http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8nespp95

Um estudo no campo conceitual de Vergnaud aplicado às matrizes: uma investigação acerca dos invariantes operatórios

A case study in the Vergnaud's conceptual field applied to matrices: a research about the operators invariants

Valdinei Cezar Cardoso
vccardoso@uem.br

Lilian Akemi Kato
lakato@uem.br

Samuel Rocha de Oliveira
samuel@ime.unicamp.br

Resumo

Este artigo analisa os processos de raciocínio matemático utilizados por estudantes de graduação em cursos de Ciências Exatas na resolução de situações-problemas que envolvem matrizes. Tal análise destaca alguns teoremas em ação não consistentes, apresentados pelos estudantes e detectados, por cálculos relacionais relativos aos campos conceituais: aditivo e multiplicativo. Os resultados mostram que os raciocínios utilizados durante as operações, que envolvem matrizes, são semelhantes aos utilizados para a resolução de problemas aditivos e multiplicativos com números inteiros.

Palavras-chave: Matrizes. Teoremas em ação. Campos Conceituais. Estrutura Aditiva. Estrutura Multiplicativa.

Abstract

We analyse the processes in the mathematical reasoning of undergraduate students of Physical Sciences in the solution to situation-problems with matrices. Such an analysis highlights some theorems in action, presented by the students, which are not consistent, and they were detected from relational calculations of the conceptual fields; additive and multiplicative. The results show that the reasoning used during operations involving matrices are similar to those used to solve problems with sum and product of integers.

Keywords: Matrices. Theorems in Action. Conceptual Fields. Additive Structure. Multiplicative Structure.

Introdução

A Álgebra Linear (AL) caracteriza-se como uma disciplina que está presente nos programas curriculares de cursos relacionados à Engenharia, Informática, Matemática, Física, Química, entre outros.

Por esta importância, diversos trabalhos tratam de fenômenos inerentes ao ensino e à aprendizagem desta disciplina, entre eles destacamos os trabalhos de: Machado e Bianchini (2012) que estuda as concepções sobre AL de professores recém-formados em Matemática a distância; Celestino (2000), que faz um estudo sobre pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de AL na década de 1990; Furtado e Cabral (2011), que estudam a compreensão dos estudantes de AL acerca do tema transformações lineares; Molina e Oktaç (2006), que estudam as concepções sobre transformações lineares no contexto geométrico; Grande e Bianchini (2006), que estudam os registros de representação semióticas presentes em livros didáticos de AL; e Cury eBisognin (2009), que investigam os erros cometidos por um grupo de estudantes ao resolverem sistemas de equações lineares.

Até a finalização desta revisão bibliográfica, não encontramos trabalhos que abordam a Teoria dos Campos conceituais na resolução de problemas envolvendo matrizes. Entendemos que as operações com matrizes fornecem a base para os raciocínios necessários à compreensão dos conteúdos de AL. Nesse sentido, nosso objetivo foi identificar possíveis invariantes operatórios apresentados, pelos estudantes, durante a resolução de problemas aditivos e multiplicativos que envolvem matrizes.

Este estudo extrapola a simples identificação de invariantes operatórios, nas operações com matrizes, vislumbrando que as compreensões, acerca das dificuldades dos estudantes, decorrentes das interpretações subjacentes, possam subsidiar os professores quanto aos possíveis encaminhamentos didáticos e metodológicos que favoreçam o processo de aprendizagem escolar. Tal compreensão pode auxiliar na proposição de atividades que busquem a superação das dificuldades apresentadas, uma vez que os sistemas simbólicos necessários para a aprendizagem matemática são continuamente modificados.

Os raciocínios utilizados nas operações que envolvem matrizes são fundamentais para o estudo da AL, por ser o alicerce que norteia o aprendizado dos conceitos relacionados:

aos sistemas de equações lineares, espaços vetoriais, base, dimensão, transformações lineares, autovalores, autovetores, entre outros.

A disciplina de AL apresenta um grande número de reprovações nos cursos de graduação (CELESTINO, 2000) e poucos estudos abordam a compreensão das dificuldades dos estudantes em operações que envolvem matrizes (SANCHES, 2002).Tais constatações reforçam a necessidade e a importância de trabalhos voltados à compreensão dos processos cognitivos envolvidos no estudo deste campo.

Os resultados que obtivemos indicam fortes relações entre as dificuldades na forma operatória dos raciocínios aditivos e multiplicativos com números inteiros, e a resolução de situações-problemas que envolvem adição e subtração com matrizes.

A teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) "é uma teoria cognitivista, que visa fornecer um quadro coerente entre alguns conceitos com base no estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas" (VERGNAUD, 1990, p. 135).

Vergnaud (1990), com a TCC, investiga a organização cognitiva dos estudantes, a partir de suas ações na resolução de situações-problemas, que permitem a identificação dos elementos, presentes na cognição, que caracterizam seus procedimentos na execução das tarefas, contribuindo para o desenvolvimento da capacidade de inferência e de raciocínio.

Nesse sentido, a TCC busca compreender as relações entre as rupturas que ocorrem: na construção dos conhecimentos, na aprendizagem e no desenvolvimento cognitivo. Nas lentes desta teoria, um conceito adquire sentido, para o sujeito, na medida em que é adaptado para diversas situações-problemas, teóricas ou práticas.

A adaptação do estudante às novas situações é que indica os caminhos para a aprendizagem, que se dá por meio da utilização de diversos conhecimentos, com o objetivo de se adequar às novas situações.

Esses conhecimentos são classificados por Vergnaud (1990) como operatórios ou não operatórios. Para ser operatório, um conhecimento precisa fornecer ao sujeito mecanismos para tratar imediatamente uma situação e, nesse caso, o esquema[1] utilizado para resolver um problema é organizado.

O conhecimento não operatório é aquele com o qual o sujeito não consegue tratar imediatamente uma situação, devido aos esquemas utilizados serem desorganizados, incompletos ou ineficientes no contexto em que está sendo utilizado.

