

Definición de la probabilidad y probabilidad condicional: Un estudio con futuros profesores

Definição de probabilidade e probabilidade condicional: um estudo com futuros professores

Defining probability and conditional probability: A study with prospective teachers

Carmen Batanero

batanero@ugr.es

José Miguel Contreras

jmcontreras@ugr.es

Carmen Díaz

carmen.diaz@dpsi.uhu.es

Gustavo Cañadas

gcanadas@ugr.es

Resumen

La finalidad del estudio es evaluar la competencia de futuros profesores españoles de Enseñanza Secundaria y Bachillerato para definir de forma adecuada la probabilidad simple y condicional. Las definiciones proporcionadas por una muestra de 196 futuros profesores se analizan, clasificándolas en función de su corrección y precisión. Se comparan los resultados en dos grupos de profesores, de acuerdo a su formación inicial y con los obtenidos en estudiantes de psicología.

Palabra claves: Futuros profesores. Probabilidade simples e condicional, definição.

Resumo

A finalidade deste estudo é avaliar a competência de futuros professores espanhóis do ensino secundário e do bacharelato para definir, de forma adequada, a probabilidade simples e condicional. As definições obtidas em uma amostra de 196 professores são analisadas classificando-as em função da sua correção e precisão. Os resultados são comparados entre dois grupos de professores de acordo com a formação e também com dados obtidos com estudantes de psicologia.

Palavras-chave: Futuros professores. Probabilidade simples e condicional. Definição.

Abstract

The study aim is assessing prospective secondary and high school spanish teachers to provide an adequate definition for simple and conditional probability. The definitions given by a simple of 196 prospective teachers are analysed and classified taking into account its correctness and accuracy. Results in two groups of teachers with different background are compared as well as with those obtained in a simple of psychology students.

Keywords: Prospective teachers. Conditional and simple probability. Definition.

1. Introducción

La probabilidad es, en la actualidad, una parte importante de las orientaciones curriculares para la Educación Primaria y Secundaria. Sin embargo, es todavía poco frecuente que los futuros profesores de matemáticas tengan una preparación específica suficiente para llevar a cabo su enseñanza, carencia que puede repercutir en los conocimientos que adquieran sus futuros estudiantes.

Aunque muchos futuros profesores de Educación Secundaria tienen una licenciatura en matemáticas, también encontramos otros que provienen de otras licenciaturas o ingenierías y no necesariamente han hecho un curso formal de cálculo de probabilidades. Además, ninguno de ellos recibe formación específica sobre el conocimiento didáctico relacionado con la enseñanza de probabilidad. La situación es aún más crítica para los futuros profesores de Educación Primaria, puesto que algunos ni siquiera han seguido un curso completo de probabilidad durante su formación como maestros.

Ello ocasiona en algunos casos concepciones incorrectas sobre las ideas de azar y probabilidad (AZCÁRATE, 1995) y en otras lleva a los profesores, una vez incorporados a su labor docente, a tratar de reducir o incluso omitir la enseñanza de la probabilidad (SERRADÓ; AZCÁRATE; CARDEÑOSO, 2006). Es urgente ofrecer una mejor educación previa a estos profesores, si queremos que la enseñanza de la probabilidad en las escuelas mejore (FRANKLIN; MEWBORN, 2006), pero ello requiere un trabajo previo de evaluación de sus necesidades formativas.

En este trabajo analizamos esta competencia en una muestra de futuros profesores españoles de Educación Secundaria para definir adecuadamente la probabilidad simple y condicional, comparando con las definiciones proporcionadas por estudiantes de psicología en la investigación de Díaz (2007). La importancia de las definiciones ha sido analizada por Zazkis y Leikin (2008) quienes señalan que la capacidad de dar una definición en sus propias palabras muestra la comprensión de un concepto y en el caso de que se trate de futuros

profesores indica sus preferencias pedagógicas. Las definiciones, una vez fijadas en el currículo, determinan también el enfoque de la enseñanza, el conjunto de propiedades e incluso de pruebas que se usarán y la forma en que se presentará a los estudiantes; por tanto modelan la relación entre esta definición y la imagen del concepto que crean los estudiantes (VINNER, 1991).

Leikin y Winicki-Landman (2001) describen las siguientes reglas que deben seguir al enunciarlas: las definiciones dan nombre a los conceptos y establecen sus condiciones necesarias y suficientes; deben incluir un número mínimo de tales condiciones y suelen incluir otros conceptos previamente definidos. Mientras que, desde el punto de vista matemático, definir supone dar un nombre a un objeto que previamente existía y estaba caracterizado por unas propiedades, en la enseñanza la definición da vida a algo que no existía para el estudiante (MARIOTTI; FISCHBEIN, 1997).

