Plácido Hernández Sánchez, Gabriela Buendía Ábalos

SIGNIFICADOS PARA LA MATEMÁTICA ESCOLAR A PARTIR DE SU USO EN UN ESCENARIO EXTRAESCOLAR. UN EJEMPLO CON LA PROPIEDAD PERIÓDICA

Meanings for School Mathematics from its use in an extra-scholar scenario. An example with periodic property

RESUMEN

Uno de los objetivos de la matemática escolar es generar un conocimiento que se integre funcionalmente a nuestras vidas. Así, se suscribe a la perspectiva teórica del uso del conocimiento en otros escenarios como una base de significación para la matemática escolar. Se analiza el caso de la propiedad periódica de las funciones y de su uso en un escenario de divulgación. En éste, el uso de dicho saber al trabajar en una actividad de observación astronómica se muestra más allá de la aplicación de una definición, y se desarrollan herramientas y argumentos alrededor de un conocimiento matemático capaz de integrarse y ser útil -no utilitario- al individuo. Los resultados de los análisis de uso extraescolar de la periodicidad reportados abonan a una base de significados para la propiedad periódica y, de esta forma, a una matemática escolar funcional para la vida de los estudiantes.

PALABRAS CLAVE:

- *Conocimiento en uso*
- *Periodicidad*
- *Prácticas*
- *Socioepistemología*

ABSTRACT

One of the goals of school mathematics is to generate a knowledge integrated into our lives. In view of this, we propose the theoretical perspective of the knowledge use in other scenarios as a significance basis for school mathematics. We analyze the case of the periodic property of the functions and its use in a science museum. In it, the use of such knowledge while working in an astronomical observation activity shows itself beyond a definition application; tools and arguments arise around a mathematical knowledge that can be useful. The results of the analyzes of extracurricular use of the periodicity that are reported contribute to a base of meanings for the periodic property and, with it, to a functional school mathematics for the life of the students.

KEYWORDS:

- *Using knowledge*
- *The periodic property*
- *Practices*
- *Socioepistemology*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2019) *22* (3): 261 - 284.
Recepción: Septiembre 15, 2018 / Aceptación: Octubre 10, 2019. DOI: 10.12802/relime.19.2231

RESUMO

Um dos objetivos da matemática escolar é gerar um conhecimento que integre-se de maneira funcional nas nossas vidas. Assim, o presente texto se insere na perspectiva teórica da utilização do conhecimento em outros cenários como base para o enriquecimento da matemática escolar. Neste trabalho é analisado o caso da propriedade periódica das funções e de seu uso em um cenário de divulgação (museu de ciências). Neste contexto o uso de tal saber na atividade de observação astronômica se coloca lém da aplicação de uma "simples" definição, isto é, se desenvolvem ferramentas e argumentos entorno de um conhecimento matemático capaz de integra-se e ser útil ao indivíduo, mas não utilitário. Os resultados das análises reportados neste estudo extraescolar criam uma base de ricos significados para a propriedade periódica das funções e, desta forma, gera-se uma matemática escolar funcional para a vida dos estudantes.

PALAVRAS CHAVE:

- *Conhecimento em prática*
- *Propriedade periódica*
- *Periodicidade*
- *Sócio epistemologia*

RÉSUMÉ

L'un des objectifs des mathématiques scolaires est de générer des connaissances qui s'intègrent fonctionnellement dans nos vies. Ainsi, l'écrit s'inscrit dans la perspective théorique de l'utilisation de la connaissance dans d'autres scénarios comme base significative des mathématiques scolaires. On examine le cas de la propriété périodique des fonctions et de leur utilisation dans un scénario de divulgation. Dans celui-ci, l'utilisation de ce savoir dans le cadre d'une activité d'observation astronomique s'étend au-delà de l'application d'une définition et des outils et des arguments sont développés autour d'une connaissance mathématiques capable de s'intégrer et être utile - non utilitaire - à l'individu. Les résultats des analyses de l'utilisation extrascolaire de la périodicité rapportée donnent une base de signification pour la propriété périodique et donc pour une mathématique scolaire fonctionnelle pour la vie des élèves.

MOTS CLÉS:

- *Connaissance en usage*
- *Périodicité*
- *Pratique*
- *Socio-épistémologie*

1. Introducción

La escuela busca generar un conocimiento matemático funcional que se integre a la vida del estudiante; sin embargo, parece que sólo se considera cómo se enseña matemáticas sin cuestionarla. Discutir sobre cuánto sabe de matemáticas un estudiante termina en estrategias para enseñar más matemáticas sin que se incluyan consideraciones sobre cómo se usa el conocimiento en otros contextos, dentro y fuera de la escuela (Cordero, 2006).

Proponemos un marco de significación para la matemática escolar que considera que toda forma de saber -popular, técnico o culto- es legítima y, en conjunto, conforman la sabiduría de la humanidad (Cantoral, 2013a). A esto nos referiremos con reconocer la naturaleza social de la matemática escolar, y en esa línea proponemos considerar su uso como una fuente de significación.

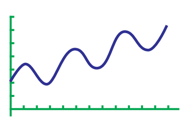
En este escrito, trataremos el caso de la propiedad periódica de las funciones. Las tareas escolares usuales no suelen considerar que la periodicidad caracteriza un cierto tipo de cambio que no sólo es repetitivo, sino que lo es de manera particular. En cambio, el tratamiento escolar privilegia conocer, aplicar o comprobar una fórmula para que el carácter periódico del objeto una función, una gráfica, un fenómeno, una serie, sea reconocido.

Planteamos pues un cuestionamiento sobre la periodicidad que amplíe el marco de significación desde lo exclusivamente analítico hacia el reconocimiento de los elementos que provee un contexto extraescolar, uno de divulgación. El objetivo es hacerlo a través de un análisis de usos de la periodicidad y dar una base de significados para dicha propiedad. Así se aporta un cambio epistemológico para la matemática escolar, uno que reconozca su naturaleza social y se encuentre en camino de lograr un conocimiento funcional para el ser humano.

2. Antecedentes: el conocimiento matemático escolar

Las prácticas educativas más tradicionales consideran que el aprendizaje de los estudiantes depende de la atención que presten: un buen comportamiento en clase, una ejecución repetitiva y memorística de los algoritmos y las propiedades que se enseñan en el aula. En ese sistema didáctico, la periodicidad tiene un marco de referencia limitado pues suele ser exclusivamente analítico y está relacionado con el conocimiento de la igualdad $f(x)=f(x+p)$ o la forma particular de la función periódica por excelencia: sen $(x)=$ sen $(x+2\pi)$.

Buendía (2010, 2011) reporta casos en los que la función $y=x+\text{sen}\, x$ se califica como periódica porque sube siempre igual (figura 1). En la respuesta, aunque pareciera que sí se nota la repetición presente, el carácter periódico se hereda por la presencia de la función seno en la expresión:



... es periódica porque es senoidal y porque va subiendo de dos en dos

Figura 1. Heredando la propiedad periódica (Buendía, 2010)

Si bien la periodicidad es una propiedad que caracteriza un comportamiento repetitivo, ese comportamiento no sólo se refiere a que algo se repite, sino que importa reconocer cómo se repite. La figura 2 es una ilustración de cómo, aunque se evidencia la repetición en el decimal periódico 7/22 para hallar la cifra 120, el carácter periódico simplemente no es visible, por lo tanto, no se aprovecha, no se usa. Importa pues reconocer significativamente el cambio y cómo cambia el cambio.