A aprendizagem conceitual não ocorre da mesma formapara as crianças e para os adultos. No caso das crianças, a aprendizagem depende: do desenvolvimento cognitivo e das situações por meio das quais as crianças precisam se adaptar para chegarem a um objetivo pretendido. Para os adultos são os conhecimentos anteriores e os hábitos adquiridos ao longo da vida que influenciam na aprendizagem.

Um caminho para conhecer a forma adaptativa do conhecimento de um sujeito é o estudo das suas ações em diversas situações propostas. Se ele for capaz de buscar informações relevantes, ignorando aspectos secundários, pode-se afirmar que ocorreu aprendizagem.

As situações-problemas podem, segundo Vergnaud (1990, p. 2), pertencer a duas classes:

> I- classes de situações para as quais o sujeito dispõe em seu repertório, em um determinado momento de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, de competências necessárias para o tratamento relativamente imediato da situação;
>
> II- classes de situações para as quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e de exploração, de dúvidas e tentativas e o conduz eventualmente ao êxito, ou ao fracasso.

As resoluções de problemas da classe I requerem condutas automatizadas que são organizadas por um único esquema, para as da classe II são necessários vários esquemas, que podem entrar em competição e necessitarem de combinação, separação ou recombinação.

Durante a resolução de problemas da classe II, geralmente ocorrem descobertas por parte dos estudantes, daí a importância de se oportunizar, no ambiente escolar, diferentes situações que tratem de um mesmo conceito. São nos esquemas que devemos investigar os conhecimentos em ação do sujeito, por isso são essenciais para nortear as

[1] Organização invariante da conduta para uma classe de situações dadas (VERGNAUD, 1990, p. 2).

ações em praticamente todas as competências matemáticas. E as situações da classe II são frutíferas para investigar tais competências.

Vergnaud (1990) lembra que os estudantes diante da equação $ax + b = c$, sendo x a incógnita e a, b e c números reais dados, desenvolvem rapidamente o esquema de resolução para os casos em que $b < c$, mas apresentam dificuldades na resolução quando a, b, c ou $c – b$ são negativos.

Isto se dá porque alguns hábitos e ações, utilizadas no primeiro caso, se mantêm. Isto é, alguns estudantes acreditam que a igualdade fica inalterada se subtraírem pelo módulo de b ambos os lados, o que não é verdade para os casos em que a, b, c ou c – b não forem números naturais.

Cada situação ou classe de situações tem um simbolismo particular. É bastante comum encontrarmos situações em que os estudantes efetuam corretamente uma multiplicação de matrizes em um determinado problema e erram este mesmo procedimento em outros.

A maior causa destes erros e acertos é que a compreensão apresentada pelo estudante ainda não foi generalizada, ele pode ter compreendido somente uma situação e não uma classe de situações que envolvem tal conceito. Mas este cenário não é irreversível; as experiências com as quais o estudante têm contato devem possibilitar que um esquema ineficaz, utilizado em uma determinada classe de situações, seja modificado ou até mesmo substituído, conforme sua aplicabilidade e eficácia no novo cenário.

Diante disso, consideramos que a TCC ocupa um lugar de destaque no favorecimento da aprendizagem conceitual, pois por um lado pode auxiliar os professores a planejarem classes de situações que favoreçam o desenvolvimento cognitivo dos estudantes e, por outro, oferecer ferramentas que ajudam na compreensão do desenvolvimento e da organização conceitual.

A identificação dos invariantes operatórios, denominados “conceitos em ação” e “teoremas em ação”, é uma forma de detectar esquemas ineficazes e tentar auxiliar os estudantes na tarefa de transformar esquemas ineficazes em aplicáveis. Geralmente, os erros e as dúvidas, quando do desenvolvimento de conceitos matemáticos, são derivados da aplicação de esquemas, disponíveis no aparelho cognitivo dos estudantes, em situações que eles consideram semelhantes, quando, na verdade, tais compatibilidades são apenas ilusórias ou parciais.

As novas situações podem pertencer a uma classe mais ampla de situações do que aquelas em que o esquema aplicado era eficaz, o que exige do estudante transferências, generalizações e deslocamentos de esquemas que, em muitos casos, ele não esteja apto a realizar sem a mediação do professor ou de um colega mais experiente ou do contato com situações que lhe possibilite, em um longo período de tempo, a adaptação dos seus esquemas para a nova classe de situações.

Por isso, segundo Vergnaud (1990, p. 5), "o reconhecimento dos invariantes é a chave da generalização do esquema". Tal reconhecimento é favorecido por meio das diversas situações que envolvem o mesmo conceito, e pela análise das dificuldades manifestadas pelos estudantes durante a resolução dos problemas.

Os invariantes operatórios podem ser do tipo: proposição (teoremas em ação) ou função proposicional (conceitos em ação). Os primeiros são mais gerais e suscetíveis de serem verdadeiros ou falsos, enquanto os do segundo tipo são mais específicos e constituem as peças fundamentais para a constituição das proposições.

Se fizermos uma correspondência entre os conceitos em ação, os teoremas em ação e os conceitos e teoremas matemáticos, chegaremos à conclusão de que os últimos são apenas o ápice do *iceberg* da conceitualização, cuja base é formada pelos primeiros. Neste sentido:

> a operacionalidade de um conceito deve ser experimentada por meio de situações variadas, e o investigador deve analisar uma grande variedade de condutas e de esquemas para compreender sua consistência, do ponto de vista cognitivo (VERGNAUD, 1990, p. 7).

Qualquer estudo que pretenda compreender a aprendizagem conceitual deve levar em consideração estes três conjuntos de uma só vez, já que a construção de um conceito norteia-se nesta tríade e tanto as situações como os invariantes detectados em cada uma, dependem das formas de representação simbólicas do conceito (VERGNAUD, 1990).

O aprendizado de Matemática gira em torno do estabelecimento de classificações, da descrição de procedimentos, da formulação de teoremas em ação, da análise de estrutura e da função dos enunciados e representações simbólicas, de modo que tenham um sentido matemático, mas sem desconsiderar os aspectos psicológicos envolvidos em cada caso (VERGNAUD, 1990).

