
Comprensiones sobre la multiplicación en estudiantes de grado tercero de primaria, desde la perspectiva del isomorfismo de medidas

Monly Catherine Torres Jaramillo
monlycatherine@yahoo.es
Universidad de Antioquia

Gilberto de Jesús Obando Zapata
gobando1715@gmail.com
Universidad de Antioquia
Grupo MÉS

Trabajo de Investigación de Maestría (en desarrollo)- UdeA

Resumen. El Ministerio de Educación Nacional, a través de los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias, y autores como Kamii (1995), Vergnaud (1991), Maza (1991), Greer (1992) han demostrado que la multiplicación más que una suma de sumandos iguales, y más que un algoritmo, es una construcción generada por las relaciones que se establecen entre las variables presentes en una variedad de situaciones problemas de tipo multiplicativo. Por tanto, dentro de las aulas de clase, con los estudiantes de la edad escolar, es importante trabajar la multiplicación a través de situaciones multiplicativas y observar los procesos, conceptos y relaciones que éstos establecen para desarrollar los conceptos relativos al campo multiplicativo.

En este proyecto se quiere centrar en el trabajo de la multiplicación en términos del análisis relacional sobre el coeficiente de proporcionalidad, basado en el trabajo de Vergnaud (1990, 2009) sobre el campo conceptual de las estructuras multiplicativas, especialmente en lo problemas de isomorfismo de medida. Mediante el planteamiento de diferentes situaciones multiplicativas se quiere observar los procesos, conceptos y representaciones que realizan los estudiantes del grado tercero de primaria.

Palabras clave. Estructuras multiplicativas, procesos, conceptos, representaciones, análisis relacional.

1. Planteamiento del problema

Justificación. El tratamiento que se le ha dado a la multiplicación en la escuela, en la mayoría de los casos, se ha reducido a su enseñanza como una suma reiterada, al aprendizaje del algoritmo y a la memorización de las tablas de multiplicar (Valencia & Gómez, 2010), dejando a un lado el significado de la multiplicación en la resolución de situaciones de tipo multiplicativo y la relación de la multiplicación con otros conceptos matemáticos, como son por ejemplo la proporcionalidad, la razón, la función.

Bajo estas consideraciones, la multiplicación, en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006), hace una mirada en la resolución de situación de tipo multiplicativo, pues es allí donde la multiplicación cobra un significado. En esos documentos, dentro de los procesos generales para la comprensión de lo multiplicativo, es importante el reconocimiento de la multiplicación y la división en situaciones concretas, en relación a los modelos más usuales y utilizados, y a las relaciones que tienen estas operaciones con las demás operaciones aritméticas. De este modo los Lineamientos y Estándares presentan la multiplicación y la división, dentro de una situación dada, como factor multiplicante, adición repetida, razón, producto cartesiano, repartos y agrupamientos.

De acuerdo con la propuesta de los Lineamientos Curriculares y los Estándares básicos de Competencias, muchos investigadores están en consecuencia con lo allí planteado sobre las diversas problemáticas asociadas a la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación, se pueden destacar a Constance Kamii (1995), Faye Clark & Kamii (1996), Arthur Baroody (1995), Terezinha Nunes, Peter Bryant, Diana Burman, Daniel Bell, Deborah Evans, Darcy Hallett (2008), Carlos Maza (1991), Brian Greer (1992), Lieven Verschaffel y Erik De Corte (1996).

Estudios como los de Kamii (1995), Kamii y Clark (1996), Greer (1992), Baroody (1995), Terezinha Nunes, Peter Bryant, Diana Burman, Daniel Bell, Deborah Evans y Darcy Hallett (2008), basados en los trabajos de Piaget, muestran que lo multiplicativo debe de alcanzar, con respecto a lo aditivo, un nivel más alto de abstracción, ya que, a diferencia de la suma, en donde adicionar se puede entender como la unión de varios colecciones de elementos, la multiplicación debe entenderse como la coordinación de correspondencias múltiples por lo cual es “una operación más compleja que se construye con un nivel mayor de abstracción” (Clark & Kamii, 1996, p. 42). Para estos autores, la multiplicación es una relación entre las unidades y grupos de igual cantidad, estableciendo una correspondencia de uno y varios, o incluso de varios a varios.

