

Enseñanza de las cónicas desde lo puntual y lo global integrando un ambiente de geometría dinámica

*Edinsson Fernández Mosquera**

RESUMEN

Se presentarán los resultados de una investigación de intervención didáctica en el aula, que se ubicó dentro del contexto de la enseñanza de las cónicas vistas como lugares geométricos, con la mediación del Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) Cabri Géomètre II Plus. Como productos de esta investigación se dará a conocer la secuencia de *situaciones a-didácticas* que se diseñaron como problemas de construcción geométrica de estas curvas desde el enfoque puntual hacia lo global. La secuencia se diseñó con el propósito de que los estudiantes realizaran, en primera instancia,

construcciones, punto por punto, de cada una de las cónicas, y luego, construcciones geométricas donde se utilizara la figura desde un punto de vista global, para caracterizar geométricamente cada una de ellas. Las situaciones se diseñaron desde lo sintético hacia lo analítico trayendo consigo una complementariedad en los enfoques usuales para que los estudiantes comprendieran las propiedades geométricas de las cónicas.

Palabras clave: cónicas, construcciones geométricas, ambiente de geometría dinámica, enfoque puntual-global, lugares geométricos.

* Área de Educación Matemática. Departamento de Matemáticas y Estadística. Universidad de Nariño, Pasto – Colombia. Direcciones electrónicas: edi454@yahoo.com, edinfer@udenar.edu.co

CONTEXTUALIZACIÓN

Se presentará un informe de investigación realizado en un curso de *Geometría Analítica* con 25 estudiantes del programa de estudios de Licenciatura en Matemáticas, en la Universidad de Nariño.

En esta investigación se diseñó una secuencia didáctica para el aprendizaje de las cónicas (parábola, elipse e hipérbola) vistas como lugares geométricos y mediados con el Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) *Cabri Géomètre II Plus*.

REFERENTES TEÓRICOS

Para el marco teórico, se tuvieron en cuenta tres dimensiones usuales en el campo de la Didáctica de las Matemáticas de la Escuela Francesa (Artigue, 1995; Brousseau, 2007): la dimensión *histórico-epistemológica*, la dimensión *cognitiva* y la dimensión *didáctica*.

Con la primera dimensión se encontraron los diversos significados, naturaleza y características de las cónicas desde la perspectiva de lugar geométrico, en tres períodos de tiempo. Con la *cognitiva*, lo *global* y *puntual* de los objetos matemáticos, así como las *concepciones*, *dificultades* y *obstáculos* de los estudiantes acerca de la noción de lugar geométrico en el aprendizaje de las cónicas. También se revisó la *visualización matemática* en un AGD, el papel de las *representaciones matemáticas ejecutables* y *dinámicas* para la comprensión de las cónicas y las *construcciones geométricas* como entrada necesaria en los AGD que actuó como mediador (Moreno & Hegedus, 2009). Y con la *didáctica*, se tuvo en cuenta un *análisis de libros de texto* (Fernández & Mejía, 2010) sobre las cónicas en la Educación Superior, la *teoría de las situaciones didácticas* (TSD) (Brousseau, 2007), los AGD como *medio* (Acosta, 2010) organizador de la interacción con el saber matemático. Asimismo, se tuvo en cuenta la tipología de *tareas* en AGD (Laborde, 2008) para gestionar las clases de *Geometría Analítica*.

OBJETIVOS

Los objetivos específicos fueron: 1. Diseñar y aplicar una secuencia didáctica que permita identificar y establecer una relación dialéctica entre los enfoques *puntuales* y *globales* cuando se estudian las cónicas como lugares geométricos en el AGD, en relación con problemas de construcción geométrica y 2. Observar, registrar y analizar la producción de los conocimientos

matemáticos alrededor de las cónicas como lugar geométrico realizada por los estudiantes del curso de *Geometría Analítica*, cuando interactúan con el *medio*, a través de las situaciones diseñadas, desde una dialéctica *puntual* y *global*, cuando se involucran en problemas de construcción geométrica.

METODOLOGÍA

En esta investigación, se abordaron los aspectos metodológicos siguiendo las directrices de la *micro-ingeniería didáctica* (Artigue, 1995), por lo que se realizaron las cuatro fases: 1. los análisis *preliminares*; 2. el diseño de las situaciones de enseñanza y sus análisis *a priori*; 3. La experimentación; y finalmente, 4. Los análisis *a posteriori* y la validación y confrontación con los *a priori*.