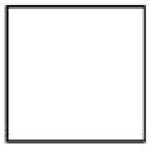
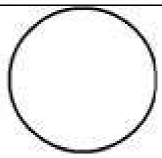
A TCC leva em consideração as características do aprendizado matemático. Para isso volta-se para a compreensão: das dificuldades cognitivas, dos obstáculos encontrados, dos procedimentos disponíveis e das representações possíveis em diferentes classes de situações. Com isso busca regularidades, formas de tratamento empregadas em diferentes classes de situações, erros cometidos, relações estabelecidas e etapas percorridas, visando em última instância propor estratégias para a aprendizagem conceitual que norteiem as atividades dos professores e dos estudantes.

A identificação dos invariantes mobilizados em uma classe de situações é fundamental para o aprendizado de conceitos matemáticos, uma vez que permite compreender as dificuldades dos estudantes: na interpretação dos enunciados das situações- problemas, na interpretação dos significantes e nas condutas e organização em situações com as quais são confrontados.

Em nosso trabalho, esta teoria auxiliará na identificação de invariantes operatórios equivocados apresentados por um grupo de estudantes em problemas que envolvem operações com matrizes. Nosso problema de estudo centra-se na hipótese de que os erros cometidos pelos estudantes durante a resolução de problemas podem estar diretamente relacionados com as dificuldades inerentes aos raciocínios que constituem os campos conceituais: aditivo e multiplicativo.

Uma das formas possíveis para análise do conhecimento matemático em ação é a explicitação dos cálculos relacionais envolvidos em cada um dos temas estudados. Para melhor visualização dos cálculos relacionais, Vergnaud (1990) propõe a organização destes utilizando a simbologia apresentada no Quadro 1.

Quadro 1 – Símbolos utilizados para a construção do esquema de um cálculo relacional para a aritmética.

Figura	Nome	Representa
	Quadrado	Uma medida, ou seja, um número natural.
	Círculo	Uma transformação ou uma relação, ou seja, um número relativo.
	Flecha horizontal	Uma transformação ou uma relação entre elementos de mesma natureza.

Fonte: Vergnaud (2009, p. 201).

No Quadro 1, é mostrada a representação que Vergnaud (2009) aplica a uma “medida” como um número natural; em nosso trabalho uma “medida” será uma matriz de números naturais.

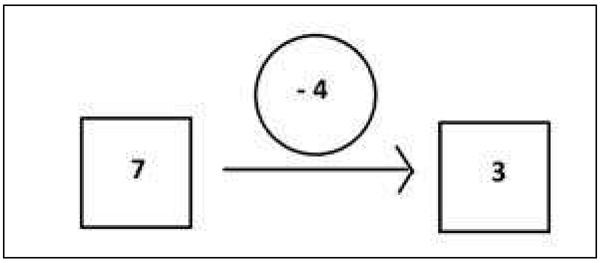
Nossa contribuição com a TCC

Daremos atenção a dois campos conceituais: o das estruturas aditivas, dentro do qual enfocaremos a classe de problemas que tratam da transformação quantificada de uma medida inicial em uma medida final; e o das estruturas multiplicativas, no qual trataremos da classe de problemas composta pelos problemas de multiplicação entre matrizes.

Partindo de problemas dessas duas classes, e considerando que para Vergnaud (2009) a forma com que as características de um conceito são apresentadas durante uma ação, é que servem para julgar se um indivíduo domina completamente as suas propriedades.

O vínculo entre a ação, durante a resolução de uma situação e o domínio de um conceito, pode ser entendido por meio das noções de conceito em ação e teorema em ação, já mencionadas. Apresentamos, a seguir, alguns enunciados de situações-problemas e seus respectivos cálculos relacionais. Por exemplo, o cálculo relacional envolvido na resolução de problemas aditivos do tipo: *“Paulo tem 7 bolinhas antes de* *jogar. Perdeu 4 bolinhas. Ele tem agora 3 bolinhas"* (VERGNAUD, 2009, p. 203) pode ser representado da seguinte forma:

Figura 1 – Cálculo relacionado do problema apresentado por Vergnaud



Fonte: Vergnaud (2009, p. 203).

Os números 7 e 3 são representados dentro de quadrados porque são números naturais, o – 4 é um número relativo e por isso é representado dentro de um círculo, que representa uma transformação aplicada ao número 7 para obter o resultado 3.

Consideramos uma matriz *m x n,* como uma dupla sequência de números reais, distribuídos em *m* linhas e *n* colunas, em que tanto o número de linhas quanto o número de colunas são maiores ou iguais a 1.

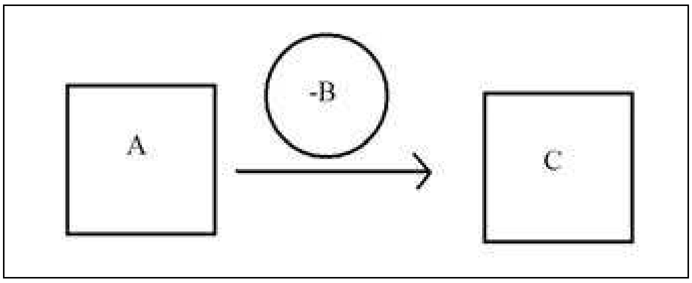
No caso da adição ou da subtração de matrizes, também podemos, a partir do cálculo relacional proposto por Vergnaud (2009), representar uma situação envolvendo a adição ou a subtração de matrizes.

Como exemplo, considere as matrizes de mesma ordem, $A = \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix}$e $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, se fizermos a operação *A* - *B*= *C,* em que cada elemento c_{ij} em *C*, é obtido pela operação $a_{ij} - b_{ij}$, em quea_{ij} é um elemento de *A* e b_{ij} um elemento de *B*.

Estendendo a ideia de Vergnaud (2009) também para uma soma ou subtração de matrizes[2], o cálculo relacional correspondente seria:

[2] Na realidade vale para quaisquer elementos de espaços vetoriais, inclusive o espaço de matrizes (de mesmo tipo).

