

# Relato de Experiência

## Trajетórias de Ensino e Aprendizagem na Formação Inicial de Professores de Matemática



Magna Natália Marin Pires<sup>1</sup>  
Gabriel dos Santos e Silva<sup>2</sup>

### Resumo

O objetivo deste artigo é apresentar uma discussão, à luz da Educação Matemática Realística, dos aspectos considerados por futuros professores na elaboração de uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem, no âmbito de uma disciplina de Prática e Metodologia do Ensino de Matemática. Para tanto, apresentamos algumas ideias gerais da Educação Matemática Realística e das Trajetórias de Ensino e Aprendizagem. Em seguida, discutimos alguns trechos, evidenciando aspectos considerados pelos futuros professores que se relacionam a conhecimentos a respeito da prática pedagógica do professor que ensina Matemática.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Educação Matemática Realística. Trajetórias de Ensino e Aprendizagem. Prática como Componente Curricular.

### Introdução

Em 2009, o Conselho de Ensino, Pesquisa e Extensão da Universidade Estadual de Londrina aprovou o Projeto Pedagógico do Curso de Matemática (Licenciatura) da Universidade Estadual de Londrina<sup>3</sup> (CEPE/Uel, 2009), considerando, dentre outras, a Resolução do Conselho Nacional de Educação nº 2 de 2002 que estabelece “400 (quatrocentas) horas de prática como componente curricular, vivenciadas ao longo do curso” (CNE, 2002, p. 1).

As 405 horas previstas pelo Projeto Pedagógico em tela estão divididas entre nove disciplinas do curso, a saber: Didática da Matemática, Tópicos de Educação Matemática I, Tópicos de Educação Matemática II, Educação Matemática e Tecnologia de Ensino, Prática e Metodologia do Ensino de Matemática I, Prática e Metodologia do Ensino de Matemática II, História da Matemática, Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática e Seminários de Matemática e Educação Matemática.

<sup>1</sup>Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática; Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, Paraná, Brasil. E-mail: [magna@uel.br](mailto:magna@uel.br).

<sup>2</sup>Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática; Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Paraná, Brasil. E-mail: [gabriel.santos22@gmail.com](mailto:gabriel.santos22@gmail.com)

<sup>3</sup>A partir daqui, utilizaremos o termo “Projeto Pedagógico” (com iniciais maiúsculas) para referirmo-nos ao Projeto Pedagógico do Curso de Matemática da Universidade Estadual de Londrina.

## TRAJETÓRIAS DE ENSINO E APRENDIZAGEM NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Além da carga horária descrita, a prática como componente curricular também está presente nas disciplinas Prática e Metodologia do Ensino da Matemática I: Estágio Supervisionado e Prática e Metodologia do Ensino da Matemática II: Estágio Supervisionado. Na figura 1 apresentamos as ementas dessas disciplinas.

**2EST314 Prática e Metodologia do Ensino de Matemática I: Estágio Supervisionado**  
Concepções do processo ensino-aprendizagem em matemática. O compromisso social do professor de Matemática. A Matemática no Ensino Fundamental. A resolução de problemas no currículo e na sala de aula do Ensino Fundamental. Atividades de investigação no currículo e na sala de aula do Ensino Fundamental. Avaliação de aprendizagem escolar de Matemática. Estágio supervisionado.

**2EST315 Prática e Metodologia do Ensino de Matemática II: Estágio Supervisionado**  
Concepções do processo ensino-aprendizagem. A Matemática no Ensino Médio. O compromisso social do professor de Matemática. A Matemática no Ensino Fundamental. A resolução de problemas no currículo e na sala de aula do Ensino Médio. Atividades de investigação no currículo e na sala de aula do Ensino Médio. Estágio supervisionado.

**Figura 1** – ementas das disciplinas de Prática e Metodologia do Ensino de Matemática I: Estágio Supervisionado e Prática e Metodologia do Ensino de Matemática II: Estágio Supervisionado.  
**Fonte:** CEPE (2009, p. 21 e 22)

Essas disciplinas visam proporcionar aos estudantes contato com a prática profissional, que não ocorre apenas por meio da observação, mas, também,

por meio das tecnologias de informação [...], de narrativas orais e escritas de professores, de produções de estudantes, de situações simuladas e estudos de casos; a prática e o estágio devem ser vivenciadas ao longo de todo o curso de formação e com tempo suficiente para abordar as diferentes dimensões da atuação profissional (CEPE, 2009, §5º, p. 5).

Membros do GEPEMA (Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação da Universidade Estadual de Londrina) têm elaborado Trajetórias de Ensino e Aprendizagem (TEA)<sup>4</sup> e trabalhado com o processo de elaboração de trajetórias com estudantes da licenciatura e com professores em formação continuada. Essa prática tem possibilitado a discussão de conteúdos de matemática da Educação Básica e das estratégias de encaminhamentos destes conteúdos.