Maza (1991), Greer (1992), Verschaffel y De Corte (1996) consideran importante, en la solución de problemas, el análisis de las relaciones que se establecen entre las cantidades dadas dentro de una determinada situación. Basándose en los trabajos de Vergnaud sobre el campo de las estructuras multiplicativas, estos autores muestran que la multiplicación, de acuerdo a la forma como se establezcan las relaciones entre las cantidades y los procesos de solución que se dan a un problema, puede ser trabajada como sumas reiteradas, producto

cartesiano (conteo combinatorio), multiplicación por comparación (razón) y patrón rectangular (multiplicación de variables y unidades de medida como es el caso del área).

Otros trabajos que se tomarán como punto de partida para esta investigación, a demás de los lineamientos curriculares, los estándares y los estudios de algunos investigadores, son las investigaciones “*Conceptualización del pensamiento multiplicativo en niños de segundo y tercero de Educación Básica a partir del estudio de la variación*” (Botero, 2006), y, “*Trayectoria didáctica orientada al aprendizaje de conceptos relativos a la multiplicación a través de situaciones de covariación lineal con niños de tercero de primaria*” (Valencia y Gómen, 2010).

Se destaca de los anteriores estudios que, a partir de la realización de unas situaciones problemas, los estudiantes generaron diferentes estrategias para la solución de problemas que requerían de la multiplicación y la división, de tal forma que éstos pudieron conceptualizar, en las situaciones, las relaciones que se pueden establecen entre las cantidades dadas y las variables que allí se presentan. De esta forma, la multiplicación pasa de ser una suma reiterada a la relación de entre dos cantidades variables, estableciendo una correspondencia biunívoca entre cantidades correspondientes que van tomando sucesivamente dichas cantidades variables, estableciendo entonces relaciones de proporcionalidad y covarianza a través de conteos múltiples.

Debido al tipo de situaciones propuestas, y al énfasis en los conteos múltiples, estas dos tesis dejan análisis importantes en la comprensión de los procesos implicados por los niños de los primeros grados de la educación primaria cuando enfrentan el aprendizaje de la multiplicación desde una perspectiva de isomorfismo de medidas, pero restringidos a lo que en la literatura se ha dado en llamar los análisis relacionales escalares. Por lo tanto, se deja abierto el estudio relativo al tipo situaciones, procesos, formas representacionales y conceptos que se pueden presentar al establecer relaciones entre las variables de un problema de tipo multiplicativo centrado en el coeficiente de proporcionalidad.

Atendiendo a los estudios y miradas aquí planteadas, se permite una pregunta sobre el razonamiento multiplicativo que realizan los estudiantes en la edad escolar, especialmente en el trabajo de situaciones multiplicativas centrado sobre el coeficiente de proporcionalidad.

Por tanto, se presenta entonces la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué procesos, conceptos y representaciones usan los estudiantes del grado tercero de primaria, en el tratamiento de situaciones de isomorfismo de medida, en términos del análisis relacional sobre el coeficiente de proporcionalidad?

2. Objetivo

Analizar las formas de acción que realizan los estudiantes (procesos, conceptos, formas de representación) al tratar situaciones multiplicativas.