Todo lo anterior indica la importancia de asegurar que los futuros profesores sean capaces de dar definiciones precisas de los conceptos obligatorios en el currículo, como es el caso de la probabilidad simple y condicional, incluida tanto en la Educación Secundaria Obligatoria, que abarca de los 12 a los 15 años (MEC, 2007a), como en el Bachillerato, periodo de estudio para alumnos de 16 y 17 años (MEC, 2007b) en España. En lo que sigue presentamos el marco teórico, antecedentes, método y resultado del estudio.

2. Marco teórico sobre conocimiento del profesor

Una investigación extensa describe los componentes del conocimiento de los profesores. En esta investigación, nos basamos en el modelo de Hill, Ball, y Schilling (2008), quienes describen el conocimiento matemático para la enseñanza como “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno” (p. 374). Aunque en la educación secundaria no se enseña una probabilidad muy avanzada (por ejemplo, la teoría de la medida), los profesores precisan una comprensión profunda de la probabilidad básica y sus aplicaciones, para organizar la enseñanza y llevarla a la práctica (Ma, 1999).

Dentro del conocimiento del contenido matemático, Hill, Ball y Schilling (2008) diferencian el *conocimiento común del contenido*, *conocimiento especializado del contenido*, y *conocimiento en el horizonte matemático*. Mientras el conocimiento común del contenido es

el puesto en juego para resolver problemas matemáticos por cualquier persona, el conocimiento especializado del contenido incluye aspectos que no necesariamente tiene una persona ordinaria, por ejemplo, identificar las ideas matemáticas trabajadas en un problema. El conocimiento en el horizonte matemático incluye, por ejemplo, conocimiento de la relación con otras materias, como la historia de las matemáticas. Para el conocimiento pedagógico del contenido Hill, Ball y Schilling (2008) proponen tres componentes: (a) El *conocimiento del contenido y los estudiantes* o “conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden este contenido particular” (p. 375); (b) *el conocimiento del contenido y la enseñanza*, que resulta de la integración del contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza de dicho contenido; y (c) *el conocimiento del contenido y el currículo* o conocimiento de las orientaciones curriculares relacionadas con dicho contenido.

El modelo descrito sugiere que los conocimientos matemáticos no son suficientes por si solos para que los docentes puedan enseñar probabilidad de una manera efectiva. En concreto, el conocimiento de las definiciones correctas de los conceptos probabilísticos, que tratamos de evaluar en este trabajo forma parte tanto del conocimiento especializado del contenido, como del conocimiento del contenido y la enseñanza.

3. Antecedentes

Las investigaciones relacionadas con la comprensión de la probabilidad por parte de futuros profesores son muy escasas y la mayoría se centra en profesores de educación primaria (por ejemplo, Azcárate, 1995, Begg y Edward, 1999 o Batanero, Cañizares y Godino, 2005, Estrada y Díaz, 2007). Todos estos estudios coinciden en la necesidad de aumentar la formación de estos profesores.

Respecto a los futuros profesores de educación secundaria, Fernández y Barros (2005) en su estudio con 37 profesores en formación de Portugal sugieren las dificultades de los docentes para formular sucesos y para comprender los sucesos compuestos. Además, estos profesores utilizan con frecuencia el razonamiento aditivo para comparar probabilidades. Silva y Coutinho (2008) en un estudio con profesores de secundaria muestran sus dificultades con el concepto de variación y la falta de comprensión de la desviación típica como una medida de dispersión.

Carter (2008) analizó las respuestas de 210 futuros profesores de secundaria, a un cuestionario de probabilidad, indicando errores en la comprensión de secuencias aleatorias, tendencia a alternar diferentes resultados e indiferencia al efecto del tamaño de la muestra sobre la variabilidad del muestreo

Chernoff (2009) analizó las respuestas dadas por 76 futuros profesores de matemáticas de Educación Secundaria a tareas de reconocimiento de secuencias aleatorias. El análisis cualitativo de las justificaciones de 19 sujetos, que aparentemente tenían una percepción incorrecta de aleatoriedad, le lleva a concluir que sus razonamientos podrían ser consistentes con visiones no estándar del espacio muestral del experimento y no serían debidas a falta de razonamiento probabilístico, sino al uso de probabilidades subjetivas personales.

El objetivo del presente trabajo es ampliar esta investigación centrándonos en las definiciones, punto que no ha sido estudiado en trabajos previos.