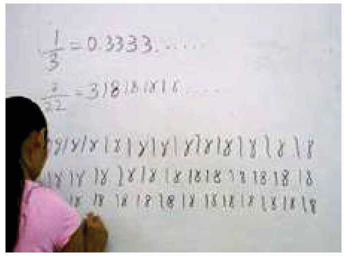


Figura 2. La fracción 7/22 (Buendía, 2011)

De acuerdo con Cantoral (2013b), cambio se entiende como una modificación de estado y por otra parte, variación es la cuantificación de dicho cambio. No obstante, agrega el autor, la construcción del concepto de variación es un proceso difícil y lento.

> … pues requiere la integración de distintos campos simbólicos, numéricos, algebraicos, analíticos, visuales, gráficos y geométricos, así como una adecuada comprensión de procesos matemáticos específicos, como: número, variable, constante, parámetro, función, límite, continuidad, derivada, integral, convergencia, representación e infinito para tener una adecuada construcción de las nociones de cambio y la variación (p. 45).

El pensamiento variacional ha sido fundamental en el desarrollo del conocimiento científico: el estudio del cambio sirve para entender sus efectos en diversos fenómenos. Es más, en numerosos casos lo que conocemos es cómo cambia el cambio. Obsérvese en la figura 1 cómo en la caracterización de la gráfica, como periódica, en realidad lo que se está señalando es cómo cambia el cambio.

Poincaré, por ejemplo, propuso un nuevo enfoque para abordar un problema trascendental de su época: el problema de los *tres cuerpos*, problema que planteaba conocer en un instante cualquiera de las posiciones y velocidades para tres cuerpos de masa arbitraria y de velocidades y posiciones iniciales conocidas, en virtud de su atracción gravitacional. En ese enfoque, aprovecha el comportamiento periódico de los tres cuerpos celestes, pero ese movimiento periódico está determinado no sólo cuando un cuerpo pasa por el mismo punto, sino cómo lo hace: a la misma velocidad. Así, la llamada sección de Poincaré permite que en vez de seguir por el telescopio un cuerpo a lo largo de toda su trayectoria alrededor de la Tierra, uno se pueda enfocar en un plano que va de norte a sur, de un horizonte a otro, alineado con el centro de nuestro planeta. Cuando el cuerpo pasa por primera vez, se toma nota de su velocidad y dirección; la periodicidad determina que el cuerpo vuelva a aparecer en el mismo punto con la misma velocidad y dirección. De esta manera, la cualidad periódica y sus variaciones se vuelven la herramienta de estudio; estudiarlas en conjunto permite el desarrollo del conocimiento matemático y científico (Collette, 1986).

3. Referentes teóricos

La fuente y el entorno de significación para la matemática escolar suele ser la matemática misma; concretamente para el caso de la periodicidad, el carácter periódico de un objeto (un fenómeno, una función) se analiza sólo a través de la comprobación de la fórmula que caracteriza a la propiedad periódica y el logro del sistema educativo es que el estudiante adquiera la fórmula: la sepa enunciar y comprobar.

Desde esa epistemología, la secuencia que busca el sistema didáctico se ve *como primero te enseño, y después aplicamos*. Pero, el factor tiempo en la escuela impacta negativamente, pues por falta del mismo las *aplicaciones* ya no se cubren. O bien se deja al estudiante descubrirlas por sí mismo, pero cuando la matemática se desarrolla escolarmente sin significados, éstos no se obtendrán por decreto curricular.

La propuesta socioepistemológica considera el permanente desarrollo del pensamiento matemático a través de prácticas, y así toda forma de saber -culto, tradicional, escolar, extra - escolar - importa. Se posiciona a las prácticas en el centro de la explicación didáctica debido a su rol en la generación del conocimiento matemático. No niega al objeto matemático ni la importancia de su adquisición -como la definición de la periodicidad en términos de una igualdad- sino que lo quita como centro y, por lo tanto, como el único fin de la enseñanza. Resulta necesario considerar otros escenarios como el social, cultural, histórico o institucional, y en cada uno de ellos, al hombre que hace matemáticas en contraposición a sólo considerar la producción matemática final lograda (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2014; Buendía, 2010).

La investigación socioepistemológica desarrolla estrategias de investigación que permiten poner al descubierto aquellas circunstancias relacionadas con la generación del conocimiento matemático; éste puede evidenciarse entonces como articulado, totalmente situado, y su uso es lo que se transforma en el objetivo a desarrollar. De acuerdo con Cantoral (2013a), se suple la idea de aprendizaje como adquisición para dar lugar a ese *conocimiento en uso* que modifica al individuo ante tareas de su propio entorno vivencial. Estos elementos conforman un triángulo didáctico propio de la Socioepistemología (figura 3) y, de hecho, con esta base construimos el diseño metodológico de la investigación presentada en este escrito (véase sección 5.1).

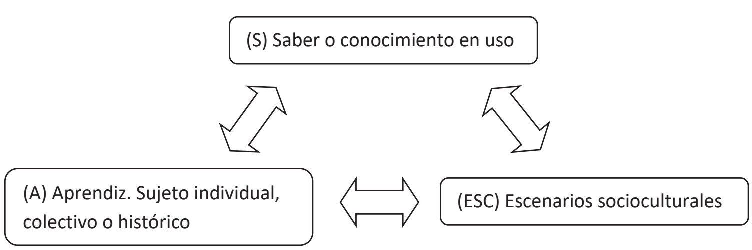


Figura 3. Un triángulo didáctico (adaptado de Cantoral, 2013a)

Ahora bien, hablar del desarrollo del pensamiento matemático depende de cambiar lo que estamos enseñando y no sólo cómo lo estamos enseñando. De esta manera, se da prioridad a la investigación - innovación en Matemática Educativa para problematizar los contenidos matemáticos de la escuela. Las fuentes de significación para el saber matemático van más allá de la matemática misma para considerar, en su problematización, por ejemplo, escenarios de origen, profesionales, de divulgación, de comunidades indígenas entre muchos otros. En la figura 4, Montiel y Buendía (2012) muestran una ruta metodológica particular en este tipo de estudios: a partir de establecer una problemática, se realiza un análisis de corte socioepistemológico cuyas posibles fuentes pueden apreciarse en la parte derecha, lo que nos permite tener una base -una epistemología de prácticas y usos- para incidir en el aula.