3. Marco teórico

Las estructuras multiplicativas. Vergnaud (1990, 1997, 2009) considera que un concepto no debe ser únicamente visto como una definición. Para que un concepto tenga un sentido debe tener unas relaciones con otros conceptos, servir de base para el tratamiento de diferentes tipos de situaciones y servir de soporte teórico para las diferentes formas de representación puestas en juego en el tratamiento de dichas situaciones. Por esto es que Vergnaud (1990, 1997, 2009) considera un concepto como una terna de tres conjuntos: **el conjunto de situaciones, el conjunto de invariantes y el conjunto de representaciones simbólicas**. De este modo, al trabajar un concepto no se puede hacer referencia solo a una situación, y al desarrollar una situación no se puede pensar en un solo concepto. Así entonces, Vergnaud (2009) más que hablar de un concepto habla es de un campo conceptual.

La comprensión, por parte de un estudiante, de un concepto, dentro del campo conceptual, no se logra únicamente con la solución de única situación y de unas únicas formas de representaciones, se logra a través de un largo periodo de tiempo y a través de la experiencia y la realización de varias situaciones (Vergnaud, 2009). Por tanto, la comprensión de conceptos, desde esta perspectiva, se basa en que el estudiante reconozca las propiedades, representaciones y características de un concepto y lo use en una variedad de situaciones (Font, 2007), es decir, la comprensión es el desempeño que muestran los estudiante en la realización de una variedad de situaciones, a través de unas formas de representación y de unas formas de acción particular.

Un tipo de campo conceptual que desarrolló Vergnaud (1990, 2009), es el campo conceptual de la estructuras multiplicativas, definido como "...el conjunto de situaciones que requieren una multiplicación, una división o una combinación de tales operaciones" (p.p. 97), unido al conjunto de conceptos (proporción simple, proporción múltiple, función lineal, función n-lineal, relaciones escalares directa, relaciones escalares inversa, cociente, producto de dimensiones, fracción, razón, múltiplos,...) y el conjunto de teoremas (propiedades de los isomorfismo de función lineal) que permiten analizar esta situaciones que hacen referencia a la multiplicación y la división (Vergnaud, 1990).

Para desarrollar el campo conceptual de las estructuras multiplicativas y de acuerdo a la relación que se puede establecer entre las variables en un problema de tipo multiplicativo, Vergnaud (1991) clasifica este tipo de problemas en dos categorías: isomorfismos de medida y producto de medidas. En la categoría de isomorfismos de medida se encuentran

los problemas que cumplen con las propiedades de un isomorfismo y en la categoría de los productos de medida¹ se encuentran aquellos problemas en los que hay que relacionar multiplicativamente dos o más cantidades así como sus dimensiones de medida.

En los isomorfismos de medida, la relación mínima que se puede establecer, entre las cantidades de un problema de tipo multiplicativo, es de cuatro cantidades, perteneciendo dos cantidades a una variable, y otras dos a otra variable. El problema consiste en hallar el valor de una de ellas conociendo el valor de las otras tres. Esto es, dada una variable A que tiene como cantidades a_1 y a_2 y una variable B que tiene como cantidades b_1 y b_2 , entonces el problema implica preguntar por el valor de cualquiera de las cantidades dadas las otras tres. Esto se puede esquematizar como sigue:

$$a_1 \rightarrow b_1$$

$$a_2 \rightarrow b_2$$

De este modo para la solución de un problema, se puede establecer una relación entre las cantidades de la misma variable (a_1 relacionada con a_2 y b_1 relacionada con b_2) o las cantidades de variables diferentes (a_1 relacionada con b_1 y a_2 relacionada con b_2).