No âmbito da disciplina 2EST314 (disciplina de responsabilidade da primeira autora deste artigo), os futuros professores desenvolveram trajetórias a partir de tarefas de matemática. Neste artigo, apresentaremos uma discussão, à luz da Educação Matemática Realística, dos aspectos considerados pelos futuros professores na elaboração de uma das trajetórias.

<sup>4</sup>A partir daqui utilizaremos o termo “trajetórias” para referirmo-nos às Trajetórias de Ensino e Aprendizagem.

## 2 Trajetórias de Ensino e Aprendizagem

Na Educação Matemática Realística (RME<sup>5</sup>), abordagem para o ensino de matemática, entende-se que aprender matemática se dá pelo fazer, uma vez que ela é entendida como uma atividade humana (FREUDENTHAL, 1991). Fazer matemática, para os autores, refere-se ao processo de matematização, ação de organizar fenômenos realísticos, e lidar com eles, por meio de estratégias com características de:

- **generalidade:** generalizar (procurando analogias, classificação, estruturação);
- **certeza:** refletir, justificar, provar (usando uma abordagem sistemática, elaborando e testando conjecturas, etc.);
- **exatidão:** modelar, simbolizar, definir (limitar interpretações e validar); e
- **brevidade:** simbolizar e esquematizar (desenvolver procedimentos padrão e notações) (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000, p. 781, tradução nossa, grifos do autor).

Para organizar fenômenos, e lidar com eles, os estudantes, a princípio, valem-se de suas próprias estratégias, ainda que não tão formais do ponto de vista do conhecimento matemático. Cabe ao professor, então, orientar os estudantes, levando-os à reflexão em relação às suas estratégias, a fim de que se tornem formais (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2003). Desse modo, entende-se que os estudantes passam por um processo de reinvenção de conteúdos de matemática por meio da orientação do professor, conhecido na RME como **reinvenção guiada** (FREUDENTHAL, 1991).

Os contextos, nesse processo, exercem um importante papel, uma vez que, alguns, oportunizam aos estudantes matematização, reinvenção guiada, enquanto são usados apenas para fazer com que problemas se pareçam com situações do “mundo real”<sup>6</sup> (DE LANGE, 1999).

A fim de preparar suas aulas, o professor pode elaborar Trajetórias de Ensino e Aprendizagem (FREUDENTHAL, 1991; GRAVEMEIJER e DOORMAN, 1999; PIRES e BURIASCO, 2012; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2003) com vistas a organizar e estudar contextos profícuos à matematização, organizar e preparar ações que possibilitem a reinvenção de conteúdos de matemática, descrever ações a partir de possíveis estratégias informais que os estudantes podem utilizar (SILVA, 2015).

São componentes de uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem:

- uma **trajetória de aprendizagem**, que dá uma ideia geral do processo de aprendizagem dos estudantes;

<sup>5</sup>*Realistic Mathematics Education.*

<sup>6</sup>Na Educação Matemática Realística, o termo “realidade” refere-se ao que é considerado comumente como real, ao que pode ser imaginado, à própria matemática.

TRAJETÓRIAS DE ENSINO E APRENDIZAGEM NA FORMAÇÃO  
INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

- uma **trajetória de ensino**, composta por indicações didáticas que descrevem como o ensino pode mais efetivamente articular-se com e estimular o processo de aprendizagem;
- um **esquema dos conteúdos**, indicando quais os elementos do currículo matemático que podem ser ensinados (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, p. 18, tradução nossa, grifos nossos).

Esses componentes, que não devem ser vistos como partes isoladas de uma TEA, são descritos pelo professor, podendo tomar como base: (i) a História da Matemática, em uma perspectiva defendida pela RME, em que os caminhos de aprendizagem da humanidade podem fornecer indícios dos caminhos de aprendizagem dos estudantes e dos obstáculos que os estudantes podem encontrar na reinvenção de conteúdos de matemática; (ii) suas experiências com as tarefas utilizadas na trajetória ou com os conteúdos que podem ser suscitados na aula; (iii) o estudo de fenômenos que podem ser organizados por meio dos conteúdos que o professor pretende trabalhar (SILVA, 2015).

Por fim, ressalta-se que as Trajetórias de Ensino e Aprendizagem não são descrições rígidas dos procedimentos a serem adotados pelo professor, nem devem ser seguidas como “receitas”, uma vez que os estudantes podem utilizar estratégias que o professor não havia previsto, dando margem à possibilidade de reinvenção de outros conteúdos que o professor não havia descrito em sua TEA.

### 3 A respeito do contexto da pesquisa

As informações utilizadas para este artigo são provenientes da disciplina “Prática e Metodologia do Ensino de Matemática I: Estágio Supervisionado” sob responsabilidade da Prof<sup>a</sup> Dra. Magna Natália Marin Pires. No ano de 2015, estavam matriculados 18 alunos do 3º ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina, os quais serão denominados, neste trabalho, de futuros professores.

Esses futuros professores participaram da elaboração de Trajetórias de Ensino e Aprendizagem a partir de temáticas da Educação Básica, conforme prevê a ementa da disciplina. O episódio relatado neste artigo corresponde a uma dessas elaborações, que aconteceu em oito aulas de 50min cada (dois dias de quatro aulas), a partir do “problema do pastor”, que foi entregue aos estudantes para ser resolvido.

