¿Existen situaciones cotidianas cuyo modelo matemático corresponde a una función de proporcionalidad?

Julián Esteban Triviño Mejía
7706540@gmail.com
Estudiante Maestría en Docencia de la Matemática

Edgar Alberto Guacaneme Suárez
guacaneme@pedagogica.edu.co
Profesor Departamento de Matemática Universidad Pedagógica Nacional

Resumen. *La enseñanza y aprendizaje de temas matemáticos como la proporcionalidad directa usualmente se realiza modelando situaciones "reales" y "cotidianas". Los profesores de matemáticas asumimos que tales situaciones se comportan en efecto de forma proporcional, pero en la realidad su comportamiento es diferente. Ello nos lleva a la tarea de identificar en la cotidianidad de los estudiantes, situaciones que se dejen modelar a través de funciones lineales, tarea difícilmente realizable, pero altamente formativa.*

Palabras Claves: *Modelización, Función Lineal, Razón y proporcionalidad, Aprendizaje situado sociocultural*

1 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Desde hace algunos años algunos investigadores colombianos se han interesado en reconocer cómo vive la proporcionalidad en la escuela; al respecto, se desarrolló un estudio acerca de la proporcionalidad en el currículo propuesto (Guacaneme, 2001, 2002), se orientó una mirada al currículo desarrollado (Camelo & Mancera, 2005), se estudió y analizó el currículo logrado en ésta como área temática (Díaz, Álvarez, Torres, & Guacaneme, 1997, pp. 128-139) y se promovió que algunos profesores desarrollaran propuestas de innovación en la enseñanza de temas relacionados con la proporcionalidad (Perry, Guacaneme, Andrade, & Fernández, 2003). No obstante esta trayectoria, solo recientemente (en el marco del desarrollo del Trabajo de Grado "Situaciones cotidianas, escolares e históricas que favorecen el aprendizaje de las funciones de proporcionalidad y lineales" de la Maestría en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional) se ha identificado una problemática que siempre había estado allí, pero que no había capturado nuestra atención o que quizá, sencillamente, no se había advertido: la existencia de la proporcionalidad directa en contextos cotidianos (¿o deberíamos decir: la exigua existencia?). Veamos.

Para enseñar la proporcionalidad directa, a la luz de lo dictaminado en los *Lineamientos* (Colombia, 1998), es usual recurrir a ejemplos "cotidianos" o situaciones "reales" y "significativas" para los estudiantes, en donde se relacionan dos magnitudes a través de una relación de proporcionalidad directa o, en otras palabras, modelar un fenómeno de covariación de las cantidades de dos magnitudes a través de una función lineal. Así, es tradicional que propongamos el estudio de la relación que existe entre el número de objetos y su costo; por ejemplo, es habitual estudiar el comportamiento del costo de los dulces en relación con el número de éstos. También es usual recurrir a situaciones de otras ciencias que comportan fenómenos expresables a través de una función lineal y con frecuencia recurrimos al estudio de la relación entre el tiempo empleado y el espacio recorrido por un móvil en un movimiento uniforme.

Atendiendo a los planteamientos de las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas en relación con la potencialidad del aprendizaje del concepto de función a través del estudio de sus múltiples representaciones, estas situaciones las abordamos a través de las diferentes representaciones de las funciones lineales; en este sentido, incorporamos las tablas de valores y sus respectivas gráficas cartesianas, e incluso procuramos describir algebraicamente (*i.e.*, con una ecuación o una fórmula) las relaciones de proporcionalidad. Bajo esta óptica, por ejemplo, promovemos el proceso de modelación de las funciones en juego a través de sus gráficas (ver Figuras 1 y 2), eventualmente teniendo presente que si bien ambas son representadas por puntos alineados y que las magnitudes empleadas son absolutas (*i.e.*, sus valores son exclusivamente positivos), solo una de ellas tiene una gráfica que incorpora una curva continua.