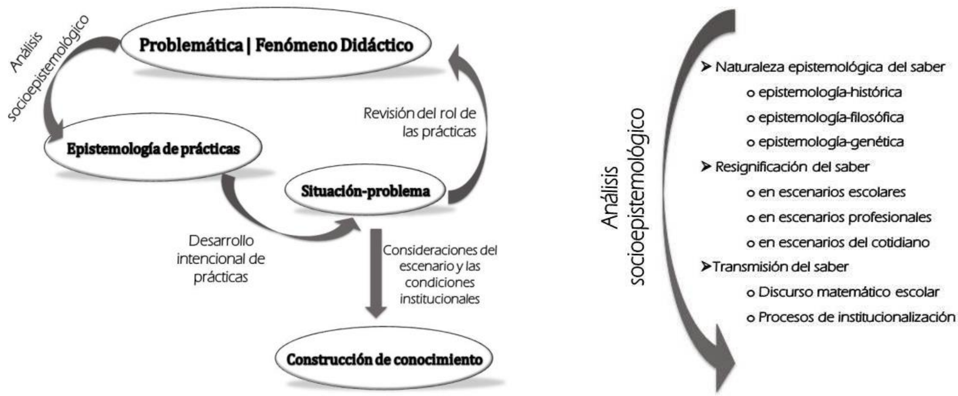


Figura 4. Fuentes de problematización (Montiel y Buendía, 2012)

Cuando la historia se convierte en una fuente de significación para la matemática, se obtienen elementos que enriquecen un comportamiento periódico. Por ejemplo, Euler (Euler, 1948), el primer matemático que caracterizó una función periódica, lo hacía en realidad a través del comportamiento repetitivo de la curva sin la expresión analítica de la función. En la figura 5 podemos ver una ilustración de dicha caracterización en la que señala que los intervalos marcados con corchetes son iguales y, así, la curva es periódica.

Por su parte, Hooke, quien usó la cualidad periódica para el desarrollo de un pensamiento científico, en realidad era un hombre - laboratorio que transitaba continuamente de lo geométrico al estudio mecánico de los resortes, y de ahí al estudio de cuerpos cuyas partículas oscilaban armónicamente para darles una forma y volumen relativamente estables. Esa cualidad periódica era lo generalizable y aprovechable para estudiar diferentes fenómenos, y esto la presenta como una propiedad común que se puede abstraer, pero con usos situados y significativos (Arnol'd,1990; Cross, 1994).

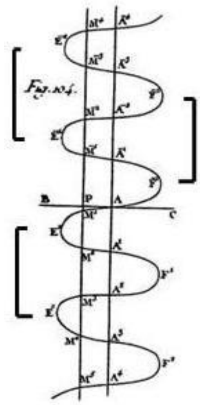


Figura 5. El uso de la periodicidad en Euler (Euler, 1948)

Lo que resulta relevante de estos datos históricos son los significados que enriquecen el comportamiento periódico. En cambio, ese comportamiento en el aula actual está remitido a una fórmula evitando que incluso la palabra *comportamient*o tenga algún estatus en esa matemática escolar cuando sí pareciera tenerlo al incluir otros escenarios de significación.

Considerar entonces el uso del conocimiento situado en diferentes escenarios -incluyendo los históricos- permite trastocar el saber matemático escolar a través de diseños didácticos orientados al desarrollo del pensamiento matemático (véase nodo "situación - problema" en la figura 4). Esas bases de significación obtenidas a partir de análisis socioepistemológicos son la base para cualquier intervención escolar: un nuevo currículo escolar, actividades didácticas, libros de texto.

Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini (2014) comentan que se ofrecen entonces nuevas formas de interacción en el aula, donde profesores y estudiantes asumen roles distintos y nuevas responsabilidades; se logra que el estudiante se apropie de lo que hace y que reconozca que no se trata de ser bueno o malo en matemáticas, sino de participar, de hacer matemáticas. El objetivo es favorecer una construcción de conocimiento matemático que se resignifique continuamente a la luz del ejercicio intencional de prácticas y usos.

Proponemos considerar epistemologías de naturaleza social planteadas bajo la perspectiva socioepistemológica en las que la matemática adquiere sentido y significación a partir no sólo de la matemática misma sino de las prácticas en la que se involucra el ser humano al hacer matemáticas (Buendía y Cordero, 2005). Obviamente entre más elementos de significación conformen dichas epistemologías de usos (véase nodo de *Epistemología de prácticas* en la figura 4), éstas se robustecen al articularse prácticas y usos. Así, la investigación que se reporta en este escrito abona en cómo se usa lo periódico en un escenario extraescolar, en particular uno de divulgación.

4. De la propiedad periódica a lo periódico

Al privilegiar los marcos de referencia analíticos para la matemática se dejan de lado otros argumentos que se ponen en juego al hacer matemáticas. Partimos del estudio de Buendía (2010) quien propone una epistemología para la periodicidad cuyos componentes son de naturaleza social; la idea de lo social se refiere a reconocer aquellos usos y prácticas provenientes de diferentes contextos y escenarios, que generan conocimiento matemático. En particular propone que el reconocimiento significativo de la propiedad periódica se favorece a través de la práctica de predicción, ya que al predecir se promueve una distinción significativa entre algo que se repite y cómo se repite.

Entre los elementos que conforman dicha epistemología, la autora señala que el proceso de significación continua -resignificación- para la propiedad inicia con la búsqueda e identificación de una unidad de análisis, periodo para el caso concreto de las funciones: es aquello que se repite en el objeto periódico. Pero importa que se reconozca cómo se repite y, de acuerdo con la propuesta de la autora, al predecir se pone en juego esta unidad de análisis a través de herramientas y argumentos relativos a la repetición presente en el objeto y sobre todo, a la forma en que se repite.

La distinción entre un objeto periódico y otro que no lo es se basa en el uso de la unidad de análisis para predecir. Esto es, el conjunto de herramientas matemáticas (como divisiones o multiplicaciones, expresiones analíticas, tabulación) tomará diferentes formas y funcionará diferente de acuerdo con la estrategia de predicción que alguien utilice para argumentar. El uso de la unidad de análisis se refiere entonces a sus diferentes formas y funcionamientos siempre situados.

Por ejemplo, Buendía y Cordero (2005) plantean una tarea que pide a diferentes estudiantes de posgrado predecir en una gráfica tiempo-distancia (figura 6) dónde estará el móvil en el tiempo $t=231$, y puede verse cómo se usa una unidad de análisis. En la figura 7, se observa como herramienta el uso de tablas distancia-tiempo en el que se marca el periodo, y luego con ese periodo de 4 se realiza la predicción por medio de una división. En la figura 8 puede verse que el argumento es gráfico, pues toma en cuenta cuánto sube el gráfico en cada periodo.