4. Metodología

En España para poder obtener un puesto de profesor de matemáticas se requiere cursar un Máster titulado *Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato*, en la especialidad de matemáticas (en lo sucesivo Máster de Secundaria). Tan sólo alrededor del 50% de los que acceden a dicho Máster son Licenciados de Matemáticas, pues el resto provienen de otras especialidades científicas o técnicas. Por otro lado, dentro de la Licenciatura de Matemáticas, el 90% de los egresados realizan el concurso para profesor de matemáticas de secundaria, al finalizar su formación.

En consecuencia en España hay dos tipos de profesores de matemática, según su formación previa (a) o bien son licenciados en Matemáticas o bien egresados del Máster de Secundaria. Para conseguir una muestra representativa de futuros profesores de secundaria españoles se decidió tomar estos dos tipos de alumnos, de varias universidades. Siguiendo este criterio, se invitó a participar a 196 estudiantes del curso académico 2009-2010: 95 estudiantes del último curso de la licenciatura de matemáticas (todos los estudiantes del último curso de la licenciatura de las Universidades de Granada, La Laguna y Salamanca) y 101 alumnos del Máster de Secundaria (todos los que la cursaron en las Universidades de Alicante, Barcelona, Cádiz, Extremadura, Granada, Salamanca, Santiago de Compostela, Pública de Navarra y Valladolid).

La recogida de datos fue parte de una actividad de formación en didáctica de la probabilidad, con los futuros profesores, pues al día siguiente de completar la tarea, se discutieron las respuestas con los participantes para, de este modo, aumentar su conocimiento sobre el tema. La tarea propuesta se presenta a continuación.

Tarea. Explica con tus propias palabras la diferencia entre una probabilidad simple y una probabilidad condicional.

La finalidad de la tarea es valorar la comprensión de la probabilidad simple y condicional y la capacidad para definir las. Además el contenido “*distinguir probabilidad conjunta, condicional y simple*” sería un contenido secundario.

Consideramos correctas las respuestas donde el sujeto, o bien da una definición correcta o pone un ejemplo adecuado de cada una de las probabilidades. Es decir, que, de acuerdo a Leikin y Winicki-Landman (2001) establecen sus condiciones necesarias y suficientes dando un número mínimo de tales condiciones. También admitimos como correctas los casos que indican las diferencias entre los conceptos o ejemplos en que se vean claramente las diferencias. En este caso, los futuros profesores estarían mostrando su imagen del concepto, que suponemos refleja la definición del mismo (Vinner, 1991).

5. Resultados y discusión

A continuación se describen los resultados, siguiendo la clasificación de Díaz (2007) en una investigación con estudiantes de psicología (definiciones correctas, incorrectas e imprecisas) y ahondando la clasificación de la citada autora.

C0: Definiciones incorrectas, cuando la definición no describe adecuadamente el concepto, pues falta alguna de sus condiciones necesarias o suficientes (LEIKIN; WINICKI-LANDMAN, 2001) o se confunden conceptos implicados en las mismas. Hemos clasificado estas respuestas incorrectas en tres grupos: El primero incluye los errores formales en la definición (C01), el segundo engloba las definiciones con impresiones debidas a confusión de conceptos que intervienen en la misma (C02) y en el tercero se da la definición a través de una fórmula que contiene errores (C03). A continuación analizamos estas categorías:

C0.1. Errores formales en la definición. Cuando el sujeto incluye el término que desea definir en la definición (hay una circularidad) o bien da una definición que corresponde a otro

concepto. Por ejemplo, el sujeto 123 da una definición circular y es ambiguo en los términos “algo” y “otro” (ambos errores son señalados con defectos formales en las definiciones por Calvo, 2001):

“Como su nombre indica la probabilidad condicionada viene condicionada por otra sentencia. Al variar algo varia otro” (Sujeto 123).

C0.2. *Errores producidos por confundir conceptos que intervienen en la definición.* En la siguiente respuesta, el sujeto 3 confunde frecuencia relativa y suceso, pues la probabilidad sería el límite de la frecuencia relativa, no del suceso, que no tiene límite. Como consecuencia, proporciona una definición incorrecta:

“Probabilidad simple: valor límite al que tiende un suceso aleatorio, no condicionado por nada. Probabilidad condicionada: valor límite al que tiende un suceso dependiente de otro suceso, cuando se ha dado el otro suceso” (Sujeto 3).