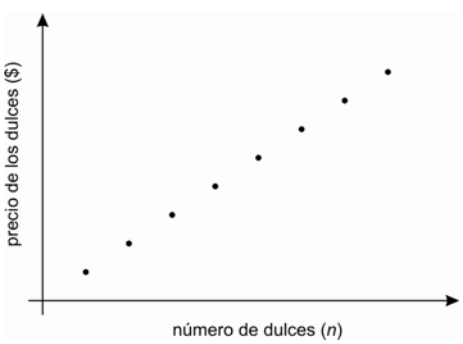

Figura 1. Gráfica de la relación entre el número de dulces y su costo

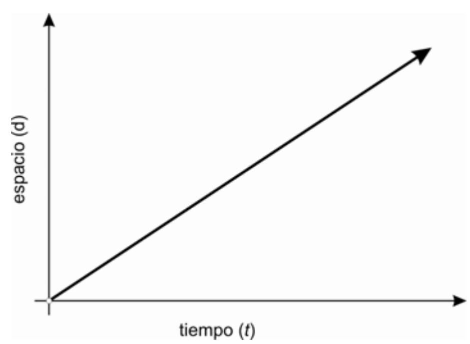

Figura 2. Gráfica de la relación entre el tiempo empleado y el espacio recorrido

Asimismo trabajamos algunos aspectos relacionados con: el significado de un punto de la gráfica, la existencia de una proporción entre cualquier par de razones entre los valores de una cantidad de magnitud y los correspondientes de la otra, la existencia de una proporción entre cualquier par de razones de las diferencias de una cantidad de magnitud y las diferencias de los valores respectivos de la otra, el carácter creciente de estas funciones (advirtiendo, eso sí, que ello no es un carácter consustancial de la proporcionalidad directa), la posibilidad de encontrar un dato desconocido a través de procesos relacionados con la determinación de la cuarta proporcional (*v.g.*, el uso de las gráficas como nomogramas), entre otros.

Ahora bien, independientemente de cuán bien valoremos el trabajo de docencia realizado con estas situaciones e incluso del nivel de comprensión que nuestros estudiantes logren de estas funciones y de las características de las relaciones de proporcionalidad implicadas, persiste una inquietud: ¿son estas situaciones un buen ejemplo de las situaciones que los estudiantes se encuentran en su cotidianidad?

No cabe duda que para un profesor de matemáticas sería interesante e importante identificar en las vivencias de los estudiantes situaciones de covariación que se puedan modelar con una función lineal, pues quizá pueda proponerlas en sus clases para que los estudiantes reconozcan en las matemáticas una manera de comprender mejor *su* mundo y *su* realidad. Así, para aproximarnos a una respuesta a la pregunta anterior, es conveniente asumir como objeto de estudio las situaciones cotidianas de los niños y jóvenes que conforman el grupo de estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Las Toldas, del Municipio de La Argentina Huila, analizadas desde algunas de las perspectivas que nos ofrece la modelación.

2 MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

El propósito de este apartado es interpretar algunos enfoques acerca de la modelación matemática. Interesa entonces conocer lo que al respecto proponen (Bosch, García, Gascón, & Ruíz, 2006) desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), y la conceptualización que hacen María S. Biembengut y Nelson Hein (2004). Desde estas dos miradas se han podido establecer al menos tres enfoques diferentes pero complementarios relacionados con la modelación matemática.

La modelización en Educación Matemática desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico

Inicialmente, la modelización se ha entendido como un proceso a través del cual se puede comprender, explicar, predecir, etc. un fenómeno por medio de la aplicación del conocimiento matemático sabio; en este sentido, surge como resultado de aplicar un conocimiento matemático en una situación real. Este proceso tiene diferentes interpretaciones, una de las cuales se esquematiza en la Figura 3, denominado el ciclo de modelización (Blum y Niss, 1991).

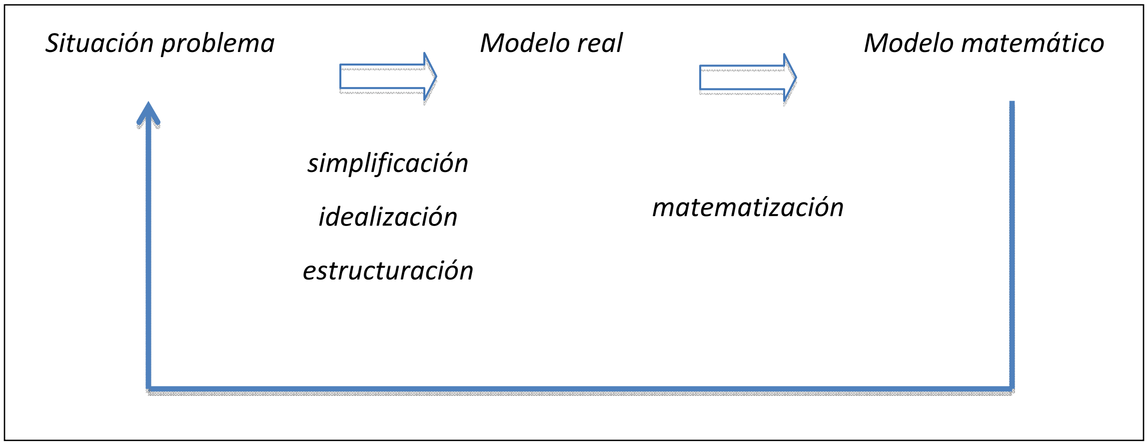

Figura 3. Ciclo de modelización (Blum y Niss, 1991) citado en (Bosch et al., 2006)