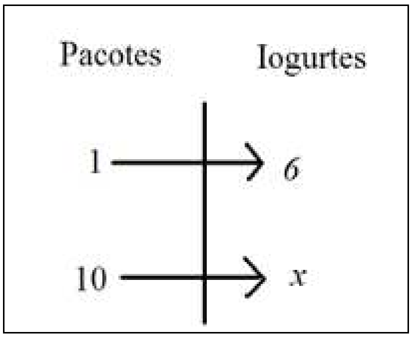
Figura 2 – Cálculo relacional de um problema aditivo com matrizes.



Isso pode ser feito porque as operações realizadas ao subtrairmos as matrizes *A* e *B*, cujos elementos são números naturais, nada mais são do que um conjunto de subtrações entre números naturais.

O mesmo pode ser feito para problemas que envolvem o campo conceitual multiplicativo, como por exemplo: *"Tenho 10 pacotes de iogurte. Há 6 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes eu tenho?"*. A representação algébrica desta situação seria $\frac{1}{10} = \frac{6}{x}$ e o esquema do cálculo relacional:

Figura 3 – Esquema de cálculo relacional de um problema multiplicativo.



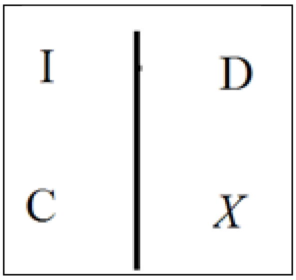
Fonte: Vergnaud (2009, p. 240).

Na Figura 3, o traço vertical significa uma relação quaternária[3], as flechas horizontais, assim como no caso dos problemas aditivos, representam uma transformação entre elementos de mesma natureza. Por exemplo, o número *1* está relacionado ao número *6,* o significado desta relação é que *um* pacote de iogurte contém *seis* iogurtes.

[3] Relação entre medidas de naturezas diferentes, que em alguns casos pode ser decomposta em duas relações binárias.

Generalizando este raciocínio para a multiplicação de matrizes[4], sejam as matrizes $C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ a matriz $X = C.D$, em que cada elemento $x_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$, também pode ser representada por meio do cálculo relacional:

Figura 4 – Cálculo relacional para um problema envolvendo multiplicação de matrizes.



Nesta representação, a barra vertical indica uma relação quaternária entre as matrizes *C* e D, a letra I representa a matriz identidade e a letra *X* a matriz *C.D*

Na TCC, as operações de pensamento necessárias para a resolução de determinadas situações-problema, ou seja, os cálculos relacionais desempenham papel central na compreensão da aprendizagem e na elaboração de estratégias de ensino. Neste sentido, tal teoria é uma importante aliada na compreensão de raciocínios complexos, em especial na adição e na multiplicação entre matrizes e pode nos auxiliar na compreensão das dificuldades apresentadas pelos estudantes, no seu percurso rumo à busca pela forma operatória destas operações.

O trabalho de Kato *et al*. (2013) mostrou que estudantes ingressantes em cursos de graduação em Ciências Exatas ainda apresentam dificuldades em alguns tipos de raciocínios do campo conceitual aditivo, que é pré-requisito para o raciocínio multiplicativo. Acreditamos que tais dificuldades possam interferir no rendimento dos estudantes em problemas que envolvem matrizes, daí a importância de identificarmos teoremas em ação dos campos conceituais, aditivo e multiplicativo, nas resoluções de problemas que envolvem matrizes.

[4] Consideraremos somente os casos em que a multiplicação de matrizes é possível de ser efetuada.

Metodologia

Nossa metodologia de pesquisa se aproxima de uma pesquisa-ação, que tem como principal característica utilizar dados empíricos como fundamento para uma prática guiada pela reflexão constante. Para Elliot (1991), pesquisas dessa natureza podem auxiliar na superação das distâncias entre a prática docente e a pesquisa em Educação.

Efetuamos nossa coleta de dados, durante 8 horas de um curso um curso regular de AL com 64h de duração, ministrado no segundo semestre de 2012. Participaram deste estudo um grupo de 11 estudantes, aqui denominados A01, A02, A03, A04, A05, A06, A07, A08, A09, A10 e A11. O critério para a escolha deste grupo foi ter participado de todas as atividades propostas durante o curso.

Os estudantes investigados cursavam o segundo semestre de um curso de graduação em Física, de uma universidade pública do interior do Estado do Paraná. Todos cursaram o Ensino Básico em escolas públicas e um deles cursava a disciplina de AL pela segunda vez.

O professor da disciplina, primeiro autor desse texto, desempenha simultaneamente as funções de professor e de pesquisador.

A coleta de dados foi feita por meio de vídeo gravações das aulas ministradas, diálogos com os estudantes durante a resolução de atividades em sala, individualmente ou em grupos e por meio de atividades manuscritas realizadas pelos estudantes.

O ambiente das aulas era parecido com aquele em que o professor utiliza o quadro branco para ministrar as suas aulas. Um diferencial foi que o professor gravava partes das aulas que julgava importantes, e no dia seguinte à aula, disponibilizava tais recortes, com duração de até 25 min. em um blog[5].

Os estudantes, que sentiam necessidade, podiam rever tais vídeos nos momentos de estudos: individuais ou em grupos, fora do horário de aula. Para Muniz (2009, p. 74):

> Quando um aluno resolve uma atividade, correta ou erroneamente, ele o faz por algo lhe indicar aquele caminho. Um dos pontos importantes para a compreensão das dificuldades de aprendizagem em torno de um certo conceito é, além de identificá-las, compreender quando e porquê são mobilizadas.

