http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n2p177

Uma reflexão teórica acerca do papel dos registros de representação semiótica em atividades de demonstrações matemáticas em Geometria Euclidiana

A theoretical reflection on the role of semiotic registers representation activities in mathematical demonstrations in Euclidean geometry

Fernanda Aparecida Ferreira
fernanda.aparecida.f@gmail.com

Cintia Aparecida Bento dos Santos
cintia.santos@cruzeirodosul.edu.br

Resumo

Este artigo tem por objetivo apresentar uma reflexão em relação ao papel que os registros de representação semiótica desempenham em atividades de demonstrações em Geometria Euclidiana. As considerações aqui apresentadas são parte de estudos sobre a revisão de literatura que estão sendo desenvolvidos para elaboração de tese de doutorado. Procuramos evidenciar o que se entende por demonstração em Matemática e por meio da teoria dos registros de representação semiótica, evidenciar que esta atividade Matemática está ligada as diferentes representações que podem ter um mesmo objeto de estudo. Ao final concluímos que o trabalho com demonstrações em Geometria que leve em consideração a diversidades de registros de representação podem fazer alunos evoluírem em suas aprendizagens.

Palavras-chave: Demonstrações matemáticas. Geometria euclidiana. Registros de representação semiótica.

Abstract

This article aims to present a reflection on the role that the semiotic registers representation in play activities demonstrations in Euclidean geometry. The considerations presented here are part of studies on the literature review that are being developed for the elaboration of a doctoral thesis. Tried to make clear what is meant by demonstration in Mathematics and through the theory of semiotic registers of representation, Mathematics show that this activity is linked to the different representations can have the same object of study. At the end we concluded that working with demonstrations in geometry that takes into account the diversity of representation registers can students develop in their learning.

Keywords: Mathematical proofs. Euclidean geometry. Semiotic registers of representation.

Considerações iniciais

Nosso objetivo com este artigo é abrir espaço para uma reflexão sobre a influência que diferentes registros de representação semiótica podem exercer no ensino de demonstrações matemáticas. As reflexões aqui apresentadas são fruto de estudos que estão sendo desenvolvidos para elaboração de uma tese de doutorado no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática em uma instituição privada da cidade de São Paulo. Esta parte da pesquisa adota uma metodologia qualitativa com procedimentos de análise documental, bem como revisão de literatura.

A fim de atendermos nossa proposta verificamos a necessidade de situarmos o leitor acerca do que entendemos como "demonstração" e sobre a polêmica do seu papel no que diz respeito à busca da verdade em Matemática.

Muitos discursos, controversos em sua maioria, apresentam distintas concepções sobre o que é uma demonstração matemática e como se confere certeza à produção matemática. A literatura em Matemática[1] trata o tema "demonstração" da maneira que tradicionalmente aceitamos: um dispositivo definido formalmente pela lógica, cujas raízes não são passíveis de investigação e o produto gerado por tal dispositivo se configura como uma produção científica em Matemática. Já a literatura da Educação Matemática, área na qual focamos o nosso trabalho, o termo "demonstração" normalmente aparece adjetivado: *prova*; *prova rigorosa*; *demonstração formal*; entre outras adjetivações, conforme destaca Garnica (1996a). Para cada uma dessas adjetivações encontramos uma variedade enorme de termos que correspondem a tantas outras significações para a "demonstração" e junto a elas, questões conceituais relacionadas a aspectos epistemológicos e linguísticos que nos apresentam como um dos dificultadores para responder a uma pergunta, que ainda hoje é motivo de debate: O que é uma demonstração matemática?

Buscaremos levantar algumas questões atuais sobre essa polêmica, e apresentar considerações para o ensino das demonstrações matemáticas por meio da teoria dos registros de representação semiótica de Duval (1988,1993,2009). Focaremos no ensino de Geometria Euclidiana, por ser uma das disciplinas da Matemática na qual o trabalho com demonstrações se faz mais presente. Isto, talvez, se deva ao fato de ser com o

[1] Chamamos aqui de Literatura em Matemática, a produção científica de Matemática pura, calcada no formalismo da lógica.

geômetra de Megara, Euclides, que a Matemática recebe o *status* de ciência hipotético-dedutiva, apresentando-nos um rigor nas provas para validar as premissas matemáticas.

Demonstração Matemática: mostrar, verificar, provar, explicar?