Por otra parte, como lo señala Bosch y sus colegas, en la Educación Matemática se estudia la modelización matemática entendiéndola desde dos enfoques; la primera permite estudiar la modelización como herramienta a través de la cual los estudiantes aprenden nociones matemáticas y la segunda plantea que la modelización matemática es en sí misma una noción matemática que debe ser incorporada explícitamente a los procesos de enseñanza aprendizaje. Esto dos enfoques se pueden estudiar por separado aunque en el aula de clase se entrelazan y potencian mutuamente.

La modelización matemática **como herramienta para aprender matemáticas** es el estudio de las nociones matemáticas que están presentes cuando se modela matemáticamente una situación real. Por tanto, existen objetos matemáticos que modelan fenómenos reales. En esta perspectiva se trata es de usar los modelos para estudiar las nociones matemáticas implicadas en los mismos. Uno de los objetivos de la investigación sobre la modelación matemática es identificar fenómenos que son susceptibles de ser modelados matemáticamente por objetos matemáticos como por ejemplo la *función* y que permitan estudiar dichos objetos matemáticos.

La modelización, **como noción matemática explícita en el aula,** es en sí misma una noción que debe ser incorporada a los procesos de enseñanza y aprendizaje, es decir, el estudiante debe aprender a modelar; por tanto, interesan las estrategias y los procesos de pensamiento del estudiante para adquirir competencias sobre el proceso de modelización.

Es así que, bajo estos dos enfoques, la investigación en Educación Matemática se preocupa por estudiar los siguientes aspectos:

Epistemológicos. Inmersos en las características didácticas que poseen las situaciones reales y sus modelos matemáticos asociados, es decir, desde esta perspectiva el enfoque epistemológico configura una aproximación a la modelización como medio para aprender matemáticas.

Cognitivos. Presentes en la comprensión y los procesos cognitivos del estudiante relacionados con la modelización de una situación real. Esta perspectiva intenta realizar una aproximación a la modelización como objeto matemático en sí mismo.

Es en este sentido que la modelización se ha convertido en un medio para estudiar nociones matemáticas y también en objeto matemático de estudio, es decir, se le han incorporado nuevos valores didácticos al proceso de modelización. Es por esto que el modelo de la modelización se transforma y evoluciona integrándose a él nuevas fases y procesos entre fases, como se muestra en la Figura 4 (Blum, 2005) citado en (Bosch et al., 2006).

