ESTUDIO DE LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE VECTOR EN $\mathbb{R}^2$, Y PROPUESTA DIDÁCTICA.

Jorge Acevedo Mendoza, Silvia Morelos Escobar, José Zaldívar Rojas, Samantha Quiroz Rivera
jorge_acevedo96@hotmail.com,
silvia.morelos@gmail.com,
david.zaldivar@uadec.edu.mx,
samantha.quiroz@uadec.edu.mx
Universidad Autónoma de Coahuila
Coahuila, México

Resumen

El estudio de los vectores es de fundamental importancia en la enseñanza de las matemáticas de nivel superior. Sin embargo, es poco estudiado en torno a Matemática Educativa. En la presente investigación se propone una actividad didáctica, para apoyar la enseñanza de los vectores en dos dimensiones, por medio del programa GeoGebra.

Abstract

The studying of vectors is primordial in framework in the teaching of advance level mathematics. There are little studies about this concept from the point of view in Educated Mathematics. In the present research work was elaborated a proposal of didactic activities, to support teaching vectors in two dimensions, through the GeoGebra program.

Problema de investigación

El estudio de los vectores es de fundamental importancia para los estudiantes de nivel superior de carreras relacionadas con el área de Ingeniería, Física y Matemáticas. Las aplicaciones de los vectores son múltiples y la relación del concepto de vector con otros conceptos matemáticos, como la derivada y la integral, representan un universo de posibilidades, para desarrollar herramientas que apoyen la generación de conocimiento, dentro y fuera del aula.

La presente investigación, se enfocó en el concepto de vector en $\mathbb{R}^2$, desde una perspectiva del Cálculo. Se observó que existe poca investigación en Matemática Educativa respecto al concepto de vector, tanto en dos o tres dimensiones, como en $\mathbb{R}^n$, respecto a espacios vectoriales y álgebra lineal, por lo que es evidente que existen áreas de oportunidad para futuras investigaciones de estos conceptos, en el marco de Matemática Educativa.

No obstante, en el estudio de Flores, González y Herrera (2007) se muestra que la mayoría de los profesores de los cursos relacionados con el concepto de vector, reconocen como difícil para los estudiantes pensar en cantidades físicas como cantidades vectoriales. Además de ello, los alumnos presentan dificultades para distinguir a detalle las diferencias entre las cantidades escalares y las cantidades vectoriales. Para Aguirre y Erickson (1984), las dificultades principales que poseen los estudiantes al trabajar con la noción de vector, son el reconocimiento y el uso de las componentes de un vector, la evaluación de la magnitud y dirección, la suma de dos vectores gráficamente y la suma de dos vectores utilizando componentes.

Además de lo anterior, la presente investigación reconoce el rol de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas. Específicamente, en el área de geometría, los paquetes computacionales dinámicos han permitido realizar diversas construcciones matemáticas, desde puntos, rectas, hasta vectores (Rodríguez, 2017). Así, dichos paquetes ofrecen a los alumnos la posibilidad de visualizar y representar construcciones geométricas que pueden apoyar a un mejor entendimiento de los conceptos matemáticos (Sbitneva, Moreno y Serna, 2017).

Por otra parte, el análisis de libros de texto, es fundamental para determinar la problemática de la enseñanza del concepto de vector, ya que ellos representan la primera fuente de información, tanto de profesores como de estudiantes, y como se explica más adelante, existen omisiones en algunos libros, que generan confusión respecto a este concepto.

Toda esta problemática lleva a la pregunta de investigación que rige el presente estudio: ¿cómo se presenta el concepto de vector en algunos libros de texto y cuáles son las dificultades de los alumnos al estudiarlo en un entorno tecnológico?

Con base en todo ello, y en la información presentada en el marco teórico, se presenta una nueva propuesta didáctica, para atender esta problemática, en un entorno de geometría dinámica, los resultados de esta nueva propuesta, se presentarán en una investigación futura.