En otras ocasiones se confunde una probabilidad con otra, por ejemplo, la probabilidad simple y conjunta. Esta confusión fue observada por Pollatsek, Well, Konold y Hardiman (1987) en problemas de probabilidad condicional, mostrando las dificultades que las personas tienen para interpretar enunciados condicionales. Por otro lado, Einhorn y Hogarth (1986) sugieren que los enunciados de problemas que usan la conjunción “y” pueden llevar a confundir la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional. Sin embargo, no hemos encontrado descrito el error consistente en confundir diferentes tipos de probabilidad al dar una definición, donde no hay que interpretar el enunciado de ningún problema. El siguiente participante muestra esta confusión, pues en lugar de dar un ejemplo de probabilidad simple, da un ejemplo de probabilidad conjunta:

“Probabilidad simple trata dos sucesos que no guardan relación directa, por ejemplo la probabilidad que llueva en Santiago y luzca el sol en Buenos Aires. Probabilidad condicional se refiere a que los sucesos están relacionados entre sí. Por ejemplo como ocurre en el ítem 7 donde la probabilidad del segundo suceso incrementa o disminuye dependiendo del primero” (Sujeto 33).

C0.3. *Definiciones apoyadas en fórmulas que contienen errores.* Algunos sujetos incluyen la fórmula en la definición, pero incluyen errores en dichas fórmulas. En el siguiente ejemplo, hay un error en la fórmula de la probabilidad condicional, donde, además de invertir

numerador y denominador, se sustituye la intersección por la unión de sucesos, confusión frecuente de acuerdo a Einhorn y Hogarth (1986) y Pollatsek et al. (1987). El cambio de condición y condicionado es citado por Falk (1986). Por otro lado la definición es circular:

“Probabilidad simple: es cuando intervienen los elementos sin estar condicionados a algo. Probabilidad condicional: cuando los elementos esta condicionados a otros, cuando depende de otros:

$$P(A/B) = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} \text{” (Sujeto 162).}$$

C1. *Definición imprecisa de la probabilidad condicional.* Cuando la definición cumple las condiciones de Leikin y Winicki-Landman (2001) al incluir todas sus condiciones necesaria o suficientes pero es confusa o bien añade condiciones no necesarias. Como en el caso anterior, hemos desglosado esta categoría:

C1.1. *Asume que el suceso condicionante debe ser anterior al condicionado al definir la probabilidad condicional.* Se define la probabilidad condicional para un suceso futuro a partir de la ocurrencia de otro suceso pasado (mientras que la probabilidad también se puede aplicar a un suceso en el pasado a partir de un conocimiento futuro); por tanto añade una condición no necesaria. En esta definición, subyace, por tanto la falacia del eje de tiempos (TVERSKY; KAHNEMAN, 1982; GRAS; TOTOHASINA, 1995):

“Probabilidad condicional: ocurrido un suceso la probabilidad de ocurrir los venideros sabiendo el suceso ocurrido, varía” (Sujeto 134).

C1.2. *Suponer un suceso dependiente del otro.* De nuevo se añade una condición no necesaria. Podría subyacer en estos casos una confusión entre condicionamiento y causalidad que ha sido descrita, entre otros, por Falk (1986). Un ejemplo es el siguiente:

“Una probabilidad condicional es una probabilidad de un suceso que depende de otro suceso. Por ejemplo la probabilidad de la segunda extracción de una bola (ejercicio anterior) depende de la primera extracción. Así la probabilidad de que la segunda sea negra si la primera es blanca es 2/3, sin embargo si la primera es negra sería de 1/3” (Sujeto 54).

C2. Define correctamente sólo la probabilidad condicional. Hemos clasificado estas respuestas en tres grupos: un primer grupo olvida definir no de los dos conceptos (C2.1), un segundo grupo si se utilizan fórmulas para definir una de las probabilidades (C2.2) y un tercer

grupo si se trata de errores por utilizar la propiedad de independencia para definir la probabilidad simple (C2.3).

C2.1. Olvida definir la probabilidad simple, y define verbalmente la probabilidad condicional:

“Cuando tratamos de calcular la probabilidad de ocurrencia de un suceso, conociendo una información adicional, hablamos de probabilidad condicionada” (Sujeto 1).

C2.2. Olvida definir la probabilidad simple, y define la probabilidad condicional a partir de fórmulas. Una respuesta de este tipo sería utilizar la descomposición de la probabilidad condicional como cociente de la probabilidad conjunta y de la condición, dando una definición correcta, pero olvidando dar la definición de probabilidad simple:

“No conozco el termino de probabilidad simple, si la de suceso simple que se refiere a un tipo particular de suceso formado por un sólo elemento. La probabilidad condicionada de un suceso A condicionado a otro B siendo A y B dos sucesos de un mismo experimento aleatorio con $P(B)$ distinto de cero es la probabilidad de que ocurra A teniendo información de B. Se formula:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ ” (Sujeto 6).$$

C2.3. *Error en la definición de probabilidad simple.* Cuando utilizan como elemento intrínseco la independencia para definir la probabilidad simple, mostrando una confusión entre independencia y probabilidad simple y añadiendo una condición innecesaria:

“Sean A y B dos sucesos posibles donde A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, entonces la probabilidad respecto A y B es simple” (Sujeto 116).

