



## FUNCIÓN POR PARTES PARA LA MODELACIÓN GRÁFICA Y ALGEBRAICA DE SITUACIONES CON MÚLTIPLES COMPORTAMIENTOS

Brian Ávila, Reyes Priego, Gabriel Ramayo

brianjabnel03@gmail.com,  
reyesmanueldx0@gmail.com,  
gabo.ramayo@gmail.com

Universidad Autónoma de Yucatán

.....

### Propósito

Modelar situaciones variacionales con comportamientos múltiples mediante el uso de la función por partes en registros gráficos y algebraicos.

### Introducción

La propuesta se dirige a estudiantes de educación media superior para el aprendizaje de la función por partes (FPP), un tipo de función que se usa para modelar situaciones con un comportamiento múltiple (CM), así como para comprender conceptos matemáticos posteriores al aprendizaje de la función (continuidad, límite, derivada, etc.). La importancia del estudio de la FPP radica en el desarrollo del conocimiento matemático (dado que permite el análisis y la centración en el CM) y la variación de estos tipos de comportamientos para establecer nuevas conjeturas. Con ello se amplía el concepto de función, el cual se concibe previamente para comportamientos únicos y suaves, es decir, sin cambios en su comportamiento o con cambios suaves en el mismo. Se ha identificado dos problemáticas que se generan en el aprendizaje de la FPP:

1. Asociada al concepto función, la cual es la dificultad de articular las representaciones, esto es, el tránsito entre los registros algebraico y gráfico (Castiblanco, 2013). Ésta se genera porque el estudiante no identifica qué y cómo varía una situación. Se propone que, para articular los registros anteriores en la FPP, es necesario considerar la conversión entre los mismos y enfatizar el punto donde ocurre el cambio de comportamiento (CDC), el CM y los intervalos donde ocurren los comportamientos.

2. El manejo de desigualdades para determinar los valores del dominio de la FPP donde ocurre cada comportamiento (Lenguizamón & Samper, 1999), debido a que, en este tipo de función, los valores que dependen en cada comportamiento pertenecen a una partición del dominio de la FPP. Así mismo determinar el punto donde ocurre el CDC y pasar al lenguaje algebraico, (con uso de proposiciones, desigualdades, intervalos correspondientes a un comportamiento de la FPP). Lenguizamón & Samper (1999) proponen el uso de diagramas de flujo para enfatizar en el registro algebraico. Por ende, se propone enfatizar el punto donde ocurre el CDC para determinar cuándo y dónde ocurre. Posteriormente se enfatizará en la parte del dominio donde ocurre cada comportamiento para expresarlo en notación de intervalo (no obstante, se expresará igual mediante la desigualdad).

## Fundamentación

### Aspecto didáctico

La variación y el cambio son aspectos del pensamiento y lenguaje variacional que sirven para resignificar el conocimiento matemático del cálculo (Caballero y Cantoral, 2013). Otro aspecto es la modelación, donde Córdoba (2011) lo define como: “una práctica ejercida por profesores y estudiantes en un contexto y tiempo determinado en respuesta a una situación (...) cercano a la realidad de los estudiantes, a partir del cual se resignifica conocimiento matemático escolar funcional (...)”. (p. 10). La variación en el estudio de la función (lo cual incluye a la FPP) se emplea en situaciones para ejemplificar o aplicar un conocimiento en vez de usarse para interpretar o modelar (Vrancken, Giampieri, Engler y Müller, 2016). Caballero y Cantoral (2013) argumentan “el pensamiento y lenguaje variacional se caracteriza por centrarse en la forma en que los fenómenos estudiados cambian de un estado a otro, identificando aquello que cambia... (p. 1198)”. Con relación a la FPP, el CM permite el análisis e interpretación de aquello que cambia. Aplicar o verificar una propiedad no permite el desarrollo del pensamiento variacional (Caballero y Cantoral, 2013, 1201).

En Vrancken, Giampieri, Engler y Müller (2016) se argumenta que “se trata de propiciar una forma de pensamiento favoreciendo el estudio sistemático de la variación y el cambio en contextos de la vida cotidiana, de las ciencias y de la matemática misma.” (p.644). Luque (2010), al analizar libros de texto en el contenido de FPP, menciona que en ninguno se presenta ejercicios introductorios, por lo que se evidencia un tratamiento secuencial (definición, ejemplos y resolución de problemas). Este tratamiento no favorece el

aprendizaje adecuado para la FPP por no enfatizar el CDC y definirla como una función que cumple dos casos o más. Así, se propone analizar cómo es la variación de una situación con un CM (con el objetivo de modelar la situación con el uso de la FPP) caracterizarla y formalizarla mediante el registro gráfico, de manera que el estudiante identifique el CDC y los intervalos donde ocurre cada comportamiento.