Ao longo dos séculos, determinar o que é, e como se alcança a verdade em matemática foi motivo de discussões e mudanças significativas de pensamentos acerca do que é uma demonstração e seu papel na Matemática (Caraça, 2003; Boyer, 1996; Domingues, 2002). Porém, tais discussões, além de não chegarem a um "veredicto", criaram um campo vasto de significações e finalidades da demonstração em Matemática. Dessa forma, não nos pareceria notável os problemas epistemológicos e linguísticos enfrentados para determinar o que é afinal uma demonstração matemática.

As concepções apresentadas no texto baseiam-se no ensino, pois acreditamos que uma análise mais profunda desses aspectos irá, inevitavelmente, se relacionar com as ideias da Filosofia da Ciência e Matemática, abrindo margem para uma discussão que não se objetiva por agora.

De maneira simplista, evidenciamos algumas respostas acerca do problema acima exposto, conflitantes, porém que interessam ao nosso estudo:

> Um matemático diria: É um procedimento utilizado para "convencer" um grupo de especialistas, através de uma linguagem formal e regras de transformações.
>
> Um educador matemático diria: É uma forma de "esclarecer", "explicar" as teorias matemáticas, através de evidências tanto físicas quanto abstratas. Utilizando-se de especulações e argumentações.
>
> O estudante de matemática diria: Eh... Bem... Então...Não sei dizer muito bem o que é uma demonstração matemática. O que é? (adaptado de DAVIS E HERSH, 1995, p.53).

Responder a essa pergunta não é tarefa fácil. De acordo com a literatura revista ela não tem uma resposta única e analisar pontos de vistas distintos é fundamental para um posicionamento crítico e reflexivo sobre o papel que a demonstração desempenha na Matemática e no seu ensino.

Direcionamos inicialmente a discussão para dois pontos importantes sobre algumas das funções da demonstração: "Convencer" e "Esclarecer".

Barbin (1988), em seus estudos epistemológicos e didáticos sobre a demonstração, ressalta o seu papel "discursivo" na civilização grega. Para ela, a demonstração surge para ser a regulamentadora de um debate contraditório, público, de acesso a todos, de discussões argumentadas, tornando-se também, regras de um jogo intelectual. Para a autora, com os assuntos das cidades sendo postos em discussão pública, a demonstração aparece como ato social que visa a "convencer" o outro. Esse espírito parece ter sido incorporado pela matemática que surgia naquela época. "*Conhecer, é conhecer por intermédio da demonstração, ou seja, a demonstração é de ordem da convicção num debate contraditório*" (ARSAC, 1988).

Essa visão da demonstração, calcada no discurso e no ato de "convencer" socialmente, parece ser reconhecida por vários matemáticos. Afinal, há outros aspectos envolvidos na maneira como os próprios matemáticos validam suas descobertas, não recorrendo exclusivamente a "demonstração formal". No próprio contexto da matemática profissional, muitos matemáticos elaboram suas demonstrações dedutivas recorrendo ao recurso da linguagem natural, complementado-as com expressões simbólicas ditadas pela lógica.

> Deveríamos reconhecer que as demonstrações humanamente compreensíveis e humanamente verificáveis que atualmente fazemos, são as mais importantes para nós, e que elas são muito diferentes da "demonstração formal". Atualmente, as demonstrações formais são inacessíveis e em grande parte irrelevantes, temos bons processos humanos para verificar a validade matemática. (TRURSTON, 1994, p. 171).
>
> Considero a demonstração como forma de discurso. É uma maneira de falar própria da matemática e de ser reconhecido por tradição. (WHELLER, 1990, p. 3).

A convicção de que sabemos a verdade, por meio do discurso, é para alguns autores o que impulsiona uma demonstração matemática. A demonstração passa a ser um argumento necessário para validar uma afirmação, um argumento que pode assumir várias formas - "Etnoargumentações" – (GARNICA, 2002, p.94), desde que seja convincente.

Dito isso, podemos encarar a demonstração como um ato social, no qual:

> (...) a aceitação de um resultado, entre os que produzem matemática, ser mais um processo social de negociação de significados dentro do grupo de especialistas ao qual o resultado em questão se relaciona, do que o mero seguir cego das regras impostas pela proposta formal. (GARNICA, 1996a, p. 37)

Essa visão da demonstração enquanto um argumento discursivo merece uma atenção maior no que tange a clarificação destes conceitos, uma vez que dentro da própria literatura da Educação Matemática, não há um consenso. A quem acredite que argumentação e demonstração são sinônimos, outros, que a argumentação é parte da demonstração e ainda, alguns que afirmam se tratarem de concepções completamente disjuntas.

