET, M; KREMER, D; ROBERT, G.; WENNER, B; ZIEGLER, M. A propos de charades dont la solution est un système d'équations à deux inconnues, *Petit x*, n. 44, p. 35-48, 1997.

DUVAL, R. Comment analyser le fonctionnement représentationnel des tableaux et leur diversité? *Spirale,* n. 32*. L’organisation visuelle des tableaux*. Lille: IUFM et UFR Sciences de l’Education, 2003. <http://www.univ.lille3/www/revues/spirale>.

DUVAL, R. Linguaggio, simboli, immagini, schemi...In quale modo intervengono nella comprensione in matematica e altrove? *Bolletino dei docenti di matematica*, n. 50, p. 19-39, 2005a.

DUVAL, R. Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. *Actes* du XXXIIe colloque COPIRELEM. IREM: Strasbourg. p. 67-89, 2005b.

DUVAL, R. Cognitive functioning and the understanding of the mathematical processes of proof. In: (Ed. P. Boero) *Theorems in schools*, p. 137-161. Rotterdam/Tapei: Sense, 2007.

DUVAL, R. Preuves et preuve: les expériences des types de nécessité qui fondent la connaissance scientifique. *Du mot au concept. Preuve*, p. 33-68. Grenoble: Presses Universitaires, 2011a.

DUVAL, R. Ver e ensinar a matemática de outra forma - entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Organisation de Tânia Maria Mendonça Campos et traduction de Marlene Alves Dias. Vol. 1. São Paulo: PROEM, 2011b.

DUVAL, R. Quais teorias e métodos para a pesquisa sobre o ensino da matemática? *Praxis Educativa*. v. 7, n. 2, p. 305-330, 2012a.

DUVAL, R. *The first crucial point in geometry learning: visualization*. 7th Mediterranean Conference on Mathematics Education. Cyprus, 2112b.

ELIA, I. L'utilisation d'images dans la résolution de problèmes additifs: quel type d'image et quel rôle? *Annales de didactique et de sciences cognitives*, v. 14, p. 5-29, 2009.