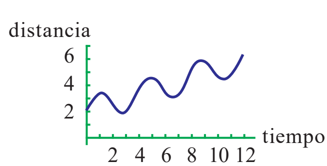
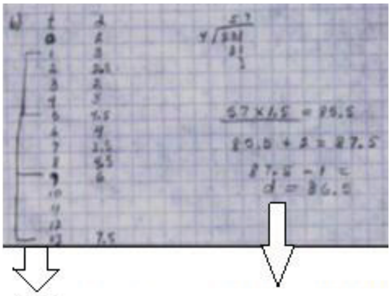


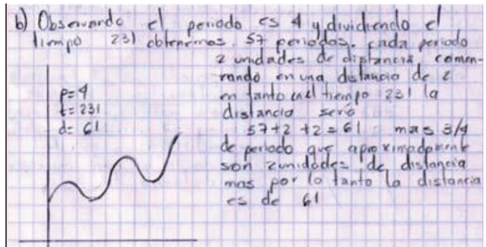
Figura 6. Gráfica tiempo-distancia (Buendía y Cordero, 2005)



Lo que se repite en la tabla

Manejo aritmético para determinar cómo se repite: división, multiplicación y sumas

Figura 7. Con tablas
(Buendía y Cordero, 2005)



Observando el periodo es 4 y dividiendo el tiempo 231 tenemos 57 periodos. Cada periodo, 2 unidades de distancia comenzando en una distancia de 2 en tanto en el tiempo 231 la distancia será 57+2+2=61 más 3/4 de periodo que aproximadamente son 2 unidades de distancia más. Por lo tanto la distancia es de 61

Figura 8. Uso de la gráfica
(Buendía y Cordero, 2005)

Al predecir, la forma y el funcionamiento de las herramientas matemáticas caracterizan el tipo de repetición que presenta la gráfica; dicha repetición se significa al distinguir que no toda repetición es periódica. Ahondando en cómo se visualiza un comportamiento periódico, Dreyfus y Eisenberg (1983) señalan la necesidad de una visualización global -no en un instante, sino en un periodo- en una gráfica periódica para que el carácter periódico de la misma sea reconocible.

Existen entonces elementos que conforman una epistemología de prácticas y usos para la periodicidad:

– El comportamiento del objeto en cuestión; esto es la repetición presente y cómo es esa repetición. En términos variacionales sería considerar el tipo de cambio presente y cómo cambia ese cambio.
– La identificación y el uso de una unidad de análisis, entendida también como *periodo* para el caso de las gráficas.
– La dialéctica entre el instante - todo a través de una visualización que transita continuamente entre lo global y lo local.
– La articulación significativa y situada de los elementos anteriores se da en el marco del ejercicio intencional de prácticas de predicción y graficación.

En su conjunto, amplían el marco de significación para la periodicidad pudiendo hablar entonces de *lo periódico* para referirnos y enfatizar que los aspectos analíticos de la propiedad periódica se enriquecen con otros elementos provenientes de las prácticas y los usos relacionados.

5. Un escenario de significación proveniente del cotidiano

En la conformación del discurso matemático escolar y de los planes de estudio de distintos niveles se desconoce el papel que pudiera jugar el cotidiano, ese contexto extraescolar en el que los ciudadanos hacen, usan y expresan su conocimiento. Se trata de formas culturales puestas en uso en donde se hace evidente lo poco significativo que resulta la matemática escolar (Zaldívar y Cordero, 2015).

Una epistemología de prácticas y usos busca permitir encuentros entre el conocimiento cotidiano del ciudadano y su conocimiento matemático en los que ambos dialogan a través de argumentos y herramientas significativos de acuerdo con las actividades que se están realizando.

Como parte de ese cotidiano, estamos considerando un escenario de educación no formal o de divulgación: un museo de ciencias. En dicho escenario no tiene sentido la idea de que los ciudadanos entiendan las nociones matemáticas como en la escuela o si saben demostrarlas o aplicarlas, pues no existe sanción ni evaluación sobre la integración rigurosa de los conocimientos o sobre la construcción de los mismos (Guisasola y Morentín, 2007). Sin embargo, lo que interesa es reconocerlo como una fuente de significados al analizar el conocimiento en uso. Bajo este posicionamiento epistemológico, los aspectos analíticos dejan de ser el objetivo en la explicación de la generación de conocimiento matemático, y en cambio los argumentos, herramientas y discursos adquieren validez. Es un mecanismo de producción de conocimiento que no aísla al individuo del medio, sino que es una forma de generar lazos de interacción (Cantoral, 2013a).

Consideramos pues este escenario de divulgación como un espacio de uso (Cantoral, 2013a) ya que nos provee de una gran variedad de fenómenos periódicos, como los astronómicos, que nos permitirá reconocer elementos alrededor del uso de lo periódico. Tratamos en particular con Júpiter, uno de los objetos que más seduce al público por su brillo. Cuando se observa a simple vista se ve como un gran punto brillante; con telescopio se pueden ver cuatro de sus satélites: Io, Europa, Ganímedes y Calisto (figura 9).

Figura 9. Imagen de Júpiter y sus satélites (Hernández, 2015)

5.1. *Aspectos metodológicos*

La actividad sobre la que se desarrolló la investigación (Hernández, 2015) es la observación astronómica de Júpiter y sus satélites. Participaron personas que trabajan en el Centro Interactivo de Ciencia y Tecnología de Zacatecas (Zigzag) y el objetivo fue analizar los usos de lo periódico al trabajar con un conjunto de astrofotografías[1] obtenidas de dicha actividad durante cuatro meses.

Para llevar a cabo el análisis del conocimiento en uso, se retomó el triángulo didáctico de la figura 3 cuyos elementos quedaron caracterizados de la siguiente manera.

- El uso de lo periódico se analiza mediante las diferentes formas y funcionamientos que van presentando los elementos expuestos: la identificación y el uso de una unidad de análisis o periodo, la visualización puntual / global, el comportamiento de los diferentes objetos matemáticos que concurren a la actividad (como las gráficas), la predicción.
- Los individuos con los que se realizó la actividad se identificaron como expertos y monitores. Los primeros son personas con experiencia en astronomía observacional elemental y trabajan en el museo como responsables de la sala de astronomía; los segundos son guías ocasionales del museo.
- La actividad llevada a cabo en este escenario del cotidiano se caracterizó a través de distintas situaciones llamadas *situaciones conflictivas*: una pregunta realizada por el investigador cuya respuesta no es inmediata y motiva un conjunto de acciones por parte de los expertos y/o monitores involucrados. Una situación conflictiva consta entonces de los actores involucrados, la tarea concreta a realizar, los conocimientos matemáticos puestos en juego y los usos situados de lo periódico.

La actividad completa fue videograbada, incluyendo la interacción entre los actores y el investigador. Para este escrito, se eligieron dos situaciones conflictivas tituladas: *¿Quién es quién?* y *Noches nubladas*. La razón de esta elección es que el actor principal, Pedro, es físico de formación y divulgador de la astronomía. Es uno de los llamados expertos; en el uso que hace de lo periódico se evidencia el carácter de diferentes herramientas y argumentos, lo que favorece el cambio desde un conocimiento institucionalizado a uno funcional.

[1] Captura fotográfica de la imagen de un cuerpo celeste. Se necesita que la imagen permanezca en la pantalla el tiempo suficiente para capturarla, lo que se logra redireccionando continuamente el telescopio hacia Júpiter y sus satélites hasta que la astrofotografía es captada.

6. ¿Quién es quién?

Ante las astrofotografías captadas de Júpiter y sus satélites, el investigador le pregunta a Pedro cuál satélite es cada uno de los cuatro puntos brillantes (véase figura 9). Alejándose de los otros expertos, extrae de la base astrofotográfica las imágenes correspondientes a 18 noches consecutivas y las coloca así: la primera imagen en un primer renglón, la segunda imagen en el segundo renglón y así sucesivamente hasta distribuir las 18 imágenes en una columna, cuidando que los círculos más grandes que representan a Júpiter queden alineados (figura 10). Coloca una etiqueta en cada renglón para indicar el número de día en que fue captada la astrofotografía.