Marco teórico

El presente trabajo de investigación está teóricamente sustentado sobre tres bases que se presentan a continuación:

1. La Teoría de Representaciones

Todo concepto matemático tiene una naturaleza abstracta, de modo que, para su estudio, son requeridos mayores esfuerzos cognitivos y de razonamiento. La Teoría de Representaciones de Duval, estudia esta característica de los objetos matemáticos, a través del estudio de las representaciones semióticas. Se define un **registro de representación semiótica** como un sistema de signos que permite cumplir las funciones de comunicación, tratamiento y objetivación (D'Amore, 2005). Estas representaciones pueden ser verbales, algebraicas, gráficas, tabulares, esquemáticas, entre otras. Dichas representaciones semióticas, sirven como medio para exteriorizar, lo que de manera abstracta está en la mente.

De esta manera, de acuerdo con Duval (1999) no *existe noética sin semiótica*. La semiótica es la representación por medio de signos y la noética es la adquisición conceptual del objeto. Existen en la semiótica tres actividades cognitivas: **representación – tratamiento – conversión** (D'Amore, 2005). La *representación* consiste en sustituir el objeto de estudio por un signo o sistema de signos, el *tratamiento* son las operaciones que se llevan a cabo dentro de un mismo registro de representación semiótica, mientras que la *conversión* es la transición de un registro de representación a otro. Para Duval, el conjunto de estos tres elementos es lo que permite la construcción de conocimiento en matemáticas (D'Amore, 2005).

Ahora bien, de acuerdo con Hitt (1998) la visualización de estas representaciones propiciaría un aprendizaje más duradero. Ello requiere reconocer a la tecnología educativa como un aliado en el aprendizaje de las matemáticas en el aula (Hitt, 2013). Específicamente, la presente investigación comulga con las ideas de Sbitneva, Moreno y Serna (2017) quienes presentan a Geogebra como promotor de esta visualización de conceptos matemáticos.

2. Análisis Epistemológico del concepto de vector

El concepto de vector como objeto matemático tiene dos ramificaciones o vertientes que propiciaron su origen, por un lado, como objeto matemático abstracto y, por otro lado, como objeto que busca explicar fenómenos físicos.

> En su famoso libro, *Consideraciones y Demostraciones Matemáticas Sobre Dos Nuevas Ciencias,* Galileo (1564-1642) utiliza repetidamente unos diagramas de velocidades, similares a la representación triangular usada por el matemático, italiano, Nicolás Oresme; además, de esta misma época datan los trabajos del matemático holandés Simón Stevin, quien formuló explícitamente el principio del paralelogramo de fuerzas (Zea, 2012, p. 17).

Posteriormente, Isaac Newton trabajó con la suma de dos fuerzas individuales, por medio del paralelogramo de fuerzas. A su vez, Gottfried Wilhelm Leibniz sintió la necesidad de un álgebra más general, que fuera capaz de estudiar situaciones, ángulos, rotación y movimientos, sin embargo, no tuvo éxito en el desarrollo de una teoría respecto a estas situaciones (Zea, 2012).

De esta forma, el origen del concepto de vector, está relacionado, primero con la suma de vectores por medio del paralelogramo de fuerzas o velocidades, posteriormente surgió con la representación de los números complejos. Es importante mencionar la aportación del francés Saint-Venant (1797-1886), que presenta Zea (2012), definiendo lo que hoy es un vector con tres características, *magnitud, dirección y sentido*, antecedente de fundamental importancia respecto a este concepto. De esta forma, es evidente que, para llegar al concepto actual de vector, pasaron muchos años de desarrollo científico, así como múltiples personalidades con sus distintas aportaciones.