RESULTADOS

Se expondrán los análisis *a priori* y *a posteriori* del diseño y gestión de la puesta en acto de las situaciones a-didácticas que se prepararon para esta investigación. Uno de los resultados fue el diseño de ocho situaciones desde la dialéctica *puntual-global* integrando *Cabri Géomètre II Plus* en relación a la TSD y la tipología de tareas en un AGD. Asimismo, se presentarán las ideas erróneas que tuvieron los estudiantes acerca de las cónicas, así como las concepciones previas que tuvieron sobre qué significa para ellos un lugar geométrico. En particular, uno de los resultados es que la comprensión *global* del lugar geométrico impera en los estudiantes al ver la figura (cónica) completa, en contraste con la comprensión local o *puntual* que no es muy bien recibida (Jahn, 2002).

CONCLUSIONES

Se presentarán algunas de las más relevantes conclusiones de esta investigación, tales como:

1. El análisis la información recolectada evidenció que las situaciones didácticas planteadas desde las construcciones geométricas *puntuales* permitieron que los estudiantes realizaran construcciones geométricas *globales* en el AGD, a la vez que en este ambiente se dieron retroalimentaciones que posibilitaron caracterizar algunas de las propiedades geométricas de las cónicas, pero al partir de construcciones *globales* los estudiantes no tuvieron en cuenta la naturaleza geométrica de las curvas como lugares geométricos: lo *puntual* de ellas.

2. Lo *puntual* en este trabajo remitió a lo local, en considerar puntos de la gráfica que tenían las propiedades de ser una cónica, lo que conllevó a que se quedaran en un nivel perceptual, en tanto que lo *global* de la gráfica les permitió aproximarse al mundo teórico, aunque lo *global* no fue aprovechado al máximo pues las estrategias de los estudiantes se quedaron en lo figural. Asimismo, con este diseño, se pudo descubrir que de lo *global*, existe la posibilidad de que surja la consideración de lo *puntual*, cuando los estudiantes han pasado por una primera caracterización. Además, el diseño de las situaciones sumado al Cabri, produjo un ambiente educativo, a manera de puente, para pasar de lo *puntual* a lo *global*. La vuelta de ir de lo *global* a lo *puntual* es algo que el profesor debe procurar cuando se busca encontrar invariantes o propiedades geométricas aludiendo a puntos de la curva que son claves para determinar la naturaleza de la curva, tales como el vértice o el foco.

3. Uno de los resultados de esta investigación fue el diseño de una *secuencia de situaciones problema*, y como telón de fondo, el uso del tratamiento didáctico reflejado en él mismo, que dejó entrever el cumplimiento de las hipótesis. En este sentido, fue posible reconocer la importancia de promover las caracterizaciones *puntuales* y *globales* de las *cónicas*. De igual forma, este enfoque se reveló como una posibilidad de integrar la visión *sintética* y la *analítica* para el estudio de las *cónicas* a través de la mediación del AGD Cabri Géomètre, al hacer entrar a los estudiantes en el estudio de las *cónicas* por medio de actividades de construcción geométrica y terminar solicitándoles la correspondiente expresión algebraica.

Por ejemplo, para dar cuenta de la transición de lo *puntual* a lo *global*, se pudieron observar en la *situación problema N.º 1* acciones de los estudiantes usando el *medio* a través de construcciones *robustas* o *blandas* (Laborde, 2005). En este caso, se partió de construir una nube de puntos que por su propia naturaleza fueron estáticos, pero que sirvieron como puntos guía para señalar la trayectoria de un *punto móvil* relacionado con una construcción robusta que los estudiantes debían hallar. Este *punto móvil* debía generar la *cónica* de manera global.

4. La dimensión didáctica permitió profundizar en el *saber matemático* que se enseñó. Se tuvieron en cuenta aspectos matemáticos relativos a los lugares geométricos en las *cónicas*, con el propósito de analizar la especificidad y significación del "saber" matemático en el proceso de aprendizaje. Esto con el fin de hacer una "*transposición didáctica e informática*" transparente y desvinculada de subjetividades. De esta manera, el *saber matemático* fue

consustancial al diseño, no fue un agregado. Como esos conocimientos son tan específicos, se debía abordar de esa manera, tratando de darle sentido a las preguntas: ¿Qué son los *lugares geométricos*? y ¿Cuál era su incidencia en los modelos tradicionales de la enseñanza de estas curvas cuando se trata de aprenderlas?

5. Desde la perspectiva didáctica de la dialéctica *herramienta-objeto* (Douady, 1993), el uso de la noción de lugar geométrico en el estudio de las cónicas es un ejemplo de este punto de vista, debido a que la secuencia estuvo organizada alrededor de problemas geométricos cargados de una intencionalidad didáctica que les permitió a los estudiantes darles un sentido y significado a las cónicas implicadas. Desde esta dialéctica, se pudo observar que el lugar geométrico jugó el papel de herramienta. Sin embargo, el paso a estudiar las cónicas en tanto objeto matemático fue trabajado por el profesor en la fase de *institucionalización*.