### Aspecto epistemológico

El tiempo es una variable independiente y continua. Cabe mencionar que Newton usó al tiempo para el estudio del movimiento (Herrera y Rago, 2005) y el análisis de situaciones que se modelan mediante una expresión algebraica. Jaimes (2012), explica que, Euler menciona en su definición de función que una expresión representa a una curva, donde se entiende que el comportamiento es único, pero que existen curvas que no se representan por una sola expresión. Se reconoce que esta definición se refiere a la FPP. Es necesario reconocer que hay situaciones que se caracterizan por tener un CM, con cada comportamiento que se modela con una expresión, pero todos en conjunto modelan un comportamiento en general. Por lo cual para modelar la situación con el uso de la FPP primero se considera la relación de dependencia entre variables (propia de la función) y la determinación de los comportamientos específicos para la FPP (elemento propio de este tipo de función). Se propone usar el tiempo como la variable independiente - continua, y estudiar estos tipos de comportamientos a través de su variación y sus cambios.

### Aspecto cognitivo

Al identificar los comportamientos de la FPP es necesario establecer dónde ocurre cada uno y definirlos correctamente con relación a la variable independiente. Ortega y Pecharrmán (2004) mencionan el término discretización, el cual hace referencia a la acción de formar intervalos de la variable independiente donde ocurre cada comportamiento. Este término se consideró al realizar la actividad de la propuesta como un elemento por el cual, los estudiantes establecen dónde existe cada comportamiento mediante acciones: separar, agrupar y formar, y enfatizar el análisis en los comportamientos de esos intervalos. Es necesario, primero centrarse en un comportamiento en particular, segundo identificar los valores donde ocurre ese comportamiento, y tercero, expresar esos valores en un conjunto. Se propone el uso del registro gráfico para identificar los comportamientos, y considerar la discretización y las acciones que la involucran para la determinación del conjunto de valores del dominio donde existe cada tipo de comportamiento. Al

establecer los intervalos, posteriormente se expresarán en desigualdades para comprender que ambas indican dónde ocurre cada comportamiento de la FPP.

## Conclusión del análisis

La FPP se centra en el estudio del comportamiento en relación con lo que varía y cómo varía, este último refiriéndose al CDC. Para el aprendizaje de la FPP es necesario retomar algunos aspectos de su epistemología, pues no es conveniente presentarla de manera directa a través de su definición, sino que el estudiante mismo construya su propia definición a partir de la relación de dependencia entre las variables, la descripción del comportamiento de la situación y el análisis de situaciones variacionales expresadas mediante una diversidad de comportamientos, para lo cual, es necesario usar la FPP que modela ese CM con representaciones algebraica - gráfica.

## Actividades didácticas

### Tarea 1

*Objetivo:* Identificar el CDC en una situación variacional mediante el registro gráfico.

*Intencionalidad:* Reconocer la presencia de múltiples comportamientos en la situación.

### Tarea 2

*Objetivo:* Identificar diferentes tipos de comportamiento en la situación variacional de acuerdo con intervalos de tiempo específicos.

*Intencionalidad:*

- I. Establecer los diferentes tipos de movimiento y desplazamiento de la situación variacional de acuerdo con intervalos de tiempo específicos.
- II. Identificar los puntos donde ocurre el CDC en el registro gráfico.
- III. Reconocer la diferencia de los tipos de movimiento y/o desplazamientos de la situación con base en intervalos de tiempo específicos.

### Tarea 3

*Objetivo:* Modelar la situación variacional mediante el uso de la función por partes en su registro algebraico.

*Intencionalidad:* Identificar parte del dominio de las funciones donde se comporta igual que el modelo de la situación con base en la relación entre sus gráficas.

### **Puesta en escena**

La implementación de la propuesta se propone en una sesión de 90 minutos. Se sugiere su realización de manera individual y posteriormente su discusión en binas, de manera que se complemente el análisis y la conjetura de ideas generadas al realizar las tareas de la actividad. Es necesario que el profesor esté atento a los comentarios de los estudiantes durante este tiempo, para dirigir el aprendizaje respecto al objetivo correspondiente de cada tarea. Se sugiere que al transcurrir los 45 minutos de la sesión se inicie la discusión grupal de las respuestas a las tareas y que el profesor realice los énfasis necesarios a partir de la situación variacional y su modelo gráfico.