3. Análisis de algunos libros de texto utilizados para la enseñanza del concepto de vector

Para el presente análisis, se eligieron seis libros de cálculo: Cálculo de Boyce y DiPrima (1999), Cálculo con Geometría Analítica de Edwards y Penney (2006), Cálculo de Larson (2006), Cálculo con Geometría Analítica de Swokowski (1989), Cálculo. Conceptos y contextos de Stewart (2006) y El Cálculo de Leithold (1998). Esta elección fue hecha debido a que son los libros más utilizados por profesores en las asignaturas donde se enseña el concepto de vector. Para llevar a cabo la selección de un tipo de análisis, se tomó como base la revisión de libros de texto que aparece en Castañeda (2004), y se determinaron seis criterios: los antecedentes del tema de vector, los argumentos físicos, argumentos geométricos, argumentos analíticos-algebraicos, los ejemplos que expone y los problemas propuestos por los autores.

Los resultados de este análisis mostraron que, en la totalidad de los libros estudiados, se comienza mencionando ejemplos de vectores, así como ejemplos de escalares, como temperatura, presión, entre otros. Los libros definen un vector como una cantidad que tiene magnitud y dirección. En todos los libros analizados, queda bien aclarado lo que es la magnitud de un vector, y la forma de encontrarla, la dirección del vector para todos está relacionada con un ángulo; sin embargo, solamente el libro de Leithold (1998), explica una forma para encontrar la dirección de los vectores en dos dimensiones.

Es de suma importancia mencionar que, en los libros de Cálculo con Geometría Analítica de Edwards y Penney (2006), Cálculo de Larson (2006) y Cálculo con Geometría Analítica de Swokowski (1989) se utiliza la característica de dirección como un sinónimo de la característica de sentido de un vector, ya que solicitan encontrar un vector en dirección opuesta a un vector dado, cuando lo correcto sería solicitar el vector con sentido opuesto, esto sin duda, genera confusión. Swokowski (1989) incluso define el vector , como el vector con la misma longitud que , pero dirección opuesta, cuando un escalar c es negativo (Figura 1).

Al principio de esta sección se usó el símbolo $c\overrightarrow{AB}$ para denotar un vector que tiene la misma dirección que $\overrightarrow{AB}$ si $c > 0$, o la opuesta si $c < 0$. A continuación se define el análogo de este concepto para vectores en V_2.

DEFINICIÓN (14.7)

Dos vectores **a** y **b** diferentes de cero en V_2 tienen

(i) la **misma dirección** si $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ para algún escalar $c > 0$.

(ii) la **dirección opuesta** si $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ para algún escalar $c < 0$.

Figura 1. Imagen que muestra la confusión entre dirección y sentido de un vector en Swokowski (1989).

Metodología

El paradigma fenomenológico al realizar investigación

Según Según Valenzuela y Flores (2014) un investigador sigue un paradigma fenomenológico cuando emplea metodologías cualitativas, para tratar de comprender los significados que las personas asignan a situaciones particulares. A su vez, la investigación cualitativa es flexible, comienza sus estudios con interrogantes formuladas vagamente. Los investigadores cualitativos se identifican con las personas que estudian, con el fin de comprender como ven las cosas. Los métodos sirven al investigador, nunca el investigador es esclavo de un procedimiento o técnica.

A su vez, los fenomenologistas sostienen que hay múltiples formas de interpretar las experiencias, y que el significado de nuestras experiencias es lo que constituye la realidad (Valenzuela et al, 2014).

La presente investigación está basada en un paradigma fenomenológico, ya que se empleó una metodología cualitativa, enfocada, por una parte, en analizar como aparece el concepto de vector en los libros, así como la realización de la actividad piloto, donde la prioridad fue determinar la problemática de los estudiantes con los vectores, sin llevarla a cabo en un entorno frio y artificial, sino tal como se haría cualquier actividad en un centro de cómputo.

La actividad piloto, de la que se exponen los resultados, se aplicó de forma individual, a un conjunto de 10 alumnos de Ingeniería Física en una universidad pública al norte de México. En el momento del estudio, los alumnos se encontraban cursando la materia de Física, que se imparte en los primeros semestres de la carrera. Cabe destacar, que este pilotaje se realizó en la primera fase de la investigación, de ahí que su objetivo fuera conocer de viva voz la problemática y darle fundamento, utilizando herramientas tecnológicas, para posteriormente, realizar una propuesta didáctica, sustentada en las bases de la investigación antes mencionadas.