6. Desde este punto de vista dialéctico, se pudo conjugar la caracterización *puntual y global* en la secuencia diseñada. Y en consecuencia, el encuadre didáctico fue funcional pero al mismo tiempo llegó a convertirse en un fenómeno didáctico denominado *uso abusivo de la analogía* (Brousseau, 2007), al mostrar el profesor de manera ostensiva dicho método.

En este sentido, se piensa que el *método de los lugares geométricos* se debe enseñar claramente, pero con sutileza, más aun cuando en algunos casos, como los ocurridos en este proceso, se convirtió en un *fenómeno complejo* porque los estudiantes trataban de replicarlo, aunque en ocasiones sin éxito. Esta heurística o método de abordar un problema, a veces surge espontáneamente al resolverlo, pero la mayoría de las veces no sucede así en ellos, por lo que hay que hacerlo ostensivo. En las *fases, momentos y devoluciones* de las situaciones se pudo observar que el profesor reiteraba y enfatizaba en el uso del método de los lugares geométricos como una *herramienta* para resolver el problema, pero algunos estudiantes sí lo replicaron pero no lo entendieron.

Por lo tanto, el método de los lugares geométricos se reveló como una *estrategia ganadora* y se vio ampliada al usar el AGD Cabri, el cual pudo haberse integrado a las técnicas habituales de los estudiantes si se hubiese dado una complementariedad entre ambientes como el del lápiz y el papel. No obstante, según Schumman & Green (1997), la selección del ambiente para generar lugares geométricos depende de los objetivos didácticos que persiga el profesor. El problema era encontrar una *estrategia ganadora* que solucionara la situación usando conocimientos geométricos (es decir, con

una construcción geométrica robusta) y que fuese la más eficiente entre las estrategias perceptivas y empíricas (una construcción blanda que se aproximaba). Como algunos estudiantes encontraron la *estrategia*, entonces se manifestó como una *herramienta* para resolverlo y no como una forma de cumplir con las expectativas del profesor de que lo entendieran como *objeto* y no solo como herramienta.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acosta, M. (2010). Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica. En G. García (Presidente de ASOCOLME), Conferencia llevada a cabo en *11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa* (7 al 9 de Octubre de 2010). Asocolme y Colegio Champagnat. Bogotá, Colombia. Recuperado del sitio de Internet Funes, Repositorio Digital de Documentos en Educación Matemática: http://funes.uniandes.edu.co/1169/1/132_ENSEANDO_TRANSFORMACIONES_GEOMTRICAS_CON_SOFTWARE_DE_GEOMETRA_DINMICA_Asocolme2010.pdf
- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. (1 era. ed.). (D. Fregona, Trad.). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
- Douady, R. (1993). Juego de Marcos y la Dialéctica Herramienta-Objeto. En A. Ernesto Sánchez S. & Gonzalo Zubieta B (Eds.). *Lecturas en didáctica de las matemáticas* (pp. 68-87). México: CINVESTAV.
- Fernández, E. & Mejía, M. F. (2010). Análisis de textos escolares para el diseño de situaciones de enseñanza. En G. García (Presidente de ASOCOLME), Conferencia llevada a cabo en *11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa* (7 al 9 de Octubre de 2010). Asocolme y Colegio Champagnat. Bogotá, Colombia. Recuperado del sitio de Internet Funes, Repositorio Digital de Documentos en Educación Matemática: http://funes.uniandes.edu.co/1162/1/61_Analisis_de_textos_escolares_para_el_diseño_de_situaciones_de_Asocolme2010.pdf
- Jahn, A. P. (2002, Junio): "Locus" and "Trace" in Cabri-Géomètre: relationships between geometric and functional aspects in a study of transformations. *The International Journal on Mathematical Education, ZDM, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34 (3), 78-84.
- Laborde, C. (2008). Multiple dimensions involved in the design of tasks taking full advantage of dynamic interactive geometry. En *Memorias XVII Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Viera de Leiria, Portugal.

- Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions: two sides of the use of the use of dynamic geometry environments. En *10th Asian Technology Conference in Mathematics*. (12-16 de Diciembre). Cheong-Ju: Korea National University of Education, Corea.
- Moreno, L. & Hegedus, S. (2009). Co-action with digital technologies. *The International Journal on Mathematical Education, ZDM, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik: Transforming Mathematics Education through the Use of Dynamic Mathematics Technologies*, 41 (4), 505-519.
- Schumann, H. & Green, D. (1997). Producing and using Loci with Dynamic Geometry Software. En J. King & D. Schattschneider. (Eds.). *Geometry Turned On! Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research* (pp. 79-87). Washington D. C., EE. UU.: Mathematical Association of America Service Center.