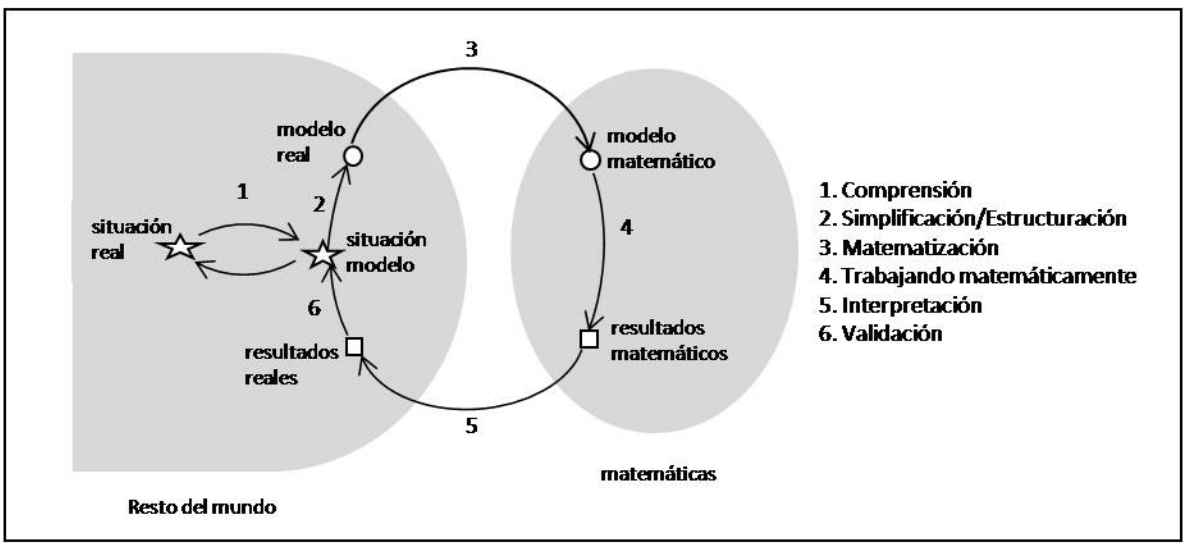

Figura 4. Ciclo de modelización (Blum 2005) citado en (Bosch et al., 2006)

La modelación matemática desde el enfoque de Biembengut y Hein

Desde este enfoque, la modelación es utilizada **como método de enseñanza** ya que permite al estudiante aprender nociones matemáticas y su relación con situaciones de otras ciencias (como la Física, Química, Biología las Ciencias Sociales, entre otras) y además potencia en el estudiante habilidades para leer, interpretar, comprender y explicar situaciones problema.

En este enfoque la modelación es un proceso a través del cual se obtiene un modelo matemático. Un modelo matemático es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas mediante el cual se puede representar un fenómeno o situación problema. El modelo permite entonces dar solución a la situación problema y también puede servir de soporte para nuevos modelos. En el proceso de modelación existe una serie de etapas bien definidas y son: reconocimiento de la situación problema (delimitación del problema), familiarización con el tema que va a ser modelado (referencial teórico), formulación del problema, (hipótesis), formulación de un modelo matemático (desarrollo), resolución del problema a partir del modelo (aplicación), interpretación de la solución y validación del modelo (evaluación). En la figura 5, se presenta un esquema de este enfoque.

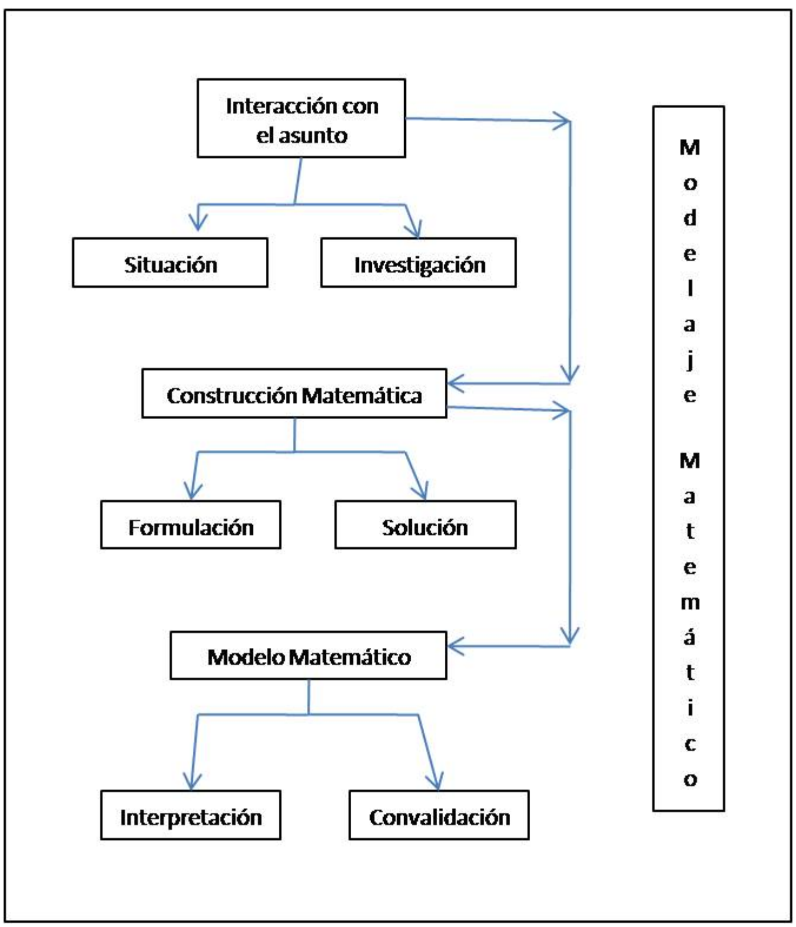

Figura 5. Esquema del proceso de modelación (Biembengut & Hein, 1997)

Es de notar que en este último enfoque importan tanto los temas ya sean matemáticos o extramatemáticos que involucren en su estudio un modelo matemático, como la enseñanza de nociones matemáticas, por tanto comporta cierta similitud con la perspectiva de Bosch y sus colegas (2006) quienes también sostienen que la modelización en principio es comprender un fenómeno a través de un modelo matemático y también interesa el aprendizaje de nociones matemáticas.