A argumentação para Balacheff (1991) é um discurso que visa obter a concordância do interlocutor para a aceitação de uma afirmativa qualquer. É pessoal e situada, de ação persuasiva, buscando a adesão intelectual de um público. Já a demonstração, visa garantir a veracidade de uma afirmativa matemática, através da lógica formal. Assim, a demonstração é impessoal, não depende da opinião e muito menos, visa à adesão de um público. (Perelman, 1987).

Contudo, conforme já exposto, na atividade profissional dos matemáticos, uma demonstração não se restringe apenas a processos lógicos formais, o uso da língua materna em processos demonstrativos atribui a demonstração um caráter não-formal. Sendo assim, alguns autores admitem que a argumentação faz parte do ato de demonstrar e diferentemente do que levanta Perelman, ela visa sim, convencer um auditório específico, "a comunidade de matemáticos, peritos que possuem as qualidades de entender, examinar e aceitar, ou não, uma dada demonstração". (RODRIGUES, 2008, p. 22,).

Hanna (1990) aponta que o conceito de demonstração como *argumentação convincente* se trata de uma questão essencial no ensino de Geometria, no qual os educadores deveriam se preocupar com a demonstração como argumentação que tem a função de validar e explicar. Para ela a grande diferença reside no fato de que uma demonstração que prova só evidencia **que** um teorema matemático é verdadeiro, enquanto que as demonstrações que explicam nos mostram **porque** é que tal teorema é verdadeiro.

Para Duval (1993b), embora a argumentação e a demonstração utilizem conectivos proposicionais e formas linguísticas similares, os raciocínios envolvidos em cada uma das tarefas (argumentar e demonstrar) são disjuntos e envolvem funções cognitivas distintas. Para o autor, o raciocínio dedutivo formal prevalece em atividades de demonstração matemática e este, nada tem a ver com o raciocínio envolvido na argumentação, ou seja, no discurso natural.

Para alguns autores (Lakatos, 1978; Hanna, 1989), a demonstração está associada com determinadas funções, dentre elas ressaltamos:

- verificação/convencimento: dizem respeito à verdade de uma afirmação. Podem ser feitos por meio de procedimentos empíricos e de raciocínio indutivo;
- explicação/clarificação: têm a função de explicar a verdade de uma afirmação. Não se satisfaz somente pela evidência empírica;
- sistematização: organização de resultados num sistema formal;
- descoberta: invenção de novos resultados;
- comunicação: transmissão do conhecimento matemático;
- desafio intelectual: realização pessoal, gratificação da construção de uma demonstração.

A demonstração como processo de explicação, de esclarecimento, tem sido defendida por Hanna (1990) em seus trabalhos sobre demonstrações no currículo. Resumindo, Hanna sugere que o ensino de demonstrações deve ser apoiado nas demonstrações que explicam, pois elas, diferente das demonstrações que simplesmente provam a veracidade de um teorema, explicam/clarificam por que é que um teorema é verdadeiro.

Podemos dizer que a demonstração que convence, vinculada ao discurso e aos métodos empíricos, é um pontapé inicial para as demonstrações que explicam, clarificam. Mesmo que se esteja convencido, por processos heurístico-empíricos, que a soma dos ângulos internos de um triângulo euclidiano seja 180º (demonstração que convence), é necessário algo que explique, além da evidência física, o porquê desse fato (demonstração que explica).

Assim, o aspecto de explicação de uma demonstração para muitos educadores matemáticos tem maior valor do que o de verificação. Uma grande discussão acerca do uso de recursos tecnológicos, em especial, o computador, alimenta o debate dessa temática.

Uma analogia desses dois aspectos da demonstração pode ser feita com a atividade matemática e o produto desta atividade. A atividade matemática tem como pressuposto a descoberta de conceitos matemáticos (demonstração como verificação) e, a estes conceitos, chama-se de produto (demonstração como explicação). Segundo Polya:

> ... o resultado do trabalho criativo de um matemático é um raciocínio dedutivo, uma demonstração; mas a demonstração é descoberta por raciocínio plausível, pela especulação (guessing). Se a aprendizagem da matemática reflete, em alguma medida, a invenção matemática, tem de haver lugar para a especulação, para a inferência plausível. (POLYA, 1995, p. 83).