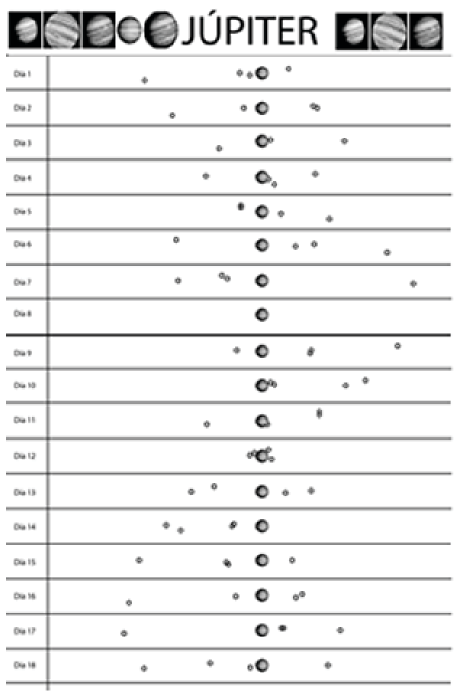


Figura 10. Arreglo de astrofotografías (Hernández, 2015)

6.1. *Identificar una unidad de análisis*

Pedro seleccionó y acomodó 18 astrofotografías; ese número quizás esté relacionado con su conocimiento de astronomía sobre los periodos de los satélites que históricamente propuso Galileo. Ello abre una duda para el investigador:

Investigador: Ahora platíqueme cómo se le ocurrió esta secuencia. ¿De dónde sacó que había que colocarlos uno tras otro?

Pedro: Pues intentaba hacer una especie de (…)[2] de proyección en el tiempo para ver cómo cambiaba la configuración de las lunas de un día para otro (…) entonces (…) primero pensé en hacer un video, sacar las fotos y pasarlas como video (el experto mueve su mano izquierda simulando el paso continuo de las fotografías), pero no tenía las herramientas en la computadora para hacerlo (…) entonces otra forma de visualizarlo era poner una detrás de la otra y al estar haciendo (…) separando los dibujos se me ocurrió que podría haber uno debajo del otro (simula con la mano que coloca una fotografía debajo de la otra). Así de esta forma se puede ver y pasar la vista rápidamente (coloca su dedo sobre el papel con los dibujos y rápidamente lo arrastra sobre cada una de las fotografías simulando un vistazo rápido sobre el papel). Lo primero que se me ocurrió pues fue un golpe de vista.

Podemos reconocer en la respuesta de Pedro que el arreglo apropiado de las astrofotografías genera un sistema de referencia imprescindible para analizar la repetición y cómo se presenta dicha repetición. Pedro llama *golpe de vista* a esta primera visualización en la que identifica un cierto comportamiento para uno de los satélites. Auxiliándose de un proyector, presenta el arreglo de astrofotografías sobre una pantalla de papel cuadriculado hasta obtener el mismo arreglo a una escala más grande. Su objetivo es identificar los cuatro satélites de Júpiter.

Pedro: …ser yo el que se moviera y que no fueran los dibujos. Así podía ver éste, éste, éste (señala los puntos más alejados empezando en la fotografía del día 1). Y cuando lo hice ya me di cuenta de algunas cosas muy interesantes como esta curva (figura 11).

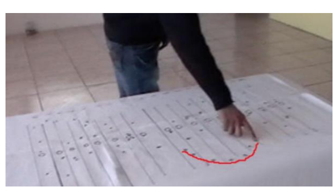


Figura 11. El experto señala un comportamiento local (Hernández, 2015)

El experto une con su dedo cada punto formando una curva suave. Esta forma de usar lo periódico le funciona al indicarle que estos puntos representan un mismo satélite. Éste es un momento importante pues muestra que el uso del comportamiento antecede al concepto: una vez establecido un adecuado sistema de referencia, Pedro percibe el comportamiento del satélite más alejado del planeta.

[2] El paréntesis con tres puntos significa una pausa de más de cinco segundos.

Pedro: La curva de allí ya me dio la idea de que ésta podría tratarse de la misma luna.

Investigador: ¿Y por qué tendría que tratarse de la misma luna?

Pedro: No, no, no, no tendría todavía, no tendría ninguna prueba, pero se me ocurrió que podría ser la misma porque era un avance muy suave, parece ser la misma; entonces viendo esto y siguiendo una curva más o menos del mismo estilo, aquí se encuentra otra.

Con su dedo sigue el posible comportamiento del satélite más alejado (figura 12). La forma de usar lo periódico se manifiesta a través de la detección de un patrón de repetición: una unidad de análisis visual. Él menciona que "podría ser la misma", "parece ser la misma", "del mismo estilo"; este encadenamiento de argumentos culminará en la detección de una unidad de análisis cuando el experto menciona más adelante "aquí se encuentra otra (luna)".

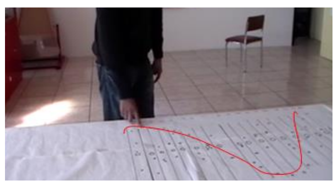


Figura 12. Continuación de la curva del comportamiento (Hernández, 2015)

6.2. *Medición y aproximación*

El siguiente segmento muestra argumentos a través de actividades como la medición y la aproximación; son usos de la unidad de análisis que van significando la periodicidad.

Pedro: Entonces ya lo que se me ocurre para empezar a clasificar es ver su distancia, el máximo alejamiento que yo pueda tener a partir de Júpiter. Entonces veo aquí un alejamiento que es de los máximos (señala el día 1, figura 13 izquierda).

Partiendo del comportamiento global del satélite, ahora Pedro realiza un análisis local: la curva presenta un máximo alejamiento. Esta forma de uso de lo periódico para clasificar los satélites es más fina, pues se ponen en juego las nociones de medición, aproximación y estimación para proponer en qué punto podría la curva global tener otros máximos. Hay que realizar una aproximación de esa posición máxima -no necesariamente visible en las fotografías- del satélite respecto al planeta.

Ahora inicia el cuestionamiento sobre la elección de una unidad de análisis de 18 días que le sirve para hallar el siguiente máximo (en el día 18, figura 13 derecha):

Primer máximo: día 1

Segundo máximo: día 18

Figura 13. Usando un argumento de distancia máxima (Hernández, 2015)

Investigador: ¿Y por qué en el día 18?
Pedro: Hasta ese día tomamos su frecuencia.
Investigador: ¿Pero por qué justamente el día 18?
Pedro: Bueno, nos detuvimos hasta allí porque fueron los días que observó Galileo.
Investigador: ¡Ah! Entonces usted está haciendo referencia al texto de Galileo.
Pedro: ¡Sí!
Investigador: Pero si nos tratamos de desprender del texto, ¿podríamos dar alguna razón de este día 18 sin recurrir a Galileo con base en ese comportamiento que acaba de sugerir?
Pedro: (Se mueve pensativo de un lado a otro de la mesa donde yace la secuencia de fotografías). ¡Mmm! Lo puedo dar, pero ya sería con base en el resultado. (Se queda meditando.) Lo podemos hacer haciendo un análisis de menos días y dándonos cuenta de que es insuficiente para sacar algunos periodos.