Uno de los aspectos que destaca a favor es que los estudiantes, tienen la posibilidad de seleccionar temas de su interés para ser estudiados; esto los involucra y compromete con el proceso de aprendizaje haciendo más interesante y activa la clase. Se logra también que los estudiantes encuentren significado a los conocimientos matemáticos que aprenden ya que éstos tienen que ver con temas de otras áreas del conocimiento.

3 METODOLOGÍA

Para abordar el problema presentado se planteó como estrategia general la observación intencionada sobre las actividades realizadas por los estudiantes en su vida cotidiana para identificar las posibles situaciones que aparentemente puedan modelarse con funciones lineales o de proporcionalidad. Una vez identificadas tales situaciones, se desarrolla un análisis de las mismas para identificar si en efecto éstas se modelan a través de tales funciones.

4 ANÁLISIS DE DATOS

Si bien en la región del municipio citado las actividades laborales que predominan son la agricultura de productos pancoger y otros (*v.g.*, café, granadilla, lulo), la ganadería y los oficios domésticos, a través de una observación intencionada hemos identificado varias situaciones que contienen relaciones que parecerían poderse modelar con una función lineal (*v.g.*, cantidad de hojas de plátano en relación al número de tamales, cantidad de arroz en relación al número de tamales, cantidad de raciones de carne versus número de personas que almuerzan, cantidad de huevos en relación con la cantidad de tamales, cantidad de guayaba en relación con la cantidad de helados, cantidad de leche versus cantidad de helados, cantidad de sal versus cantidad de ganado vacuno, cantidad de Purina en relación con la cantidad de cerdos).

En un primer intento de encontrar una situación adecuada, seleccionamos el contexto de preparación y venta de tamales, como un contexto familiar a los estudiantes. Dentro de este contexto, hemos seleccionado y estudiado la relación que existe entre la cantidad de hojas para envolver los tamales y el número de éstos. A primera vista esta situación es de proporcionalidad directa, pues además de haber una correlación directa entre las dos magnitudes (*i.e.*, cantidad de hojas y número de tamales) existe proporción entre las razones determinadas por los valores correspondientes de estas magnitudes; ello parece ratificarse cuando se enuncia que "por cada 50 tamales son necesarias 15 hojas de plátano".

Lo anterior, usualmente se representa a través de una gráfica como la de la Figura 6, o con una fórmula como $h = \frac{3}{10}t$.

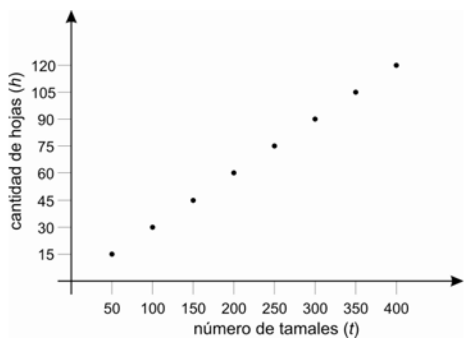

Figura 6. Gráfica de la relación entre el número de tamales y la cantidad de hojas para envolverlos

Bajo estas condiciones parecería que ha sido trivial encontrar la situación de proporcionalidad directa buscada pero, para regocijo de nuestra capacidad de asombro y como reto a nuestra formación profesional, el asunto no es tan simple. Por un lado, en esta modelación de la situación hemos "fijado" algunas variables; por ejemplo, hemos supuesto que todas las hojas de plátano tienen una longitud uniforme y que también lo es su calidad (sabemos bien que en la realidad ello no sucede). Por otra parte, reconocemos que el contexto específico de la situación genera opciones diferentes para el modelo matemático.

Si el contexto específico es la compra de las hojas de plátano, hay que advertir que éstas se consiguen por atados de 15 hojas y no por unidad. Por tanto para una cantidad de tamales entre 1 y 50 se deben comprar 15 hojas, entre 51 y 100 se deben comprar 30 hojas, y así sucesivamente, de tal manera que la gráfica y la fórmula no son las de una relación de proporcionalidad. Una aproximación a la gráfica de esta situación se presenta en la Figura 7; naturalmente para esta función su representación algebraica ya no es $h = \frac{3}{10}t$.