No que diz respeito ao ensino de demonstrações, a pesquisa de Garnica (1996b) revela que existem várias contribuições que fazem referência a metodologias para o uso da demonstração (prova) em sala de aula, porém estas podem ser vistas compartimentadas, não existindo, portando um projeto global que lhes sirva como fundamentação.

O desconhecimento das discussões sobre a Educação Matemática por parte dos profissionais da educação, e, mais precisamente, sobre o papel da demonstração, gera conflitos epistemológicos na medida em que, ao se desconsiderar as nuances da atividade matemática e dos produtos gerados, somos podados uma teoria única, formal, na qual a demonstração é algo pronto, acabado. Como ressalta Garnica sobre o papel das demonstrações na Matemática:

> [...] demonstração, portanto, em seu regime de verdade, é uma outra Matemática, radicalmente distinta daquela vista sob a perspectiva da prática profissional dos matemáticos. Distintos regimes de verdade falam de distintas matemáticas, não de uma única Matemática, plena, onipresente, onipotente, onisciente, que pode ser atingida de diferentes formas. Isso não tem sido explicitado de modo claro, ou falando de outro modo, pode estar sendo sistematicamente negligenciado. (GARNICA, 2002, p. 99).

Vimos que o processo de demonstrar, de acordo com os autores destacados, perpassa por etapas até que se chegue a um produto que explique, sem sombra de dúvidas, um determinado problema matemático. Porém, esse produto pode ser representado de distintas formas e cada uma delas apresentada corretamente. Então, o que considerar? Como determinar o que está certo ou errado? Como estabelecer um padrão de demonstração se é possível estabelecer uma verdade de várias maneiras? Apresentamos a seguir, uma síntese da teoria dos registros de representação semiótica, evidenciando a congruência *referencial* e *semântica* entre as maneiras de se representar uma verdade matemática em atividades de demonstração podendo ser uma resposta, um caminho, para as perguntas levantadas, uma vez que, pelo apresentado fica evidente que demonstrações de um mesmo objeto matemático podem ser apresentadas por representações semióticas distintas.

Os registros de representação semiótica: uma abordagem cognitiva em termos de congruência

De acordo com as ideias de Duval, ensinar matemática é, antes de tudo, propiciar situações para o desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização. E, para isso, "não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer à noção de representação[2]" (DUVAL, 1995, p. 15).

Para o autor, a distinção entre um objeto matemático e a representação[3] que se faz dele é fundamental para o funcionamento cognitivo do sujeito frente a uma situação de ensino. Este funcionamento é estudado por meio de uma abordagem cognitiva que leva em consideração a importância das *representações semióticas*[4] na Matemática e a variedade destas representações que nela são utilizadas.

As representações podem ser mentais, computacionais ou semióticas. As mentais "... ocultam o conjunto de imagens e, mais globalmente, as concepções que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhes está associado" (DUVAL, 1993a, p. 38). São internas e conscientes, geralmente são representações semióticas interiorizadas. As computacionais, assim como as mentais, são internas, porém, não conscientes. As semióticas "... são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação que têm dificuldades próprias de significância e de funcionamento" (DUVAL, 1993a, p. 39). As representações semióticas não são internas nem externas, mesmo que muitos confundam as representações semióticas como meras exteriorizações das representações mentais.

> Não se pode considerar as representações semióticas como simplesmente subordinadas às representações mentais, uma vez que essas últimas dependem de uma interiorização das primeiras e sozinhas as representações semióticas permitem certas funções cognitivas essenciais, como a do tratamento. (DUVAL, 1993a, p. 44).

Para o autor, a mobilização dos vários registros de representação é fundamental para a função cognitiva do pensamento humano. Na Matemática, é a articulação dos registros que conduz ao acesso à compreensão matemática e esta compreensão sugere a

---

[2] Um registro de representação é, segundo Duval (1993a), um sistema semiótico que tem as funções cognitivas fundamentais no funcionamento cognitivo consciente.

[3] Duval (1993a) considera três tipos de registros de representação: o figural, o simbólico e o da língua natural.