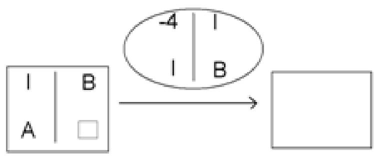
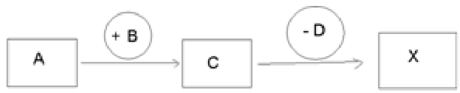
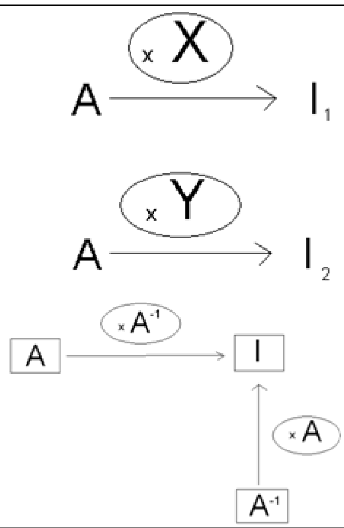
[5] www.v13dinei.blogspot.com

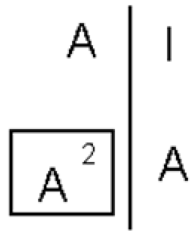
São estes os nossos anseios durante a análise das atividades do instrumento diagnóstico, e esperamos compreender e justificar as dificuldades de aprendizagem evidenciadas em nosso instrumento diagnóstico.

Análise dos dados

No Quadro 2, apresentamos os problemas utilizados no instrumento diagnóstico; os problemas P01, P02 e P03 foram aplicados quatro semanas após no início do curso de AL; o problema P04 foi aplicado quatro semanas após a primeira parte do teste diagnóstico.

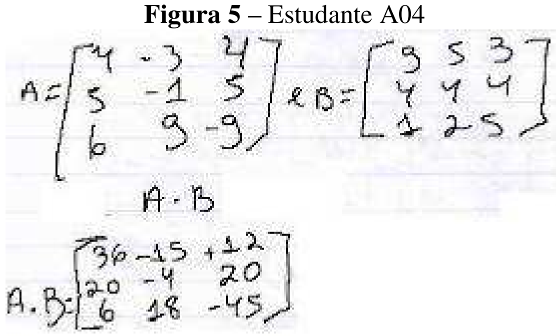
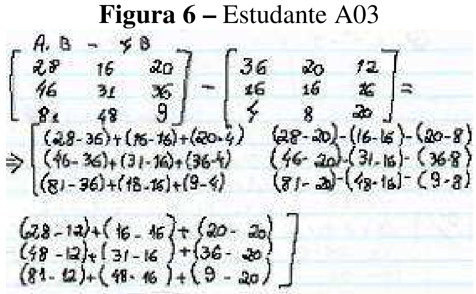
Quadro 2 – Problemas que envolvem os conceitos de operações com matrizes.

Problema	Cálculo Relacional	Esquema do Cálculo Relacional
P01: Dadas A = $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 5 & - & 5 \\ 6 & 9 & -9 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, calcule A.B – 4.B.	A matriz (A) multiplica a matriz (B) e deste resultado subtraímos o quádruplo da matriz B.	
P02: Obtenha X tal que: $X+\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$	Somamos duas matrizes A e B, $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ em seguida subtraímos desta soma, C, a matriz D, $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, o resultado é a matriz X.	
P03: Determine, caso exista, a inversa da matriz A abaixo: $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$	Multiplicar a matriz A pela matriz X, em seguida multiplicar a matriz Y pela matriz A. Verificar se em ambos os casos o resultado é a matriz identidade (I).	

P04: Sejam as matrizes A e B, dadas a seguir: $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ -2 & -1 & 2\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & 5 & 0\\ 2 & 4 & -2\end{bmatrix}$ Efetue as operações indicadas: a) A^2	Inicialmente, o estudante deverá multiplicar duas matrizes de ordem 3.Em seguida, deverá escrever $A^2 = A.A$.	

No Quadro 3 são apresentadas as dificuldades explicitadas por alguns estudantes durante a resolução do problema P01.

Quadro 3 – Invariantes operatórios inadequados detectados no problema P01.

Invariante	**Consequência**	**Cálculo relacional**
Multiplicaram-se as duas matrizes elemento a elemento.	Cada elemento da matriz AB foi obtido pelo produto $a_{ij} . b_{ij}$	**Figura 5** – Estudante A04 
Utilizar o mesmo processo utilizado na multiplicação de duas matrizes, substituindo o produto dos elementos correspondentes pela subtração.	Cada elemento da matriz resposta foi obtido pelo algoritmo $c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} . b_{kj}$	**Figura 6 –** Estudante A03 

Os estudantes A03 e A04 cometeram erros relacionados à incompreensão dos algoritmos envolvidos na adição e na multiplicação de matrizes. O estudante A03 efetuou corretamente a multiplicação de matrizes, que geralmente os estudantes apresentam maior dificuldade, mas acabou errando a subtração de matrizes, em que os estudantes não costumam apresentar dificuldades para efetuar.

Tal procedimento é explicado por Vergnaud (2007, p. 18) ao afirmar que durante a aprendizagem conceitual, as pessoas em um primeiro momento dominam a “forma predicativa" dos conceitos[6], não tendo ainda a capacidade de "formular completamente o que ele considera verdadeiro ou razoável".

O estudante A04 utilizou o algoritmo da adição para efetuar a multiplicação entre duas matrizes. Acreditamos que A03 e A04 possam ter cometido estes equívocos pelo fato de os procedimentos necessários para a utilização de cada um desses algoritmos serem distintos, tal diferença pode ter se tornado um obstáculo para a aprendizagem das operações envolvendo matrizes, e de acordo com Klausmeir e Goodwin (1977, p. 324):