Los resultados de la actividad piloto, además del sustento teórico, permitieron el diseño de un nuevo conjunto de actividades, a las que se les llamó Actividad 1 y Actividad 2, con sus respectivas guías para el profesor (Disponibles para uso libre en: https://www.dropbox.com/sh/tzqij84xueyljkj/AADCGRbunaiwdse7NkLtrVTea?dl=0).

Como ya se mencionó, se decidió sustentar la investigación en la Teoría de Representaciones de Duval, y en los trabajos de Fernando Hitt, referentes al uso de tecnología de cómputo, como apoyo visual para una mejor enseñanza de las matemáticas. A su vez se realizó un análisis epistemológico del concepto de vector en dos dimensiones, por esta razón, se dio prioridad en las actividades al estudio del paralelogramo al sumar vectores. Por otro lado, se encontró que hay carencias en los libros de texto analizados, por lo que en la actividad 2, se dio importancia a la dirección de los vectores, como una característica distinta del sentido.

Resultados

Los resultados de la actividad piloto, se resumen a continuación: el principal error cometido por los estudiantes fue el no saber identificar la relación entre los vectores A, B, y la suma de $A+B$, ya que sólo el 12.5% de ellos pudieron relacionar los vectores que se suman con la diagonal del paralelogramo formado por A y B, a su vez, sólo el 25% de los estudiantes pudieron identificar la relación entre los vectores A y B y la resta de $A-B$. Por otro lado, el 37.5% de los alumnos logró visualizar que, tanto al sumar, como al restar vectores, se forma un paralelogramo, respectivamente, dejando ver que no les queda claro el inverso aditivo de un vector; mientras que el 50% de los estudiantes presentaron dificultad para visualizar que al modificar los vectores A y B en GeoGebra, se conserva el paralelogramo, tanto al realizar la suma, como la resta de los mismos.

En respuesta a las preguntas, se detectó un conjunto de dificultades por parte de los estudiantes, las que se clasifican en las siguientes categorías: desconocimiento de las características básicas de un vector; dificultades para interpretar gráficas; visualizar los vectores como escalares y dificultades para identificar la relación entre un paralelogramo y sus diagonales. En la Tabla 1 se muestran estas categorías y su incidencia, nótese que cada alumno presentó más de una dificultad.

Tabla 1. Porcentaje de incidencia de las dificultades de los estudiantes por categoría.

Categoría	Incidencia (%)
Desconocimiento de las características básicas de un vector.	90
Dificultades para identificar la relación entre un paralelogramo y sus diagonales.	80
Dificultades para interpretar gráficas.	70
Visualizar los vectores como escalares.	20

La nueva propuesta de actividad didáctica, se divide en dos hojas de trabajo: Actividad 1 y Actividad 2, que se explican de forma general a continuación:

Propuesta: Actividad 1

Objetivo: que el alumno comprenda el concepto de vector en dos dimensiones, sus características, y se familiarice con GeoGebra. Con la primera actividad se pretende:

1. Comenzar a manejar GeoGebra: vista algebraica, vista gráfica, con los ejes coordenados y la cuadrícula.
2. Graficar dos puntos en el plano, formar un vector a partir de dichos puntos.
3. Graficar dos puntos y un vector a partir de ellos, respectivamente.
4. Visualizar que los vectores con la misma forma y tamaño, de manera gráfica, aunque estén en distintos lugares, son equivalentes.
5. Graficar vectores equivalentes al vector del paso 2, por medio del comando equipolente de GeoGebra.
6. Apreciar, tanto en la vista gráfica, como en la algebraica, que los vectores son equivalentes.
7. Buscar la dirección de los vectores, primero usando papel y lápiz, luego encontrar la dirección del vector de forma gráfica.
8. Encontrar la dirección del vector de manera algebraica, utilizando la función $arctan(x)$. Propiciar la transición de un registro de representación gráfico al algebraico, y viceversa.