[4] Para Duval (1993a), as representações semióticas têm dois aspectos: a forma (representante) e o conteúdo (representado).

coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica, dos quais um é a utilização pelo aluno da linguagem natural. Porém, a coordenação entre os registros, apesar de ser fundamental para a compreensão, não é suficiente. É essencial não confundir os objetos matemáticos com suas distintas representações.

> O ponto comum à grande maioria dos bloqueios dos alunos, quaisquer que sejam os domínios de atividade matemática e qualquer que seja o nível do currículo, é a incapacidade de converter a representação de um objeto em uma outra representação do mesmo objeto. (DUVAL, 1993a, p. 53).

Para resolver esse problema, Duval ressalta a necessidade de duas operações cognitivas relacionadas ora ao objeto matemático, ora à sua representação. Uma delas é a "*semióse"* que está associada à produção e à apreensão de uma representação semiótica. A outra, "*noésis",* refere-se à apreensão conceitual do objeto. Ambas mobilizarão diferentes atividades cognitivas, que deverão ser interligadas e examinadas entre si. "Não há noésis sem semiósis, é a semiósis que determina as condições de possibilidade e de exercício da noésis" (FERREIRA, 2008, p. 12). Duval ainda ressalta que muitos registros devem ser mobilizados para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações, de forma que venham a ser reconhecidos em cada uma delas.

Segundo Duval (2009), a transformação de um sistema de representação em outro, atividade cognitiva fundamental ligada à *semióse,* pode ser de dois tipos: o *tratamento* e a *conversão*. O *tratamento* é uma transformação que ocorre no mesmo sistema de representação; é uma transformação estritamente interna a um registro. Existem tratamentos que são específicos a cada registro e que não necessitam de nenhuma contribuição externa para serem feitos ou justificados. Um exemplo de um tratamento é a transformação da equação $x+5=3$ em $x=-2$. Note que esta transformação se dá dentro de uma mesma rede semântica.

Já a *conversão* é tratada pelo autor como uma transformação que se faz de uma representação semiótica para outra, fazendo referência ao mesmo objeto, ou seja, muda-se a representação (representante), mas não se muda o objeto (representado*)*. Um exemplo de conversão é a transformação de uma função na forma algébrica para a forma gráfica.

O autor ainda ressalta que o tratamento normalmente é a transformação que mais se prioriza no ensino, privilegiando a forma mais que o conteúdo. Não se é dada a importância devida às conversões e os tratamentos são escolhidos na forma que mais convém, isto é, de uma forma que seja mais fácil à compreensão pelos alunos. Para Duval, é na conversão que mecanismos subjacentes à compreensão serão desvelados. São nas conversões que as mudanças dos registros de representação se mostram mais eficazes para a formação conceitual - aquisição de conceitos.

A conversão não é uma transformação trivial; é um processo cognitivamente complexo, pois exige uma compreensão global e qualitativa das representações de registros utilizados. A complexidade da conversão só será compreendida se os sistemas semióticos forem vistos em sua relação entre conhecimento/representação. Mudar de um registro para outro não significa apenas mudar o tratamento de um objeto; significa também explicar suas propriedades ou seus distintos aspectos.

O processo de conversão enfrenta dois fenômenos que fatalmente contribuem para as dificuldades enfrentadas pelos alunos na coordenação e compreensão dos registros de representação: a *congruência* e a *não congruência*, os quais evidenciamos a seguir:

Congruência e não congruência entre registros de representação: o caso da Geometria

Problemas relacionados com a questão da *congruência* nos permitem um olhar diferenciado e mais aprofundado sobre a temática da demonstração em matemática. Situações matemáticas aparentemente semelhantes podem assumir, na realização da resolução da situação, conotações tão distantes umas das outras que sem uma análise que leve em conta a questão de *congruência* pode tornar difícil à compreensão dos motivos de tal distanciamento.

Para que dois registros semióticos sejam congruentes é preciso que haja uma correspondência semântica entre as unidades significantes (representantes), ou seja, é preciso que a representação terminal (representação de chegada) transpareça na representação de saída (representação de partida). Por outro lado, se a representação terminal não transparece a representação de saída, temos o fenômeno da *não congruência*.