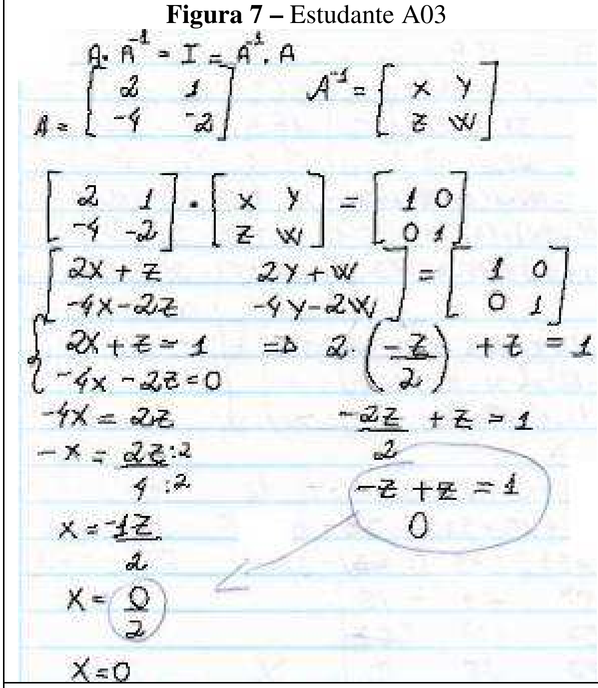
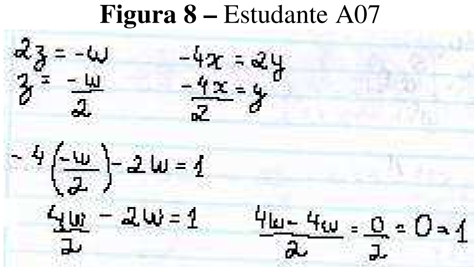
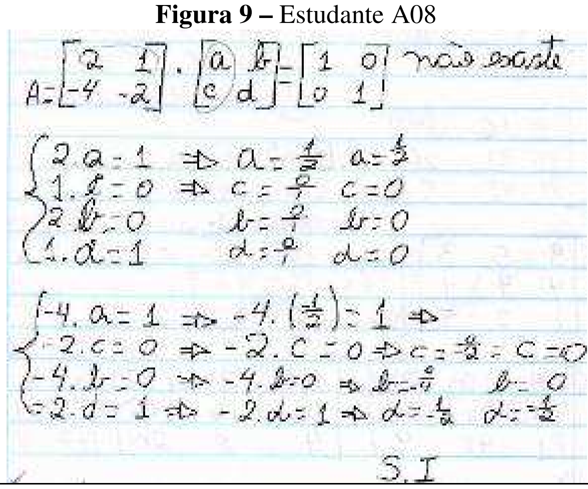
> para que um indivíduo forme um conceito em qualquer nível particular, este deve ser capaz de realizar todas as operações no nível anterior e naquele nível e deve, também, ter formado um conceito específico no nível precedente.

Diante disso, há indícios de que os estudantes ainda estavam construindo os conceitos de adição e multiplicação de matrizes, e se tivessem um tempo maior de estudos e o contato com situações-problemas distintas envolvendo tais operações as dificuldades poderiam ser superadas, já que de acordo com Vergnaud (1990) a construção de um conceito acontece durante um longo período de tempo.

No problema P02, por se tratar de um problema que envolve apenas adição e subtração de matrizes com uma coluna, nenhuma dificuldade foi detectada, todos os estudantes acertaram e utilizaram em suas resoluções o esquema de cálculo relacional indicado no Quadro 4.

[6] Forma de aprendizado de um conceito com aspecto local, na qual o sujeito ainda não abstraiu as características locais do conceito e não consegue aplicar tais propriedades em outras classes de situações.

Quadro 4 – Invariantes operatórios inadequados detectados no problema P03

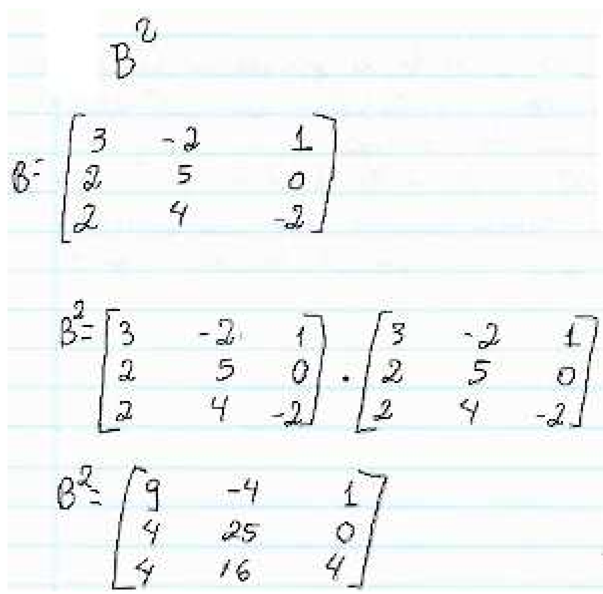
Invariante	Consequência	Cálculo Relacional
Considerar, a priori, que a matriz dada é inversível.	Atribuiu o valor 0 para a variável *z*, afirmando que se “$-z + z = 0$” então $z = 0$. Errando os cálculos seguintes e considerando que a inversa de uma matriz pode ser a matriz nula.	**Figura 7 –** Estudante A03  **Figura 8 –** Estudante A07 
Utilizar outro algoritmo para o produto de duas matrizes para a determinação da inversa.	Obtiveram deste algoritmo as seguintes igualdades: $\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -4a & -4b \\ -2c & -2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. O que resultou numa incongruência, justificando que a inversa não existe.	**Figura 9 –** Estudante A08 

Quatro estudantes não obtiveram êxito na resolução do problema P03 e destacam o procedimento de A03, no tratamento algébrico da operação “$- z + z = 1$”, em que concluíram corretamente que “$- z + z = 0$”, mas não souberam lidar com a igualdade “$0 = 1$”, e o procedimento de A07. Os estudantes pararam de resolver o exercício quando chegaram à sentença *0=1*.Em ambos os casos os estudantes cometeram os erros por suporem de antemão que dada uma matriz A, esta matriz será inversível.

Acreditamos que isso seja proveniente do pouco contato com situações que envolvam contradições, durante a sua vida escolar. Como os estudantes não estão acostumados a tratar um problema que apresente uma contradição, o recurso neste caso foi "pensar" que estava desenvolvendo a situação de forma errônea, o que fez com que desistissem de buscar a solução para o problema, com fez A07, ou atribuísse de forma forçada um valor para a variável z, como ocaso de A03.