C3. *Define imprecisamente las dos probabilidades pedidas.* Hemos clasificado las respuestas en seis grupos:

Un primer grupo si suponen que el suceso condicionante tiene que ocurrir antes que el condicionado (C3.1), un segundo grupo englobaría los futuros profesores que suponen que el suceso condicionante es dependiente (C3.2), un tercero usa fórmulas para definir una de las probabilidades (C3.3), un cuarto indica la diferencia entre ambas probabilidades de forma imprecisa (C3.4), un quinto en lugar de dar una definición, da un ejemplo (C3.5) y el último confunde la probabilidad simple o condicional entre sí o con la conjunta (C3.6).

C3.1. *Suponer que el suceso condicionante tiene que ocurrir antes que el condicionado.* Se observa en la respuesta la falacia del eje de tiempos (TVERSKY; KAHNEMAN, 1982; GRAS; TOTOHASINA, 1995). Un ejemplo es el siguiente:

“La probabilidad simple es la probabilidad de un suceso aislado que estemos estudiando sin depender de otros sucesos, mientras que la probabilidad condicional es la probabilidad de un suceso condicionado a que ocurra previamente otro suceso diferente al anterior” (Sujeto 7).

C3.2. *Suponer que el suceso condicionante es dependiente del suceso condicionado,* aunque como hemos indicado esto no es necesario y podría subyacer en estos casos una confusión entre condicionamiento y causalidad (FALK, 1986):

“La probabilidad simple está basada en sucesos únicos o independientes, mientras que la condicionada utiliza sucesos que se condiciona unos a otros, por lo que para el cálculo de sus probabilidades será necesario tener en cuenta las de los sucesos dependientes” (Sujeto 8).

C3.3. *Fórmulas imprecisas para definir una de las probabilidades.* Por ejemplo, el sujeto 11 utiliza la definición de la regla de Laplace para la probabilidad simple como cociente entre casos favorables y posibles, pero la notación para la probabilidad es imprecisa:

“Simple = $\frac{\text{SucesosFavorables}}{\text{SucesosPosibles}}$ ” (Sujeto 11).

C3.4. Incluimos en esta categoría las respuestas que *indican la diferencia* entre probabilidad simple y compuesta, pero son imprecisas. En la respuesta que reproducimos a continuación, se define la diferencia haciendo alusión a la idea de dependencia, que como hemos visto no es necesaria:

“La probabilidad condicional se diferencia de la simple en que está afectada por un suceso que no es independiente” (Sujeto 12).

C3.5. *En lugar de dar una definición, da un ejemplo.* Por ejemplo, el sujeto 29 utiliza una baraja de cartas para describir la diferencia entre las dos probabilidades, en lugar de utilizar sus definiciones o una descripción de tipo general:

“La probabilidad simple, es por ejemplo, la probabilidad de sacar un oro de una baraja española. Una probabilidad condicionada, es por ejemplo la probabilidad de sacar un oro de una baraja española condicionada a otro suceso, que la primera carta por ejemplo fue copas” (Sujeto 29).

C4. Define correcta y de manera precisa las dos probabilidades pedidas. Por último, algunos futuros profesores dan las dos definiciones de forma correcta o explican correctamente la diferencia entre las dos probabilidades. Hemos desglosado las respuestas en dos grupos: Un primer grupo define ambas probabilidades de forma correcta sin aplicar fórmulas (C4.1) y un segundo grupo usan fórmulas (C4.2).

C4.1. Definir ambas probabilidades de forma correcta sin aplicar fórmulas. Por ejemplo el sujeto 64 define las dos probabilidades de la siguiente manera:

“La probabilidad condicionada mide el valor de la probabilidad de un suceso A a partir de información de otro suceso B. Mientras que la probabilidad simple sólo da el valor de la probabilidad de ocurrencia de un suceso sin tener en cuenta otro suceso” (Sujeto 64).

C4.2. Usar fórmulas para definir ambas probabilidades. En el siguiente ejemplo (sujeto 22) se define la probabilidad simple y condicionada con fórmulas. Además se hace referencia a que la probabilidad es una función de conjunto y a los axiomas de Kolmogorov.