Si se establece el primer tipo de relación, se encontraría entre ellas una razón interna, en palabras de Vergnaud (1991), un operador – escalar. De este modo, si se encuentra la razón entre dos cantidades de la misma variable, sabiendo que se conserva las propiedades de isomorfismo, entonces las dos cantidades correspondientes a estas dos deben estar en la misma razón, por lo que se puede hallar la cantidad pedida.

$$\begin{array}{ccc}
 & A & B \\
 \text{Razón} = & \left(\begin{array}{c} a_1 \rightarrow b_1 \\ a_2 \rightarrow x \end{array} \right) & \text{Razón} = \\
 \alpha & & \text{Luego } x = \alpha
 \end{array}$$

Si por el contrario, para la solución de un problema de tipo multiplicativo se establece la relación entre las cantidades de diferente variable, se halla una constante de proporcionalidad, lo que Vergnaud (1991) llama un operador – función o un coeficiente de

¹ Dentro de la categoría de producto de medida, la relación que se establecen entre las cantidades de este tipo de problemas es ternaria (las dos cantidades dadas y el plano dimensional), donde una de ellas es el producto de las otras dos, tanto el plano numérico como en el plano dimensional (Vergnaud, 1991), es decir, para la solución de este tipo de problemas se multiplican las cantidades dadas al igual que el plano de las dimensiones dichas cantidades.

proporcionalidad. Este coeficiente de proporcionalidad lo que establece es la razón entre un par valores correspondientes, uno en cada variable. Pero lo fundamental es que este operador función, o coeficiente de proporcionalidad es universal, es decir, para la misma situación dada, la razón entre cualquier par de valores, uno de cada variable, es la misma.

Por tanto:

R= Coeficiente de proporcionalidad

$$R = \frac{b_1}{a_1} \quad \begin{array}{c} \text{A} \quad \text{B} \\ \text{-----} \\ a_1 \rightarrow b_1 \end{array}$$

Luego, $x = R a_2$

$$a_2 \rightarrow x$$

Como se puede apreciar, dentro de la categoría de los isomorfismos de medida, de acuerdo a las relaciones que se establezcan entre las cantidades dadas, y de acuerdo a las variables a las que pertenece, esta relación puede encontrar una razón o un coeficiente de proporcionalidad, y de este modo las relaciones pueden ser vista como una proporción o como una función, respectivamente.

4. Metodología/Método

El trabajo se enmarcará dentro de una investigación cualitativa (Stake, 1998), ya que se pretende realizar un estudio de un grupo específico de personas y se quiere analizar las formas de acciones que realiza el grupo con respecto a la construcción de la multiplicación, de este modo, se realizará un informe sobre las comprensiones que realicen los estudiantes con respecto a las situaciones de tipo multiplicativo.

El método a que se trabajará en la investigación es el estudio de caso, donde el caso a ocuparse es el grupo de tercero de la Institución Educativa Abraham Reyes, del municipio de Bello (entidad pública), donde se estudiarán los procesos, conceptos, formas de acción y formas de representación que realizan los estudiantes al resolver situaciones multiplicativas, especialmente aquellas del tipo de isomorfismo de medidas y en relación al coeficiente de proporcionalidad.

Para la producción de registros y datos es fundamental el diseño de situaciones problema multiplicativas donde se entenderá por situación problema...”como un contexto de participación colectiva para el aprendizaje” (Obando & Múnera, 2003, p.183) donde se permita que el estudiante desarrolle su actividad matemática mediante la exploración, la sistematización y el diálogo con pares.

Para el desarrollo de las situaciones se tiene presente dos etapas: El diseño de la situación y la realización de la situación con los niños. Para el diseño de la situación se observarán algunos conceptos previos, los medios que se utilizarán para el desarrollo de la situación, el motivo por el cual se orientarán las actividades de los niños y algunas posibles operaciones que se puedan generarse en la medida que se desarrollen las actividades. Estos posibles conceptos, medios, motivos y operaciones anticipadas en el diseño de la situaciones son unos indicios de lo que los niños puedan desarrollar en la realización de las situaciones, que serán observadas y analizadas en las acciones de los niños, que correspondería a la segunda etapa del desarrollo de la situación.