Se propone que, a través de una situación variacional de la actividad, el profesor enfatice el CDC a partir del análisis de una variable continua (el tiempo) y su CM. Se tiene que verificar que los estudiantes identifiquen y comprendan el tipo de movimiento y desplazamiento de la joven en los intervalos correspondientes, por lo que hay que enfatizar el comportamiento modelado de acuerdo con los intervalos establecidos. Con ello, reconocer que los comportamientos son diferentes, y que en cada intervalo hay un comportamiento distinto a los demás. Además, cuando se relacionan las funciones presentadas con el comportamiento que modela la situación, es necesario que se reconozca que, en cierto intervalo de tiempo, el modelo de la situación se comporta igual que las funciones para establecer los intervalos de cada comportamiento que modela la situación y su respectiva expresión. Ahora se prosigue a la formalización, donde se modela algebraicamente la situación mediante el uso de la FPP (expresión e intervalo en términos de desigualdad), y mencionar que es un tipo de función que se usa para modelar el CM.

Para la evaluación de los objetivos hay que considerar el modelo de situaciones con CM con base en la FPP en su registro gráfico y algebraico, es decir, si ese modelo es correcto de manera total o parcial. Por ello es necesario considerar a qué grado el estudiante identifica el punto (o puntos) donde ocurre el CDC en la situación caracterizada por tener CM, determinar correctamente los intervalos donde se comporta cada uno, así como relacionar el comportamiento con la expresión algebraica que lo modele en dicho intervalo.

## Conclusiones

Hacer que los estudiantes de nivel medio superior modelen situaciones con y sin un CM permite el desarrollo habilidades como visualizar, representar, transformar, generar, comunicar información y modelar; comprender los conceptos de la variación y el cambio, que son parte fundamental en el cálculo. Es conveniente hacer uso de este tipo de función para emplearlos en el ámbito profesional, por ejemplo, para representar de manera gráfica y algebraica las ventas de un producto en cierto tiempo, el desplazamiento de un sujeto u objeto en diferentes tiempos, etc. No obstante, para alcanzar el objetivo de modelar de manera algebraica y gráfica alguna situación que requiera el uso de la FPP, es necesario comprender que, en ese CM, cada comportamiento interpreta algo de acuerdo con la situación, y por eso se determina ese comportamiento que lo representa; además identificar dónde ocurre un CDC y usar un modelo que lo represente, en este caso emplear la FPP.

## Referencias

- Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. En Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26, 1197-1205. México: CLAME.
- Castiblanco, M. (2013). Función parte entera desde la modelación. Recuperado de <http://cibem7.semur.edu.uy/actas/pdfs/86.pdf>
- Córdoba, F. (2011). La modelación en Matemática Educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería (tesis para obtener la Maestría en Ciencias en Matemática Educativa). CICATA, Instituto Politécnico Nacional.
- Herrera, L. & Rago, H. (2005). El tiempo de Newton. Newton y el universo físico. 66-68. Recuperado de [http://www.saber.ula.ve/bitstream/handle/123456789/16001/tiempo\\_new.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://www.saber.ula.ve/bitstream/handle/123456789/16001/tiempo_new.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- Jaimes, N. (2012). *La noción de función, un acercamiento a su comprensión*. Trabajo de investigación. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Bogotá, Colombia.
- Lenguizamón, C. & Samper, C. (1999). Función a trozos: camino hacia su comprensión. *Revista de Educación Matemática*. 11(1). 103-118. Recuperado de <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol11/1/09Lenguizamon.pdf>