Propuesta: Actividad 2

Objetivo: que el alumno realice la transición de un registro de representación a otro, del gráfico al algebraico, así como del gráfico al verbal, y de igual forma del algebraico al verbal y viceversa. Además, que el alumno sume y reste algebraicamente dos vectores en $\mathbb{R}^2$; con la finalidad de descubrir que al sumar dos vectores en $\mathbb{R}^2$, el resultado es el vector dado por la diagonal del paralelogramo formado por dichos vectores, y al restar dichos vectores el resultado es el vector dado por la otra diagonal del paralelogramo. Esta actividad se puede consultar en la liga presentada anteriormente.

Conclusiones

La presente investigación concluye que, el aprendizaje del concepto de vector presenta muchas dificultades para los estudiantes, entre ellas las reportadas por la literatura, así como las identificadas en los resultados de la aplicación de la actividad piloto.

El principal aporte de la investigación consiste en la propuesta de dos actividades que se realizan por medio de Geogebra cuyo objetivo principal es promover, a través de la tecnología, el tránsito entre diferentes registros de representación en el estudio de los vectores. Estas propuestas están sustentadas en la Teoría de Representaciones de Duval, así como un estudio epistemológico cuidadoso y el análisis detallado de libros referentes al concepto de vector. Se espera en una futura investigación reportar los resultados de la implementación estas propuestas finales, con el objetivo de conocer su impacto en la enseñanza del concepto de vector.

Referencias

Aguirre, J. y Erickson, G. (1984). Concepciones de los alumnos sobre las características vectoriales de tres conceptos de física. *Revista de Investigación en Enseñanza de las Ciencias, 21*(5).

Boyce, W., DiPrima, R. (1999). *Cálculo*. Ciudad de México, México: Editorial Grupo Patria Cultural.

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión* (Tesis de Doctorado no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Ciudad de México, México: Editorial Reverté.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Colombia: Programa Editorial Universidad del Valle.

Edwards, C. y Penney, D. (2006). *Cálculo con Geometría Analítica*. Ciudad de México, México: Editorial Pearson Prentice Hall.

Flores, S., Gonzalez, M. y Herrera, A. (2007). Dificultades de entendimiento en el uso de vectores en cursos introductorios de mecánica. *Revista Mexicana de Física, 53*(2), 178-185.

Hitt, F. (1998). Visualización Matemática, Representaciones, Nuevas Tecnologías y Curriculum. *Educación Matemática, 10*(2)*,* 23-45.

Hitt, F. (2013). ¿Qué tecnología utilizar en el aula de matemáticas y por qué? *Revista Electrónica AMIUTEM, 1*(1), 1-18.

Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. (2006). *Cálculo.* Ciudad de México, México: Editorial McGraw-Hill.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo*. Ciudad de México, México: Editorial Oxford University.

Rodríguez, L. (2017). *Geogebra como recurso educativo para la enseñanza de las matemáticas en la educación superior* (Tesis de Licenciatura no publicada) Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá, Colombia.

Sbitneva, L., Moreno, N y Serna, L. (2017). Comprensión de conceptos fundamentales de geometría proyectiva a través de visualización de construcciones con GeoGebra 3D. *Actas del Segundo Congreso Internacional sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*, Granada: Universidad de Granada.

Stewart, J. (2006) *Cálculo. Conceptos y contextos.* Ciudad de México, México: Editorial Thomson.

Swokowski, E. (1989). *Cálculo con Geometría Analítica.* Ciudad de México, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Valenzuela, J. y Flores, M. (2014). *Fundamentos de investigación educativa. Volumen 1.* Ciudad de México, México: Editorial Digital del Tecnológico de Monterrey.

Zea, C. (2012). *La instauración histórica de la noción de vector como concepto matemático* (Tesis de Maestría no publicada), Facultad De Educación y Pedagogía de la Universidad Del Valle, Santiago De Cali, Colombia.