“Probabilidad simple: Sería la definición de probabilidad según Kolmogorov. Es una función $f : \Omega \rightarrow R$ que a cada suceso le hace corresponder un n° real, verificando que $P(A) \geq 0$, $P(A) \leq 1$,

$$P(A) = \frac{\text{Casos - Favorables}}{\text{Casos - Posibles}}$$

Probabilidad condicionada: Dado un suceso B, cuando queremos saber la ocurrencia de otro suceso A a

partir de información del suceso B; $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ” (Sujeto 22).

En la Tabla 1 presentamos las frecuencias y porcentajes de las diferentes categorías estudiadas anteriormente y que muestra la escasa competencia de los futuros profesores participantes en el estudio para dar las dos definiciones en forma correcta (15,9%). Es una proporción muy pequeña tratándose de futuros profesores que tendrán que impartir este tema si se incorporan a la función docente.

Tabla 1 – Frecuencia y porcentaje de respuestas en la definición

		Frecuencia	Porcentaje
Errores en las dos definiciones	C0.1. Errores formales	11	5,6
	C0.2. Confunde conceptos	6	3,1
	C0.3. Confunde fórmulas	2	1,0
Definición imprecisa de la probabilidad condicional	C1.1. Falacia temporal	5	2,6
	C1.2. Asume dependencia de sucesos	1	0,5
Define correctamente sólo la probabilidad condicional	C2.1. Define verbalmente la p. condicional	4	2,0
	C2.2. Define la p. condicional con fórmulas	4	2,0
	C2.3. Error conceptual al definir la p. simple	4	2,0
Definición imprecisa de las dos probabilidades	C3.1. Falacia temporal	34	17,3
	C3.2. Asume dependencia de sucesos	49	25,0
	C3.3. Fórmulas imprecisas	9	4,6
	C3.4. Indica diferencias en forma imprecisa	10	5,1
	C3.5. No da definición, sino ejemplo	9	4,6
Define correctamente las dos probabilidades	C4.1. Verbalmente	23	11,7
	C4.2. A través de fórmulas	8	4,1
	En blanco	17	8,7

En su lugar observamos la alta frecuencia de aparición explícita de participantes que asumen la dependencia de sucesos (25,6% en las categorías C1.2 y C3.2) donde pudiera presentarse una confusión entre condicionamiento y causalidad, citada por Falk (1986). La falacia temporal (TVERSKY; KAHNEMAN, 1982; GRAS; TOTOHASINA, 1995) es también frecuente (19,9% de participantes en las categorías C1.1 y C3.1). Sumando las categorías anteriores un 45,5% de los participantes presenta errores en la definición al añadir condiciones innecesarias.

Con menor frecuencia, aparecen errores formales (5,6%, categoría C0.1), definiciones imprecisas (14,3%, categorías C3.3, C3.4 y C3.5), errores en fórmulas (1%, categoría C0.3), confusión de conceptos (5%, categorías C0.2 y C2.3), no definir la probabilidad simple (4%, categorías C2.1 y C2.2) o respuestas en blanco (8,7%).

En la Tabla 2 se resumen estas categorías en los cinco tipos principales y se comparan las respuestas dadas por los sujetos de nuestra muestra, junto con los del estudio de Díaz (2007) con alumnos de Psicología.

Tabla 2 – Resultados en futuros profesores y estudiantes de psicología

	Futuros profesores (n=196)		Psicología (n=414)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
C0. Errores en las dos definiciones	36	18,3	119	28,7
C1. Define imprecisamente la probabilidad condicional	6	3,1	28	6,8
C2. No define la probabilidad simple	12	6,0	90	21,7
C3. Definición imprecisa de las dos probabilidades	111	56,7	50	12,1
C4. Definición correcta de las dos probabilidades	31	15,9	127	30,7
Total	196	100,0	414	100,0

Por un lado, constatamos que sólo el 15,9% de los futuros profesores da una definición correcta formalmente y precisa de las dos probabilidades y que esta proporción es menor que la que da las dos definiciones erróneas. Es más preocupante todavía la diferencia observada con los alumnos de Psicología, quienes en mucho mayor porcentaje dan las dos definiciones correctas, aunque también en mucho mayor porcentaje dan las dos definiciones incorrectas.