A partir del desarrollo de las situaciones diseñadas, por parte de los estudiantes del grupo, se realizarán grabaciones, videos, hojas de trabajo, quices y evaluaciones, a través de las cuales se pueda observar los procesos que realizan los estudiantes al desarrollar situaciones multiplicativas, las representaciones que utilizan y los conceptos que abordan para trabajar la multiplicación, sean los procesos, representaciones y conceptos propuestos en el diseño de la situación, o sea aquellos otros que se generen dentro de su desarrollo.

Se realizará un análisis de las representaciones y formas de desarrollar las actividades en los documentos escritos (hojas de trabajo, quices y evaluaciones) y las formas como los estudiantes tratan de interpretar la situación, la conversa con sus pares, hace representaciones verbales y se va desenvolviendo en el desarrollo de la situación, partir de los audios (grabaciones y videos).

Para el análisis de estos registros y datos de audio y documentos escritos se utilizarán las técnicas propias del análisis cualitativo: segmentación de la información, definición de categorías emergentes, reducción de los datos a partir de estas categorías. De esta forma, se hace una relación de los datos de los documentos escritos y de los datos de los audios observando los procesos, conceptos, formas de acción y formas de representación que realizan los estudiantes al resolver las situaciones de tipo multiplicativo.

A partir de la interpretación de los datos y teniendo en cuenta que el caso de estudio son los estudiantes del grado tercero, se establecerán algunas categorías emergentes de las comprensiones que realicen los estudiantes con respecto a la multiplicación en la resolución de situaciones multiplicativas, especialmente en el análisis del coeficiente de proporcionalidad.

Referentes bibliográficos

- Baroody, A. (1995). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual. *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise and procedural knowledge*. (pp. 1-33). New York: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

- Botero, O. (2006). *Conceptualización del pensamiento multiplicativo en niños de segundo y tercero de educación básica a partir del estudio de la variación*. Tesis de maestría. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Clark, F. & Kamii C. (1996). Identification of Multiplicative Thinking in Children in Grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(1), 41-51
- Font, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La Gaceta de la RSME*, 10. (2), 419–434
- Greer, B. (1992). La multiplicación y la división como modelos de situaciones. En DA Grouws (Ed.), *Manual de la investigación sobre enseñanza de las matemáticas y el aprendizaje* (pp. 276-295). Nueva York: Macmillan.
- Kamii, C. (1995). *Reinventando la aritmética III. Implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid: Visor.
- Maza, C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y la división*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas: Lineamientos Curriculares*. Bogotá: Recuperado en: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf
- Ministerio de Educación Nacional (2003). *Estándares curriculares para matemáticas para la educación preescolar, básica y media*. Bogotá: Recuperado en: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf
- Nunes, T., Bryant P., Burman, D., Bell, D., Evans, D. y Hallett D. (2008). Deaf children's informal knowledge of multiplicative reasoning. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, 14(2), 260-277.
- Obando, G. & Múnera J. (2003). Situaciones problemas como estrategias para la conceptualización matemática. *Revista educación y pedagogía*. 15 (35), 183-199.
- Ospina, M. & Salgado, F. (2010). *Configuraciones epistémicas presentes en los libros de tercer grado, en torno al campo conceptual multiplicativo*. Tesis de pregrado. Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Valencia, F. & Gómez, D. (2010). *Trayectoria didáctica orientada al aprendizaje de conceptos relativos a la multiplicación a través de situaciones de covariación lineal con niños de tercero de primaria*. Tesis de pregrado. Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 10 (2,3), 133-170.
- Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realizada. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Editorial Trillas.
- Vergnaud, G. (1997). The Nature of Mathematical Concepts. *Lerning and Teaching Mathematics: As Insternational Perspective*. pp. 7-28. London: Psychology Press, Ltda., Publishers.
- Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. *Giving Meaning to Mathematical Signs: Psychological, Pedagogical and Cultural Processes*. 52(2), 83- 94.
- Verschaffel, L. & De Corte, E. (1996). Number and Arithmetic. En: Aj. Bishop et al. (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education*. pp. 99-137. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

**Volver al índice
Mesas Temáticas**