Diferente do que acontece no discurso da linguagem natural, o discurso matemático se desenvolve, principalmente, por substituição, ou seja, a cada passo no desenvolvimento do raciocínio, de um cálculo ou qualquer que seja o procedimento matemático utilizado na resolução de um determinado problema, a “nova expressão” vem substituir a anterior, em virtude das tantas regras de substituição, inerentes a cada registro semiótico escolhido. “A substitutividade é uma característica fundamental do funcionamento cognitivo do pensamento matemático e, é relativamente a esta substitutividade que os fenômenos de congruência semântica e não congruência semântica são importante.” (DUVAL apud MORETTI, 2012a, p. 113).

Em geral, é essa substitutividade que viabiliza o desenvolvimento do cálculo e da **demonstração** e seu funcionamento ocorre em relação à *referência.* Tal visão vai de encontro com a noção de constituição **objetiva** do saber. Já em vistas da constituição **subjetiva** do saber matemático, a substitutividade funciona em relação ao sentido associativo interno, no qual tudo depende da *congruência semântica* ou *não congruência semântica* das expressões que serão substituídas uma pela outra. De acordo com Duval (1988b), na aprendizagem matemática

> a equivalência referencial destaca-se da congruência semântica e, no entanto, o funcionamento espontâneo do pensamento segue prioritariamente a congruência semântica. (DUVAL, 1988b, p. 10).

Esse fato se mostra essencialmente relevante nas atividades de demonstração matemática, na qual a *equivalência reverencial* de registros é uma substituição essencial à atividade, porém não acontece sem que se estabeleça uma *congruência semântica* entre os registros mobilizados no desenvolvimento de uma demonstração.

Em particular, os problemas de Geometria apresentam uma enorme originalidade em relação aos outros problemas em matemática, pois se por um lado a forma de raciocínio envolvida na resolução de tarefas geométricas exige um raciocínio que implica uma referência axiomática local, por um outro, este raciocínio só se desenvolve no registro da língua natural. Assim, os problemas de geometria exigem uma forma de expressão que não repousa na oposição comumente estabelecida entre a língua natural e as línguas formalizadas.

> [...] para que um registro semiótico, incluindo a língua natural, possa responder a esta função de tratamento, é preciso introduzir condições semânticas de substituição por equivalência referencial. Na língua natural, isto se faz por meio do jogo das definições e de distinções. É desta maneira que a geometria euclidiana utiliza o registro do discurso natural e desenvolveu dentro das possibilidades da linguagem natural uma função de tratamento. A geometria euclidiana impôs, culturalmente, a imagem de um

> desenvolvimento do raciocínio more geométrico ligado ao discurso. (DUVAL, 1988b, p. 23).

Além disso, a heurística de problemas de geometria baseia-se em registros espaciais que permitem formas de interpretações autônomas, onde a questão da *congruência*, inevitavelmente, mostra-se relevante para o estabelecimento da compreensão e apreensão dos conteúdos abordados. Duval (1995), nomeia esses registros espaciais em:

- **sequencial**: com o objetivo de reproduzir uma figura; é utilizada nas atividades de construção ou descrição;
- **perceptiva**: é a interpretação das formas de uma figura em uma determinada situação geométrica;
- **discursiva**: é a interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando as articulações dos enunciados; relaciona semanticamente as propriedades inerentes aos enunciados à figura;
- **operatória**: centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial (de partida) e sua reorganização perceptiva determinada pelas modificações.

Qualquer que seja a figura geométrica desenhada no contexto de uma atividade é possível estabelecer duas atitudes:

1. a apreensão perceptiva das formas (instantâneo, automático);
2. e a apreensão discursiva dos elementos e propriedades da figura (verificação).

Estas atitudes, às vezes se opõem, pois a figura pode mostrar objetos que não são explicitados nos enunciados (não há uma *congruência semântica*) e os objetos enunciados pelas hipóteses não são, necessariamente, os espontaneamente determinados pelos alunos (não há uma *congruência referencial*).

Para Duval, o grande problema das figuras geométricas se concentra nas diferenças entre a apreensão perceptiva e a apreensão discursiva - interpretações comandadas necessariamente pelas hipóteses -, pois, nem sempre o objeto que aparece na figura é o objeto que a situação geométrica (enunciado) exige ver. “os alunos leem o enunciado, constroem a figura e em seguida se concentram na figura sem voltar ao enunciado." (DUVAL, 1988a, p. 61).