La diferencia se produce, sobre todo, por la abrumadora proporción de futuros profesores que da definiciones imprecisas de las dos probabilidades (más de la mitad de la muestra) en comparación con los alumnos de psicología. Como hemos visto en la Tabla 1, estas imprecisiones se producen mayoritariamente añadir condiciones innecesarias, debidos a sesgos en el razonamiento condicional (falacia temporal o confusión de condicionamiento y condicionalidad) que aparecen en un 42,3% de los participantes. Estos sesgos se presentan con mucha menor frecuencia en los alumnos de psicología, debido a que estudian estos errores en las asignaturas relacionadas con la psicología del razonamiento.

En la Tabla 3 se comparan los resultados en los dos grupos de nuestra muestra, licenciados en matemáticas (alumnos del último curso de esta licenciatura) y estudiantes de máster de secundaria, quienes aproximadamente en un 50% provienen de otras licenciaturas e ingenierías. Observamos que el porcentaje de alumnos que definen correctamente las dos probabilidades es un mayor en los alumnos de la Licenciatura de Matemáticas, y bastante menor los que fallan en las dos definiciones; la mayor preparación formal de estos estudiantes les ha ayudado a recordar la definición, aunque todavía el porcentaje es muy pequeño. En cambio un 60% de estos alumnos definió las dos probabilidades de forma imprecisa

comparado con el 53,5% de los alumnos del Máster, es decir hay algo mayor presencia e los sesgos descritos.

Tabla 3 – Resultados en dos grupos de futuros profesores (Matemáticas y Máster de secundaria).

	Matemáticas (n=95)		Máster (n=101)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
C0. Errores en las dos definiciones	11	11,6	25	24,7
C1. Define imprecisamente la probabilidad condicional	4	4,2	2	2,0
C2. No define la probabilidad simple	4	4,2	8	8,0
C3. Definición imprecisa de las dos probabilidades	57	60,0	54	53,5
C4. Definición correcta de las dos probabilidades	19	20,0	12	11,8
Total	95	100,0	101	100,0

6. Consecuencias para la formación del profesorado

De acuerdo a Zazkis y Leikin (2008) el conocimiento de las definiciones por parte de los profesores afecta sus decisiones curriculares, la forma en que enseñan los conceptos y sus concepciones sobre la forma en que los estudiantes pueden aprender dicho concepto. Sin embargo, nuestros resultados sugieren que dar una definición correcta no fue fácil para los participantes en la muestra, los cuales mostraron un bajo conocimiento común de la probabilidad de resolver esta tarea. Muchos futuros profesores no pudieron dar una respuesta satisfactoria mostrando un pobre conocimiento de la probabilidad y la enseñanza.

La precisión de las definiciones se vio afectada al añadir los estudiantes con frecuencias condiciones no necesarias (precedencia temporal, causalidad) que reflejan sus sesgos de razonamiento, similares a los descritos en otras investigaciones previas. La mayor preparación formal (respecto, por ejemplo, a estudiantes de psicología) no fue suficiente para abandonar estos razonamientos erróneos; tampoco se observa un mejor desempeño en licenciados de Matemáticas, respecto a alumnos con formación científica, pero más variada.

Estos resultados son motivo de preocupación, ya que los futuros profesores de nuestra muestra tenderán a fallar en la enseñanza de la probabilidad, en algunas actividades profesionales que requieren del razonamiento probabilístico, tales como “averiguar lo que los estudiantes saben, la elección y la gestión de las representaciones de las ideas matemáticas, la

selección y modificación de los libros de texto, decidir entre los cursos alternativos de acción” (BALL; LUBIENSKI; Y MEWBORN, 2001, p. 453).

Estamos de acuerdo con Falk (1986) que el lenguaje cotidiano que utilizamos para indicar un problema de probabilidad condicional carece de precisión y por lo tanto es ambiguo. Sin embargo, un futuro profesor debe dominar el concepto y el lenguaje utilizado en la enseñanza. Ello es especialmente importante en el caso de la definición, pues los estudiantes adquirirán los conceptos a través de su definición y usarán estas definiciones para resolver problemas y en sus argumentaciones (VINNER, 1991).

En consecuencia, se sugiere la necesidad de mejorar la educación sobre probabilidad que estos futuros maestros reciben durante su formación y la necesidad de discutir con ellos sus definiciones y sus sesgos de razonamiento, para prepararlos adecuadamente para su futura labor docente. Será también necesario familiarizarlos con las diferentes aproximaciones clásica, frecuencial y subjetiva, así como con el enfoque de modelización en la enseñanza de la probabilidad, sugerido por Coutinho (2007).

Referencias

AZCÁRATE, P. *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad*, 1995. Tesis (Doctorado en Educación) – Departamento de Didáctica, Universidad de Cádiz, Cádiz, 1995.