Cuando Pedro propone el 18 como la longitud de la unidad de análisis, está acudiendo al conocimiento institucionalizado. Su argumento se apoya en que "fueron los días que observó Galileo"; un conocimiento que tiene asumido y que ahora usa. El cuestionamiento del investigador lo motiva a generar argumentos más articulados y problematizar cómo está conformada esa unidad de análisis que visualmente tiene y que así, le resulte aún más funcional: lo hará a partir de los datos (del *resultado*, como él menciona). Selecciona entonces el rango comprendido entre el día uno y el día siete y, posteriormente, lo alargará para que puedan visualizarse los periodos de los cuatro satélites (figura 14).

Figura 14. Búsqueda de una unidad de análisis mínima (Hernández, 2015)

Pedro: Entonces lo alargamos un poco y nos damos cuenta de que el día 17 o 18 es suficiente para sacar los periodos de todas las lunas.
Investigador: ¿Y por qué es suficiente?
Pedro: Porque ya aparecen todos los periodos.
Investigador: ¡No entiendo!
Pedro: ¡Mmmh!
Investigador: ¿Cómo que aparecen todos los periodos?
Pedro: Sí, ya es posible calcularlos todos.
Investigador: ¿Pero por qué ya es posible calcularlos todos?
Pedro: ¡No, no no!, por eso digo hasta ahorita no tengo una razón. Más bien es el trabajo que ya hemos hecho. Sin referirse a Galileo. Si lo hacemos con 10 días y no es suficiente aún, lo hacemos con 14 y no es suficiente todavía.
Investigador: Pero, ¿hay alguna razón de fondo?... Intuitiva, no importa.
Pedro: ¡Mmm! (se aleja del dibujo y vuelve a observar) ¿Intuitiva? Yo creo que si lo hubiéramos hecho, tendríamos que haberlo hecho por más días. 23, 24, para ver… para que fueran más evidentes los patrones.
Investigador: ¿Y qué patrón buscaríamos?
Pedro: Esta curva (señala la sucesión de puntos que forma la curva de la figura 15)

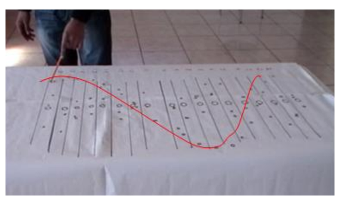


Figura 15. Una unidad de análisis que contenga a los periodos de las cuatro lunas (Hernández, 2015)

En el episodio relatado, la unidad de análisis se usa a través de diferentes argumentaciones que la van resignificando. Si Pedro hubiera considerado menos fotografías, no le sería suficiente para cubrir todos los periodos de los satélites: siete días, por ejemplo, sólo es suficiente para mostrar cómo se están comportando sólo dos de los cuatro satélites. Ante la insistencia del investigador, plantea una unidad de análisis superior a los 18 días, es decir 23 o 24 días, para asegurar que el patrón buscado pueda verse. Esta estrategia de predicción es variacional porque intenta justificar la unidad de análisis al acudir al comportamiento de los datos, apoyado en la visualización a través de la búsqueda de patrones. Está manteniendo una visualización local / global que posteriormente le servirá como una herramienta.

Investigador: ¿Qué le pasaría a esa curva si aumentara el número de días?
Pedro: Se repetiría. Hasta acá. Y tendría que repetirse de este lado (figura 16)

Pedro ahora prolonga la curva más allá de las 18 fotografías (figura 16), y usa la unidad de análisis que él significó mediante el comportamiento local - global de los satélites.

Figura 16. El experto señala cómo se repetiría la curva después del día 18 (Hernández, 2015)

6.3. *Una curva simétrica*

Para seguir desarrollando su argumento de 17 días por periodo, Pedro recurrirá ahora a un argumento visual de simetría basado en el uso de la díada local-global o instante-todo.

Pedro: Porque aquí tengo un periodo de 17 días. Esta luna de aquí coincide con esta luna de acá. (Señala la luna del día uno con la luna del día 18, figura 17)

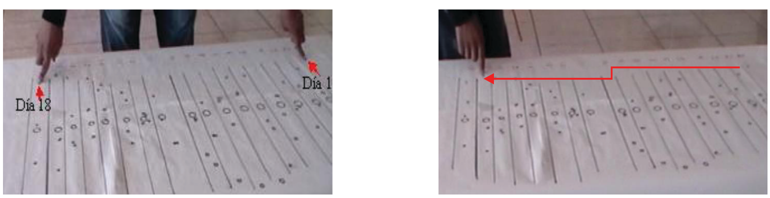


Figura 17. Dos lunas que coinciden (Hernández, 2015)

Pedro: Es pura intuición, hasta ahora no he demostrado nada. Pero esta luna de aquí coincide con esta luna de acá 17 días después.

Investigador: ¿Cómo que coinciden? No me queda claro.

Pedro: En su posición respecto a Júpiter.

Investigador: Eh! ¿Hay alguna distancia que esté manejando allí?

Pedro: También, esta proyección nos ayuda mucho. Como están a la misma escala yo hago una línea vertical… y aquí estoy otra vez (Con sus dedos traza paralelas desde el día uno hasta el día 18, figura 18)

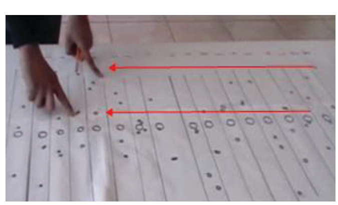


Figura 18. La simetría con respecto a la línea de Júpiter (Hernández, 2015)

Investigador: ¿Entonces está manejando la distancia?
Pedro: Sí, sin medirla directamente yo sé que es la misma porque están alineadas prácticamente.
Investigador: ¡Ajá! Y en eso se basa para decir que se repite.
Pedro: Sí.

Surge un argumento que refuerza la propuesta de la unidad de análisis: al estar alineadas las imágenes, en el sistema de referencia, el satélite es el mismo un cierto tiempo después. Este argumento se desarrolla y se puede generalizar: si al situar el satélite en dos fotografías tomadas en días diferentes queda a la misma distancia del planeta, se trata del mismo satélite pues está repitiendo su posición respecto al tiempo. Es un argumento de simetría puesto en uso que recuerda además el uso geométrico de Euler para lo periódico y que además se desarrolla para sostener nuevas argumentaciones.

6.4. *Conformar una unidad de análisis*

Cuando está discutiendo la longitud mínima de su unidad de análisis, Pedro va señalando curvas. Sin embargo, al cuestionar porqué la unidad mínima de análisis es de 17 días, vuelve a pasar de una mirada global a una local para argumentar sobre cómo se conforma dicha unidad.

Pedro: Entonces yo esperaría que cada 17 días apareciera una curva (…) bueno dos curvas de este lado de Júpiter y dos en este lado de acá. Tres crestas (figura 19)

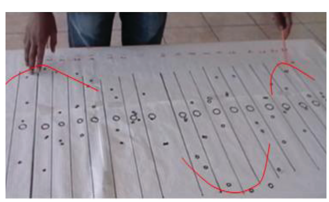


Figura 19. Tres crestas (Hernández, 2015)

Investigador: ¿Tres crestas?
Pedro: Entonces, cada 17 días son tres crestas. En 40 días pueden ser 6. Eso esperaríamos.
Investigador: ¡Bien!
Pedro: Después de 17 días, si están, nos darían una pista más fuerte de que sí es la misma luna.