Consequentemente, o abandono do enunciado contribui para a ausência de interpretação discursiva do problema. Um dos fatores que pode ser o responsável por esse abandono é o fato de que a grande maioria dos problemas geométricos acessíveis aos alunos tem enunciado semanticamente congruentes com a figura construída. Dessa forma, os alunos não se dão conta de que uma figura deve ser olhada não mais do que através ou em função das propriedades, ou das condições formuladas como hipóteses. Neste sentido, a *congruência semântica* pode dar acesso ou proibir a entrada dos alunos na resolução do problema – ela não é uma condição suficiente para sua busca -. Para evidenciar este aspecto mais essencial "é preciso considerar não mais a apreensão perceptiva da figura, mas a sua apreensão operatória." (DUVAL apud MORETTI, 2012b, p. 125).

A apreensão operatória das figuras, segundo Duval (1988), depende das modificações possíveis que a mesma pode sofrer e são classificadas da seguinte maneira:

- **mereológica**: relação da parte e do todo. A figura pode ser separada em partes, gerando subfiguras da mesma;
- **ótica**: transformação da figura em outra chamada sua imagem;
- **posicional**: deslocamento da figura em relação a um referencial.

As modificações são realizadas tanto graficamente quanto mentalmente. Porém, diferentemente da construção geométrica, o modo escolhido para a modificação é neutro, ele não modifica a apreensão, nem mesmo a análise a ser realizada. No entanto, dependendo do tipo de modificação escolhida, podem surgir possibilidade de tratamento sem relação uns com os outros.

> A produtividade heurística de uma figura, em um problema de geometria, está ligada a existência da congruência entre uma destas operações e um dos tratamentos matemáticos possíveis para o problema proposto. (DUVAL, 1988a, p. 63).

Duval ainda atesta que em um problema de geometria, é importante não confundir a produtividade heurística de uma figura e a visibilidade das operações ligadas a esta produtividade, quando uma análise cognitiva sobre esse problema for realizada. Isso porque, a produtividade heurística depende da *congruência* entre uma operação e um tratamento matemático possível, ao passo que a visibilidade é intrínseca aos tratamentos matemáticos.

Um dos problemas em atividade de demonstração e que se acentua na relação estabelecida entre os tipos de apreensão, está na questão da congruência entre a apreensão operatória e um tratamento matemático possível. Tal congruência, se evidenciada, faz com que a apreensão discursiva possa ser negligenciada. Isso remete a concluir que a redação do problema pode até tomar a forma de uma demonstração, porém, tal forma não será diferente de uma formulação de instruções exigidas em uma atividade do tipo de "jogos de mensagens". Como evidencia Duval (1988a), é na não congruência entre a apreensão operatória e um tratamento matemático possível em um problema geométrico que os alunos serão confrontados, verdadeiramente, com uma atividade de demonstração, pois o recurso da apreensão discursiva se tornará necessária.

Considerações finais

Diante do exposto, tentamos apresentar ao leitor algumas, de muitas, das concepções a cerca de demonstração matemática e de suas funções no ensino. Entendemos que a noção que assumimos do que vem a ser uma demonstração matemática, se torna relevante na maneira em que nos propomos a ensiná-la e até mesmo em aprendê-la (entender os processos envolvidos na arte de demonstrar matematicamente).

Duval em sua teoria nos mostra que há uma grande heterogeneidade cognitiva existente entre os problemas geométricos que lidam com conceitos muito próximos ou que solicitam os mesmos conhecimentos (ideias de *congruência*), sendo que esses necessitam de uma categorização, não somente para promover a interpretação das performances dos alunos e as produções observadas nas atividades de demonstração, mas essencialmente para abordar aquilo que é chamado de "aprendizagem da demonstração".

> Tudo isto significa dizer que a atividade cognitiva de demonstração é menos simples e menos homogênea do que o seu produto – a demonstração pronta e lida por outro. [...]. A atividade de demonstração só pode surgir se for a partir de um ponto de convergência de numerosas funções cognitiva. (DUVAL, 1988a, p. 73).

Como evidenciado, não pretendíamos responder o que é uma demonstração matemática e muito menos determinar uma única metodologia para o seu ensino em Geometria Euclidiana, mas sim, elucidar para profissionais em Educação Matemática, uma possibilidade de entender a demonstração e utilizar, baseado nas concepções apresentadas, a teoria de Duval como um suporte de trabalho para o ensino em atividades demonstrativas, pois esta atividade matemática está envolvida com representações distintas de um mesmo objeto. Adotar o método dedutivo como único modelo parece não ser a melhor escolha pedagógica. De acordo com Kline (1970):

> A Matemática é uma atividade cujo primado é da atividade criativa, e pede por imaginação, intuição geométrica, experimentação, adivinhação judiciosa, tentativa e erro, uso de analogias das mais variadas, enganos e trapalhadas. Mesmo quando um matemático está convencido de que seu resultado é correto, há muito para ser criado até encontrar a prova disso. (Apud GARNICA, 2002, p. 120).