Por fim, o estudante A08 cometeu um erro diretamente relacionado com os conhecimentos necessários para multiplicar duas matrizes. Por não dominar o algoritmo da multiplicação de matrizes, cometeu equívocos na parte inicial do problema, o que inviabilizou a sua resolução.

Quadro 5 – Invariantes detectados no problema P04

Invariante	**Consequência**	**Cálculo Relacional**
Considerar que elevar uma matriz A² é equivalente a elevar cada elemento de A².	Representam corretamente a expressão de B^2, ou seja, B.B, no entanto ignoram o produto da matriz B por ela mesma.	**Figura 10 –** Estudante A05 

Quatro estudantes (A02, A05, A06 e A08) cometeram o mesmo equívoco no problema P04, errando uma multiplicação entre duas matrizes. Nos problemas P01, P02 e P03, três desses estudantes (A02, A05 e A06) pareciam ter compreendido os procedimentos necessários para a realização da multiplicação entre duas matrizes, por isso acreditamos que eles saberiam efetuar esta multiplicação se as matrizes fossem diferentes uma da outra, mas erraram o problema ao se “esquecerem” que a potência B^2 é equivalente à multiplicação $B.B$. O trabalho de Feltes (2007), com estudantes dos Ensinos Fundamental e Médio, quando efetuavam operações com números reais, aponta que é grande o número de erros, em atividades matemáticas, envolvendo a potenciação.

Tais dificuldades podem se estender até as operações que envolvem matrizes, e notamos que o fato de os estudantes ainda não terem tornado operatórios os conhecimentos sobre multiplicação de matrizes contribuiu para que tratassem a potência de matrizes da mesma forma que tratam a potência dos elementos de cada uma dessas matrizes.

Vergnaud (1990, p. 2) afirma que “a confiabilidade do esquema para o sujeito repousa sobre o conhecimento que tem, explícito ou implícito, das relações entre o algoritmo e as características do problema a resolver”, isto é, se o sujeito sente-se seguro em utilizar determinados procedimentos em uma classe de situações, geralmente se for confrontado com uma nova classe de situações, a tendência é aplicar os procedimentos que utilizava na classe anterior e que acredita serem pertinentes também para a nova classe de situações propostas.

Considerações finais

Nas palavras de Moreira (2012, p. 15), a “aprendizagem é uma atividade idiossincrática que pode não ser consequência necessária do ensino recebido”, no entanto, os procedimentos utilizados, pelos estudantes, para resolver um problema podem fornecer indicativos da ocorrência desse processo de aprendizagem e, para tanto, estes devem ser considerados nas situações de ensino.

Sob essas considerações, este estudo buscou identificar a ocorrência de invariantes operatórios inadequados, apresentados pelos estudantes, na resolução de problemas que envolvem operações com matrizes, tendo como subsídio os vídeos com recortes das aulas presenciais de AL.

Quanto aos invariantes inadequados detectados, identificamos que estes têm suas origens, principalmente, nas estruturas aditivas e multiplicativas com números inteiros. Nesse sentido, este estudo não apenas identifica os invariantes operatórios presentes nas operações que envolvem matrizes, mas também busca ampliar nossa compreensão acerca das dificuldades dos estudantes nas disciplinas de Ciências Exatas, e assim subsidiar os professores quanto aos possíveis encaminhamentos didáticos e metodológicos que favoreçam o processo cognitivo da aprendizagem.

Neste cenário, destacamos que a TCC é uma poderosa ferramenta de suporte aos professores, na elaboração de tarefas escolares que oportunizem tanto a identificação quanto a superação das dificuldades envolvidas no processo de elaboração da forma operatória de um conceito.

Como afirma Vergnaud (2007), o caminho para a aprendizagem conceitual operatória passa pela compreensão dos aspectos locais, sem a devida abstração das propriedades e características globais do conceito.

Esta pesquisa fornece dois elementos principais acerca de tais aspectos locais envolvidos na álgebra matricial, a saber: a permanência de invariantes operatórios inadequados relacionados às estruturas aditiva e multiplicativa e a confusão entre os objetos matemáticos, matriz e número.

Quanto ao primeiro aspecto, destacamos que esses invariantes operatórios inadequados foram recorrentes em alguns estudantes pelo fato de, ao estudarem AL, aterem-se apenas aos procedimentos numéricos, às fórmulas e aos procedimentos mecânicos e não à compreensão dos conceitos abstratos e ideias gerais dos conceitos estudados.

Sobre a confusão entre os objetos matemáticos matriz e número, observamos que alguns estudantes trataram situações que envolvem matrizes como se estivessem operando com números reais, generalizando, apressadamente, propriedades válidas apenas para os números reais também para as matrizes, o que pode indicar que esses dois conceitos não são diferenciados por esses estudantes.

Tais estudantes poderiam superar as dificuldades se tivessem mais tempo para interagirem com problemas aditivos e multiplicativos que envolvem matrizes, já que Vergnaud (1990) afirma que a aprendizagem conceitual operatória necessita de um longo período de tempo. No entanto, um curso de um semestre letivo não fornece tempo suficiente para que alguns estudantes compreendam algumas classes de problemas de forma operatória.

Uma das formas de contornar este problema é a valorização da experiência dos professores, na sua área de atuação, que lhes permite auxiliar os estudantes na compreensão de conceitos matemáticos. Bransford *et al.* (2000) afirmam que os especialistas em determinadas áreas percebem, com mais facilidade do que os iniciantes, características e padrões significativos dentro de suas áreas de atuação.

A identificação desses invariantes permite-nos inferir sobre possíveis atuações do professor na condução de aulas explicativas sobre operações com matrizes. Seriam a gravação e a disponibilização de pequenos vídeos contendo, principalmente, a resolução de exercícios, realizados durante a aula, pelo professor em conjunto com a turma, que a nosso ver, pode favorecer o aprendizado configurando-se com um importante material de pesquisa, para os momentos de estudos individuais ou em grupos.