Si el contexto específico es la elaboración de los tamales, quizá sí aparezca una relación de proporcionalidad modelando la relación, pero en este caso habrá que considerar la relación entre el número de tamales (o más precisamente entre el número entero positivo de tamales) y las fracciones de hojas (o más exactamente los múltiplos enteros de los tres décimos de hoja); en esta relación aparece la razón constante "$\frac{3}{10}$ de hoja : 1 tamal". Pero, ¿es precisamente esa relación la que aparece *naturalmente* en la cotidianidad? o, ¿es esa la relación que está presente en la mente de quien elabora los tamales y reparte las hojas para envolver los tamales?

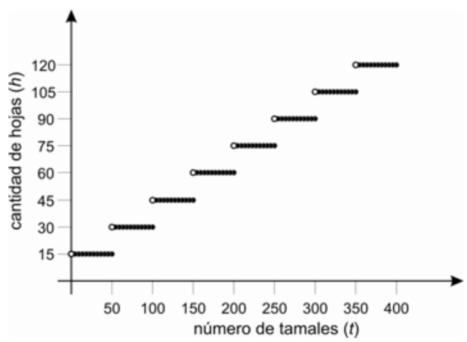

Figura 7. Gráfica de la relación entre el número de tamales y la cantidad de hojas para envolverlos (en el contexto de compra)

5 CONCLUSIONES

Lo anterior ejemplifica que no solo no hemos podido encontrar una situación de proporcionalidad en la cotidianidad de los estudiantes de uno de nuestros cursos, sino que el intento de identificarlas nos ha llevado a advertir aspectos de la modelación de situaciones reales de los que antes no éramos suficientemente conscientes. Además, nos pone de manifiesto, de manera enfática y contundente, que debemos ser mucho más cuidadosos cuando identifiquemos y modelemos matemáticamente situaciones extraídas de la realidad que se vive dentro y fuera del aula. Igualmente, hemos sido conscientes de la necesidad de explicitar que en los procesos de modelación se idealiza la situación real y que *fijar* algunas variables es parte sustancial de tal idealización.

Identificar situaciones reales que efectivamente sean modeladas por funciones lineales o relaciones de proporcionalidad se ha convertido en un reto profesional para los docentes. Éste nos ha llevado a mejorar el nivel de consciencia sobre lo que realmente sabemos e ignoramos como profesores de matemáticas acerca de lo que enseñamos (y pretendemos que nuestros estudiantes aprendan). Igualmente, nos ha conducido a problematizar nuestro quehacer mucho más allá de la habitual pregunta sobre la metodología adecuada o sobre el diseño de situaciones que motiven realmente a nuestros estudiantes. Asimismo, nos ha puesto en evidencia que este reto perfectamente puede ser compartido por muchos profesores de matemáticas tan normales como nosotros, pues probablemente ellos también hayan advertido que en la mixtura compuesta por proporcionalidad-modelación-contextos hay un suculento coctel que invita a la reflexión profesional.

6 BIBLIOGRAFÍA

Biembengut, M., & Hein, N. (1997). Modelo, modelación y modelaje: Métodos de enseñanza - aprendizaje de matemáticas. *Revista Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*(38), 209-222.

Biembengut, M., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación matemática, 16*(002), 105-125.

Bosch, M., García, F., Gascón, J., & Ruíz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación matemática, 18*(002), 37-54.

Camelo, F. J., & Mancera, G. (2005). *El currículo desarrollado en torno a la proporcionalidad: Un estudio cualitativo realizado en secundaria.* Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

Colombia, M. E. N. (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Díaz, C. J., Álvarez, J., Torres, L. A., & Guacaneme, E. A. (1997). *Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas TIMSS Colombia.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Guacaneme, E. A. (2001). *Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas.*, Universidad del Valle, Cali.

Guacaneme, E. A. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en los textos escolares de matemáticas. *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática, 7*(1), 3-42.

Perry, P., Guacaneme, E. A., Andrade, L., & Fernández, F. (Eds.). (2003). *Transformar la proporcionalidad en la escuela: Un hueso duro de roer*. Bogotá: una empresa docente.

Volver al índice
Comunicaciones Breves