Assim, a compreensão de demonstração que se propõe está intrinsecamente relacionada com a conscientização da diferença entre as múltiplas atividades discursivas e representativas que são evidenciadas na mobilização de diferentes registros semióticos, entendendo assim, a demonstração como um processo, em que a atividade cogniscente do aprendiz, ao lidar com um mesmo objeto matemático-geométrico nos diversos registros de representação, é uma opção para a evolução da aprendizagem dos alunos.

Referências bibliográficas

BALACHEFF, N. The benefits and limits of social interactions: The case of mathematical proof. In: Bishop, A.; Mellin-Olsen, S.; Van Dormolen, J. (eds.). *Mathematical Knowledge*: Its growth through teaching. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. p. 175-192, 1991.

BARBIN, E. La demonstration mathemáthique: significations epistemologiques et questions didactiques. *Bulletin de I'APMEP*, n. 366, dez 1988.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2. Ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blüncher Ltda, 1996.

CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. 5. Ed. Lisboa: Gradiva, 2003.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. *A Experiência Matemática*. Lisboa: Gradiva, 1995.

DUVAL, R. *Semiósis e Pensamento Humano*: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL,R. *Sémiosis et pensée humaine*.Berna: Peter Lang,1995.

DUVAL, R. Registres de representation sémiotique e fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Gognitives***.** Strasbourg: IREM-ULP, v. 5, p. 37-64, 1993a.

DUVAL, R.; EGRET, M. A. Introduction à la demonstration et apprentissage du raisonnement déductif. *Repères*, 12, p. 114-147, 1993b.

DUVAL, R. Approche cognitive dês problèmes de geométrie em termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences Gognitives***.** Strasbourg: IREM-ULP, v. 1, p. 57-74, 1988a.

DUVAL, R. Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences Gognitives***.** Strasbourg: IREM-ULP, v. 1, p. 7-25,1988b.

FERREIRA, Fernanda A. *Demonstrações em Geometria Euclidiana*: o uso da sequência didática como recurso metodológico para seu ensino. 2008. p. 186. Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC- MINAS), Belo Horizonte. 2008.

GARNICA, A. V. M. As demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. *Bolema*, Rio Claro, ano 15, n.18, p. 91-122, 2002.

GARNICA, Antônio Vicente Marafioti. Da literatura sobre a prova rigorosa em Educação Matemática: Um levantamento. *Quadrante*, Lisboa, v.5, n. 1, p. 29-60,1996a.

GARNICA, Antônio Vicente Marafioti. Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática. *Zetetiké*, Campinas, v. 4, n. 5, p. 7-28, jan./jun., 1996b.

HANNA, G. Some pedagogical aspects of proof. *Interchange***,** v. 21, n. 1, p. 6-13, 1990.

HANNA,G. More than formal proof*.* *For the learning of Mathematics*, v. 9, n. 1, p. 20-23,1989.

LAKATOS, Imre. *A lógica do descobrimento matemático*: Provas e Refutações. Trad. Nathanael C. Caixeiro.Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

MORETTI, Méricles Thadeu. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. *Revemat*, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 97-117, 2012a.

MORETTI, Méricles Thadeu. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. *Revemat*, Florianópolis,v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012b.

PERELMAN, C. Argumentação. In: Enciclopédia Einaudi: Oral/Escrito Argumentação. Lisboa:Imprensa Nacional. v. 11, p. 234-265,1987.

POLYA, George. *A Arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático.Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência,1995.

RODRIGUES, Margarida M. A. T. *A demonstração na prática social da aula de Matemática*. 2008. p. 831. Tese de Doutorado – Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências. Lisboa, 2008.

THURSTON, W. P. On proof and progress in mathematics**.** *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 30, n.2, p. 161-177, 1994.

WHEELER, D. Aspects of Mathemetical Proof. *Interchange*, v. 21, n. 1, p. 1-5, 1990.