Es importante notar en este diálogo que el objetivo de Pedro no ha cambiado: qué punto representa a cada satélite. Es a lo largo del desarrollo de tal actividad intencional que la unidad de análisis se está resignificando continuamente a través de su uso: de una unidad cuya longitud es institucionalizada (lo dice Galileo), a una construida a partir de la percepción visual, al uso de medición (máximos), a la argumentación sobre la simetría de la curva y, finalmente, hacia el señalamiento de los elementos constituyentes de la misma. La noción de un periodo mínimo, propio de la caracterización periódica escolar, se cambia una y otra vez en beneficio de un periodo que realmente sea una unidad significativa a la luz de la tarea a desarrollar.

Podemos ver cómo se van resignificando diferentes elementos del conocimiento institucionalizado de Pedro a la luz de prácticas -como la predicción, la graficación, la comparación, la estimación- de los usos situados de los elementos que constituyen lo periódico.

7. Noches nubladas

Durante el periodo de observación, hubo noches nubladas en las que no fue posible recoger datos, así que cuando las astrofotografías se alinean respecto a Júpiter, hay un trozo de papel que queda en blanco (figura 20).

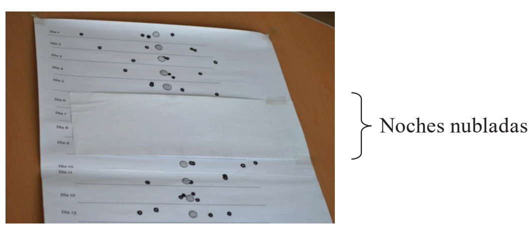


Figura 20. El trozo de papel intermedio representa las noches nubladas (Hernández, 2015)

Hasta este momento, Pedro ya había visualizado el comportamiento periódico de cada uno de los satélites. Al entrevistarlo, menciona: “Cuando vi esta curva poniendo a los días consecutivamente, se me hizo muy parecido a la curva que aparece en el péndulo de arena, entonces debería poderse reproducir, es una ley similar”.

Pedro continúa su reflexión diciendo “esto nos permitiría que si yo quito una parte de esa curva, digamos toda una sección de días nublados, entonces el trazo de arena me indicaría por dónde va a pasar esta luna y yo podría encontrarla en cualquier momento del tiempo…”. Liga entonces el comportamiento periódico de los satélites con el comportamiento periódico del péndulo de arena.

El péndulo del museo deja su traza sobre arena, así que Pedro coloca la secuencia de fotografías, con el trozo de papel en blanco intercalado, sobre la banda móvil del mecanismo donde está el péndulo. Alimenta el péndulo con arena, hace variar su longitud y la velocidad de la banda hasta que el rastro se parezca al comportamiento de los satélites en la información que sí se tiene. Ubica entonces el péndulo en el alejamiento máximo y lo deja oscilar libremente (figura 21).

Figura 21. Péndulo con arena (Hernández, 2015)

De esta manera el péndulo deja un rastro de arena encima de la trayectoria de la luna más alejada, incluidos los días nublados (figura 22).

Noches nubladas

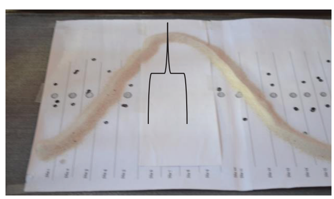


Figura 22. Rastro de arena, incluidas las noches nubladas (Hernández, 2015)

Ahora remueve un poco la arena, abriendo una franja en medio, para dejar ver el comportamiento de la luna correspondiente a las noches despejadas. La conclusión es que en las noches nubladas la luna más alejada debe estar en la franja (marcas rojas en la figura 23).

Noches nubladas

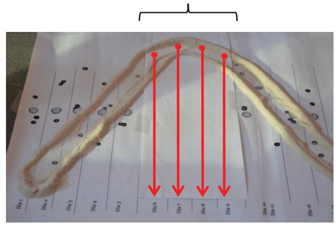


Figura 23. Predicción de la posición de los satélites durante las noches nubladas (Hernández, 2015).

Para que Pedro pudiera conocer la porción de la gráfica que desconoce, parte de reconocer la trayectoria periódica de los satélites, abstrae ese comportamiento periódico y transita hacia otro artefacto -físico y manipulable- como el péndulo. Éste es un uso de lo periódico en el que se identifican y abstraen las características de ambos fenómenos y se logra transitar entre el fenómeno real y el dispositivo artesanal, lo que logra caracterizar en uno se vuelve válido para el otro. Esto nos remite a lo que mencionábamos de Hooke: un llamado hombre - laboratorio que abstrae significados al experimentar en diferentes contextos, va construyendo conocimiento científico.

8. Un escenario de divulgación como fuente de significación

En el estudio reportado se trata científicamente con fenómenos periódicos y, sin embargo, no basta, e incluso no es necesario, conocer o recordar fórmulas, sino reconocer y analizar elementos que conforman el uso de lo periódico: ante el comportamiento del objeto (el fenómeno, la gráfica) cómo se pone en juego una unidad de análisis o cómo se visualiza manteniendo una diada global / local para poder predecir. Así, la gráfica se usa de diferentes maneras: trozos de curva, puntos clave como los máximos e incluso, la construcción de un primer sistema de referencia.

Ante un fenómeno de naturaleza periódica, Pedro enfrentó el cuestionamiento de qué satélite era cada uno de los puntos brillantes alrededor de Júpiter. Su conocimiento institucionalizado establece que el satélite con el periodo más grande considera 18 días y, por lo tanto, es suficiente para obtener los periodos de todas las lunas y entonces poder decir cuál es cuál. En las diferentes acciones que va realizando, su conocimiento matemático se va problematizando a través de cuestionamientos implícitos como el porqué es así y no de otra manera. Estos cuestionamientos son de corte variacional, qué cambia, cómo y cuánto cambia, para discutir significativamente qué cambia.

Una de las primeras acciones que hizo Pedro fue generar su sistema de referencia para que sus comentarios respecto a qué cambia tuvieran significado: arregló las astrofotografías respecto a Júpiter como centro. A partir de lo que él llama percepción visual, le resulta factible identificar un patrón de comportamiento (una práctica variacional), y en ello identifica una unidad de análisis o patrón para entonces desarrollar estrategias de medición y hallar máximos; la simetría de la curva se usa para señalar cómo las crestas constituyen dicha unidad. Las crestas son parte de un lenguaje gráfico que se desarrolla de forma situada y le funciona para constituir su unidad de análisis: no sólo es conocer qué es una gráfica, es usar sus elementos de forma situada. Es el conocimiento en uso, y no el institucionalizado, el que llevará a identificar finalmente (Hernández, 2015) cuál satélite es cada uno de los puntos brillantes, aunque al terminar el episodio *¿Quién es quién?* sólo tiene una primera base de significación.