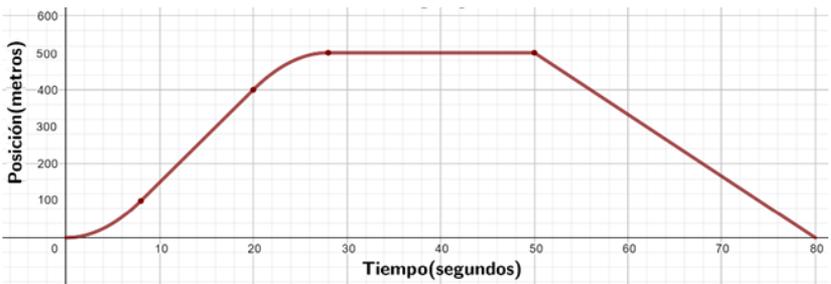
- Luque, C. (2010). Descripción de textos escolares en torno al concepto de función a trozos. *Tecné, episteme y didaxis: revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología*, 28. 20-40.
- Ortega, T. & Pecharromás, C. (2004). Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones. *Revista de Investigación en Educación*, 12(2). 209-221. Recuperado de <https://documat.unirioja.es/descarga/articulo/4888905.pdf>
- Vrancken, S., Giampieri, M., Engler, A. y Müller, D. (2016). Pensamiento y lenguaje variacional al estudiar funciones. Tareas y situaciones para favorecer su desarrollo. En Flores, Rebeca (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 643-652. México, DF: CLAME.

## Anexos

### Actividad

Resuelve la siguiente actividad de manera individual. Luego reúnete con un compañero para discutir tus respuestas.

Situación: Una joven se encuentra en su casa y necesita recoger unos documentos en su trabajo, lugar que se encuentra a 500 metros. Para transportarse usa su motocicleta. La siguiente gráfica modela la posición de la joven respecto al tiempo.



Gráfica. Posición de la joven respecto al tiempo.

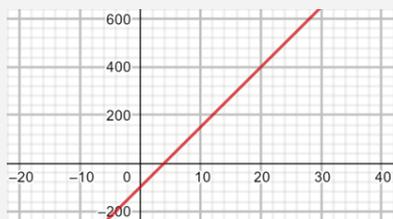
- Argumenta si la velocidad de la joven es la misma en todo su recorrido.
- Responde lo siguiente:

- I. En la siguiente tabla se presentan cinco intervalos de tiempo. Escribe en cada uno el tipo de movimiento (acelera, desacelera, tiene una velocidad constante, se mantiene en reposo) y el tipo de desplazamiento que la joven realiza respecto a su casa (se aleja, se acerca o se mantiene en la misma posición).

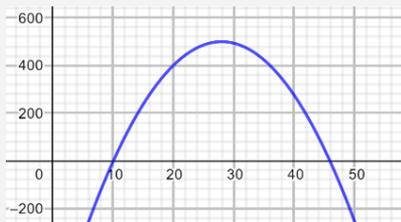
Intervalo de tiempo	Tipo de movimiento	Desplazamiento respecto a su casa
(0,8)		
(8,20)		
(20,28)		
(28,50)		
(50,80)		

- II. ¿Alguno de los intervalos anteriores se modela con el mismo comportamiento del recorrido de la joven?, ¿por qué?
- III. ¿Qué sucede con el comportamiento de la posición de la joven que se modela en los tiempos 8, 20, 28 y 50 segundos?

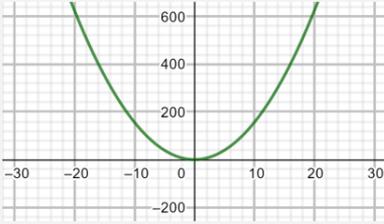
c) Observa las siguientes funciones y realiza lo que se solicita



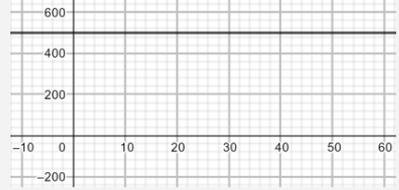
$$r(x) = 25x - 100$$



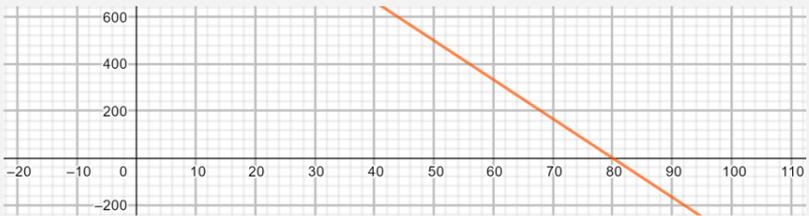
$$s(x) = -\frac{25}{6}(x - 28)^2 + 500$$



$$q(x) = \frac{25}{16}x^2$$



$$t(x) = 500$$



$$u(x) = -\frac{50}{3}x + \frac{400}{3}$$

Con las funciones anteriores es posible construir la función que modela la posición de la joven respecto al tiempo. Establece de qué manera. (Apóyate de la división del dominio en intervalos).