A importância de se detectar invariantes operatórios reside no fato de estas estruturas de pensamento nortearem a ação dos sujeitos frente às situações-problemas que extrapolam os conteúdos de álgebra matricial, atingindo outras esferas do conhecimento. Em geral, pode-se inferir que se um estudante não é bem sucedido em AL, também não terá sucesso em disciplinas como Cálculo ou Geometria Analítica.

Cury e Bisognin (2009) defendem que não basta detectar os erros cometidos em cada disciplina, o importante é investigar as suas causas e buscar estratégias de ensino que auxiliem os estudantes a superarem as dificuldades apresentadas.

Sabemos que a tarefa não é fácil, porém acreditamos que podemos elaborar situações escolares que favoreçam o desenvolvimento de tais estruturas, visando à aprendizagem conceitual ao conhecer as estruturas de controle presentes nas ações do sujeito, frente às situações propostas em uma determinada disciplina, isto é, os invariantes operatórios que estão por trás da ação dos estudantes.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes).

Referências

BRANSFORD, J. D. *et al. How people learn: brain, mind, experience, and school*. Washington: National academy press, 2000.

BOLDRINI, J. L. *et al*. *Álgebra Linear*. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

CELESTINO, M. R. *Ensino e aprendizagem de álgebra linear*: as pesquisas brasileiras na década de 90. Dissertação (mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: 2000. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/marcos_roberto_celestino.pdf>. Acesso em 16 abr. 2013.

CURY, H. N.; BISOGNIN, E. Análise de soluções de um problema representado por um sistema de equações. *BOLEMA*. Ano 22, n. 33, p. 1-22. Rio Claro: 2009. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2951>. Acesso em 16 abr. 2013.

ELLIOTT, J. *Action research for educational change*. Philadelphia: Open University Press, 1991.

FELTES, R. Z. *Análise de erros em potenciação e radiciação: um estudo com alunos de ensino fundamental e médio*. Dissertação (mestrado). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre: 2007. Disponível em: <http://tede.pucrs.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=490>. Acesso em: 16 abr. 2013.

FURTADO, A. L. C.; CABRAL, M. A. P. *Aprendizagem de conceitos de Álgebra Linear*. XIII CIAEM – Conferência Interamericano de Educação Matemática. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2011. Disponível em: <http://www.sigma.ufrj.br/UFRJ/SIGMA/producoes/consulta/relatorio.stm?app=PRODUCOES&id_producao=384923&buscas_cruzadas=ON>. Acesso em: 16 abr. 2013.

GRANDE, A. L.; BIANCHINI, B. L. Alguns resultados da análise dos livros didáticos de Álgebra Linear quanto aos registros de representação semiótica e as noções de independência linear. *EBRAPEM - Encontro Brasileiro de Estudantes em Educação Matemática*. Belo Horizonte, Universidade Federal de Minas Gerais, 2006. Disponível em: <http://www.fae.ufmg.br/ebrapem/resumos/10-04res.pdf>. Acesso em: 16 abr. 2013.

KATO, L. A. *et al*. Estratégias de resolução em problemas do Campo Conceitual Aditivo: um estudo com alunos ingressantes nos Cursos de Ciências Exatas. *Boletim GEPEM*/Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática. Vol. 62. Rio de Janeiro: 2013. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=article&op=view&path%5B%5D=1085>. Acesso em 20 abr. 2013.

KLAUSMEIER, H. J.; GOODWIN, W. *Manual de Psicologia Educacional: aprendizagem e capacidades humanas*. (Tradução de Abreu, M. C. T. A.). São Paulo: Harper & Row, 1977.

LESSA, M. M. L.; FALCÃO, J. T. da R. Pensamento e Linguagem: uma discussão no campo da psicologia da educação matemática. *Psicologia: Reflexão e Crítica*. v. 18, p. 315-322. Recife: 2005.

LIPSCHUTZ, S. *Álgebra Linear*. 3ª ed., Coleção Schaum. Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 1994.

LÜDKE, M. O professor, seu saber e sua pesquisa. *Educação e Sociedade*, ano XXII, nº 74. Abril. Campinas: 2001. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/es/v22n74/a06v2274.pdf>. Acesso em 19 abr. 2013.

MACHADO, S. D. A.; BIANCHINI, B. L. A álgebra linear e a concepção de transformação linear construída por estudantes de EAD. *Revemat – Revista Eletrônica de Educação Matemática*. v. 7, n. 2, p. 69-89. Florianópolis: 2012. Disponível em: <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p69>. Acesso em: 19 abr. 2013.

MEIRA, L. *Análise microgenética e videografia: ferramentas de pesquisa em posicologia cognitiva*. Recife: editora UFPE,1994.

MOLINA, J. G.; OKTAÇ, A. Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa*. v. 10, n. 2, p. 241-273. Cidade do México: 2006. Disponível em: <http://scielo.unam.mx/pdf/relime/v10n2/v10n2a4.pdf>. Acesso em: 19 abr. 2013.

MOREIRA, M. A. *Metodologias de pesquisa em ensino*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012.

MUNIZ, C. A. O conceito de "esquema" para um novo olhar para a produção matemática na escola: as contribuições da teoria dos campos conceituais. In: *Aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais*. Marilena Bittar, Cristiano Alberto Muniz (organizadores). 1 ed. Curitiba: CRV, 2009.

SANCHES, M. H. F. *Efeitos de uma estratégia diferenciada do ensino dos conceitos de matrizes*. Dissertação (mestrado). Universidade Estadual de Campinas. Campinas: 2002.

STEINBRUCH, A.;WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 1987.

VERGNAUD, G. *La théorie des champs conceptuels*. Récherches en Didactique des Mathématiques, 10 (23): 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. A *Criança, a Matemática e a Realidade*: Problemas do Ensino da Matemática na Escolar Elementar. Tradução de Maria Lucia Faria Moro; Revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Editora da UFPR, 2009.