BALL, D. L.; LUBIENSKI, S. T.; MEWBORN, D. S. Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers’ mathematical knowledge. En: RICHARDSON, V. *Handbook of Research on Teaching*. Washington, DC: American Educational Research Association, p. 433-456, 2001.

BATANERO, C.; CAÑIZARES, M. J.; GODINO, J. D. Simulation as a tool to train Pre-service school teachers. African regional conference of ICMI, 1th, 2005, Ciudad del Cabo. *Proceedings...* Ciudad del Cabo: ICMI, 2005. CD-ROM.

BEGG, A.; EDWARDS, R. *Teachers’ ideas about teaching statistics*. Annual Meeting of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education. Melbourne, Australia, 1999.

CALVO, C. *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos universitarios de cálculo diferencial e integral*, 2001. Tesis (Doctorado en Didáctica de las Matemáticas) – Departamento de Didáctica de las Ciencias y las Matemáticas, Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, 2001.

CARTER, T. A. Preservice teacher knowledge and understanding of probability and statistics. En: KULM, G. *Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics*. Rotterdam: Sense Publishers, p. 19-43, 2008.

CHERNOFF, E. *Subjective probabilities derived from the perceived randomness of sequences of outcomes*, 2009, 119 p. Tesis (Doctor of Philosophy) – Faculty of Education, Simon Fraser University, 2009.

COUTINHO, S.; QUEIROZ, C.; Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? *REVEMAT*, v. 2, n. 1, p. 50-67, UFSC: 2007.

DÍAZ, C. *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología*, 2007. Tesis (Doctorado en Metodología de las Ciencias del Comportamiento) – Departamento de Psicología, Universidad de Granada, Granada, 2007.

EINHORN, H. J.; HOGART, R. M. Judging probable cause. *Psychological Bulletin*. v. 99, p. 3-19, 1986.

ESTRADA, A.; DÍAZ, A. Errores en el cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada en profesores en formación. *UNO*, n. 44, p. 48-58. 2007.

FALK, R. Conditional probabilities: insights and difficulties. En: DAVIDSON, R.; SWIFT, J. (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. Victoria, Canada: International Statistical Institute, p. 292-297, 1986.

FERNANDES, J. A.; BARROS, P. M. Dificuldades de futuros professores do 1º e 2º ciclos emestocástica. *V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática (CIBEM), Proceedings,...* Porto: Faculdade de Ciências [CD-Rom], 2005.

FRANKLIN, C.; MEWBORN, D. The statistical education of PreK-12 teachers: A shared responsibility. En: BURRILL, G. (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance*. Reston, VA: NCTM, p. 335-344, 2006.

GRAS, R.; TOTOHASINA, A. Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 15, n. 1, p. 49-95, 1995.

HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHILLING, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, Virginia, v. 39, n. 4, p. 372-400, 2008.

LEIKIN, R.; WINICKY-LANDMAN, G. Defining as a vehicle for professional development of secondary school mathematics teachers. *Mathematics Teacher Education and Development*, 3, p. 62-73, 2001.

MA, L. P. *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1999.

MARIOTTI M. A.; FISCHBEIN, E. Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, v. 34, p. 219-248, 1997.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE ESPAÑA-MEC. *Real Decreto 1631/2006*, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Madrid: Boletín Oficial del Estado, n. 5, 2007a.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE ESPAÑA-MEC. *Real Decreto 1467/2007*, de 2 de noviembre, por el que se establecen la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. Madrid: Boletín Oficial del Estado, n. 266, 2007b.

POLLATSEK, A.; WELL, A. D.; KONOLD, C.; HARDIMAN, P. Understanding conditional probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes*, v. 40, p. 255–269, 1987.

SERRADÓ, A.; AZCÁRATE, P.; CARDEÑOSO, J. M. Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En: ROSSMAN, A.; CHANCE, B. (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Bahia, Brazil: International Statistical Institute e International Association for Statistical Education. Online: <www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.2006>.

SILVA, C. B.; COUTINHO, C. Q. S. Reasoning about variation of a univariate distribution: a study with secondary mathematics teachers. In: Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. ICMI study 18 and 2008 iase round table conference, 18th y 4th, 2008, Monterrey. *Proceedings...* Monterrey: ICMI e IASE, [CD-Rom], 2008.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Causal schemas in judgment under uncertainty. En: KAHNEMAN, D.; SLOVIC, P.; TVERSKY, A. (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge, MA: Cambridge University Press, p. 117-128, 1982.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En: TALL, D. O. (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer, p. 65–81, 1991.

ZAZKIS, R.; LEIKIN, R. Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, v. 69, p. 131-148. 2008.