En el episodio de *Las noches nubladas*, el experto actúa como un hombre laboratorio: extrae las características periódicas observables de un fenómeno y transita hacia un instrumento físico y manipulable para obtener los datos faltantes. Esto permite que el conocimiento institucionalizado sobre el comportamiento de los satélites se signifique extrayendo características y significados comunes a otros movimientos. Nuevamente podemos evidenciar un contraste con el conocimiento matemático escolar en el que un conjunto de funciones se enseña para después modelar fenómenos, lo que hace perdurar el mecanismo de *primero enseño el objeto y luego lo aplico*. Favorecer el ejercicio intencional de prácticas variacionales permite reconocer cómo se usa la propiedad periódica a través de las diferentes formas que va adoptando, funcionando en cada caso según lo que se requiere y argumentando sobre características significativas comunes. Ese uso significa al objeto (la función, el fenómeno) con el que se está trabajando.

Se han evidenciado elementos de un pensamiento y lenguaje variacional a la luz de lo cual, diferentes objetos matemáticos se resignifican continuamente: el periodo y su uso, el sistema de referencia, los elementos gráficos.

Sí importa el objeto: no se niega la importancia de conocer y manejar la definición de periodicidad. Sin embargo, este manejo analítico puede tener ahora una base de significación mayor en la que los elementos simbólicos como símbolo (x), el símbolo $f(x)$ e incluso la igualdad $f(x)=f(x+p)$ pueden tener significados y además estar articulados a través de diferentes variables y fenómenos. De ahí, por ejemplo, la importancia de reconocer los máximos en el comportamiento gráfico periódico analizado. Todo ello aparece normado por el ejercicio intencional de *prácticas variacionales* (Fallas-Soto, 2015) como la predicción, la comparación, la estimación y el papel de los patrones de comportamiento.

9. Comentarios finales

Al cuestionar aquella matemática que se está enseñando y considerando la necesidad de un saber matemático que se integre funcionalmente a la vida del estudiante, importa incidir en el rediseño del discurso Matemático Escolar. En ello, este escrito contribuye a fin de que lo escolar tenga como base de significación epistemologías de prácticas y usos.

El escenario del cotidiano en el que se ha trabajado, considerado como un escenario de uso, da cuenta de un pensamiento y lenguaje variacional que se pone en juego y se desarrolla al significar en ese proceso el conocimiento matemático en juego. Al cambiar la mirada del objeto matemático con el propósito de favorecer el conocimiento en uso, aunque dicho objeto –una definición, una propiedad- no se conozca en toda su extensión y complejidad, sí se usa de alguna manera (Cordero, Cen y Suárez, 2010). Y cuando se usa, irá adquiriendo y desarrollando diferentes formas y funcionamientos acorde a las situaciones particulares que el ser humano vaya enfrentando.

En especial, al reflexionar sobre la matemática escolar, en lugar de buscar el aprendizaje memorístico de la propiedad periódica de un objeto matemático -una sucesión, una función, un fenómeno- a través del cumplimiento o no de una igualdad, habrá de favorecerse el desarrollo intencional de prácticas como la graficación y la predicción en tareas situadas y propias del nivel educativo en cuestión. Ello permite que el conocimiento matemático se ponga en uso a través de herramientas y argumentos que resignifiquen continuamente lo periódico a lo largo de la matemática escolar.

No se propone obviar la definición del objeto matemático periódico con el que se trabaja: una gráfica, una sucesión, algún fenómeno. La propuesta es poner al centro de las explicaciones didácticas elementos como los ya mencionados que problematicen no sólo la repetición presente sino cómo se está presentando. Entonces, podemos hablar de un conocimiento matemático funcional y articulado, tanto dentro como fuera de la escuela, en el que la propia definición analítica de la periodicidad adquiere significados. Es así como estamos asumiendo una epistemología distinta para las matemáticas.

Referencias bibliográficas

Arnol'd. V.I.(1990). *Huygens and Barrow. Newton and Hooke: Pioneers in Mathematical Analysis and Catastrophe Theory from Evolvents to Quasicrystals.* Germany: Birkhsuser Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-9129-5

Buendía, G. (2010). Articulando el saber matemático a través de prácticas sociales. El caso de lo periódico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4), 129-158. Disponible en: http://relime.org/index.php/numeros/todos-numeros/volumen-13/numero-especial-13-4-i/519-201001d

Buendía, G. (2011) The use of periodicity through history: elements for a social epistemology of mathematical knowledge. En Barbin,E., Kronfellner,M., Tzanakis. C., *Proceedings of the 6th European Summer University-History and Epistemology in Mathematics Education* (pp. 67-78). Austria: Verlag Holzhausen GmbH / Holzhausen Publishing Ltd. Disponible en: http://numerisation.univ-irem.fr/ACF/ACF11010/ACF11010.pdf

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodic aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics, 58*(3), 299-333. https://doi.org/10.1007/s10649-005-2295-5

Cantoral, R. (2013a). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. México: Gedisa.

Cantoral, R (2013b). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. México: Secretaría de Educación Pública.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2014). Hacia una educación que promueva el desarrollo del pensamiento matemático. *Escri/viendo. Revista Pedagógica 24*, 17-26.

Collette, J. P. (1986). *Historia de las matemáticas*. Volumen II. México: Siglo Veintiuno Editores.

Cordero, F. (2006). El Uso de las Gráficas en el Discurso del Cálculo Escolar una visión Socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamerican*o (pp. 265-286). México: Díaz de Santos - Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el Bachillerato. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *13*(2), 187-214. Disponible en: http://relime.org/index.php/numeros/todos-numeros/volumen-13/numero-13-2/527-201003b

Cross,J. (1994). *Theories of elasticit.* En I. Grattan - Guiness (ed), *Companion Encyplopedia of the History & Philosophy of the Mathematical Sciences*, 1023-1033. USA: The Johns Hopkins University Press.

Dreyfus, T. and Eisenberg, T. (1983). The function concept in college students: linearity, smoothness and periodicity. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 5*(3), 119–132.

Euler, L. (1948). *Introduction a l'Analyse Infinitésimale.* Tomo I. (JB Labey, trans). Chez Bachelier, Imprimeur - Libraire de l'Ecole Polytechnique.

Fallas-Soto, R. (2015). *Existencia y Unicidad: estudio socioepistemológico de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden* (Tesis de maestría no publicada). México: Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.

Guisasola, J. y Morentin, M. (2007). ¿Qué papel tienen las visitas escolares a los museos de ciencias en el aprendizaje de las ciencias? Una revisión de las investigaciones. *Enseñanza de las Ciencias 25*(3), 405-411. https://ddd.uab.cat/record/39801

Hernández, P. (2015). *Los usos del conocimiento matemático en un escenario de divulgación: la periodicidad* (Tesis de doctorado no publicada). Guerrero, México: Centro de Investigación en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustración. En A. Rosas y A. Romo (eds.). *Metodología en matemática educativa: visiones y reflexiones* (pp. 61-88). México: Lectorum.

Zaldívar, D. y Cordero, F. (2015). Conozco al Sr. Movimiento: la situación del resorte. En Cordero, F., *La ciencia desde el niñ@. Porque el conocimiento también se siente* (pp. 129-140). España: Gedisa.

Autores

Plácido Hernández Sánchez. Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas, México.
placidohernan@gmail.com

Gabriela Buendía Ábalos. Red de Centros de Investigación en Matemátiva Educativa AC, México.
buendiag@hotmail.com