Havia um pastor que não sabia contar até 10, e tinha a seu cargo um rebanho numeroso. Para saber se não lhe faltava nenhuma ovelha, tentou um sistema que punha em prática todos os dias ao cair da tarde. Agrupava-as de duas em duas, de três em três, de quatro em quatro, de cinco em cinco e de seis em seis. Em todos os casos lhe sobrava uma ovelha. Então verificou que agrupando-as de sete em sete, todos os grupos teriam o mesmo número de ovelhas. De quantas ovelhas era o seu rebanho?

Os futuros professores, em grupos, resolveram o problema e apresentaram as suas resoluções. Conduzidos pela professora, as diferentes estratégias foram expostas no quadro e discutidas pela turma. Ao final da discussão, foi feita a sistematização dos conteúdos abordados nas resoluções apresentadas. Dentre esses conteúdos, podemos destacar: múltiplos e divisores (mínimo múltiplo comum), regras de divisibilidades, potenciação.

Na aula seguinte, foi proposto que os futuros professores, em grupos de três, compusessem uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem utilizando o mesmo problema, de acordo com as orientações a respeito de trajetórias dadas anteriormente.

Das seis trajetórias elaboradas, utilizamos a trajetória dos estudantes Brunna Leonardi Caciolato, Fernando Henrique Maximo Leandro e Gabriel Marçal Nacour para análise. Fizemos inferências a respeito de aspectos da Educação Matemática Realística considerados por esses três futuros professores a partir de trechos selecionados da TEA.

#### 4 Aspectos considerados pelos futuros professores na elaboração da TEA.

Na sequência apresentamos e discutimos trechos<sup>7</sup> da trajetória construída por três futuros professores da turma.

*O professor apresenta o problema para os alunos<sup>8</sup> e, depois, começam as perguntas dos alunos.*

*A<sub>1</sub>. Professor, como que eu posso resolver esse problema?*

*P. Leia com atenção observando os dados e o que o problema pede.*

*A<sub>1</sub>. Ok, professor.*

*Após alguns instantes.*

*A<sub>1</sub>. Professor, o problema pede pra descobrir o número de ovelhas, sabendo que, quando elas são separadas em grupos de 2, 3, 4, 5 e 6 sobra uma ovelha, mas quando separadas em grupos de 7 não sobra nenhuma ovelha.*

No primeiro trecho, os futuros professores levantam a possibilidade de os alunos lerem o problema e, logo, já recorrerem ao professor. Nesses casos, consideram que é importante que o professor não responda de imediato a pergunta, apontando os caminhos que os alunos devem seguir, mas incentive-os a interpretar o problema.

Em seguida, na trajetória, os futuros professores apresentam estratégias que resolvem o problema, simulando um diálogo entre professor e grupos de alunos. Nesse diálogo, o primeiro grupo resolveu o problema por meio do produto entre os números 2, 3, 4, 5 e 6, somando 1 ao resultado final. Esse procedimento de resolução se dá em meio a um diálogo entre professor e alunos.

Um segundo grupo resolve a questão por meio das potências de 7; ao encontrarem

<sup>7</sup>Para apresentar trechos da Trajetória de Ensino e Aprendizagem, utilizaremos texto em itálico com espaçamento simples. Como a trajetória construída pelos estudantes contém diálogos hipotéticos, indicaremos as falas do professor por “P” e dos alunos por “A<sub>n</sub>”.

<sup>8</sup>O termo “alunos” ou “estudantes” serão utilizados para referirmo-nos aos alunos hipotéticos criados na trajetória.

**TRAJETÓRIAS DE ENSINO E APRENDIZAGEM NA FORMAÇÃO  
INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

algumas das potências de 7, testaram as divisões por 2, 3, 4, 5 e 6 a fim de determinar qual potência de 7 satisfaz o problema. Nesse trecho da trajetória, destaca-se a intervenção do professor por meio de questionamentos. Podemos inferir que os futuros professores consideram importante a necessidade da intervenção do professor por meio de questionamentos que orientam os estudantes em seus processos de aprendizagem.

Ameron (2012) considera que a interação que se dá entre estudantes mutuamente e com o professor é que implementa a reinvenção de conteúdos matemáticos. Essa interação pode se dar por meio da comunicação (oral, escrita) da atividade matemática, por meio de questionamentos e intervenções feitos pelo professor e por outros estudantes, pela justificação de estratégias, pela análise da produção escrita.

[...]

P. *Que operação te lembra “agrupar as ovelhas de sete em sete”?*

A<sub>2</sub>. *A divisão, professor.*

P. *O que você conclui com isso?*

A<sub>2</sub>. *Que o total de ovelhas é divisível por sete.*

P. *Como você encontraria números divisíveis por sete?*

A<sub>2</sub>. *Na tabuada.*

P. *Qual outra maneira, além da multiplicação?*

A<sub>2</sub>. *Não sei.*

P. *Pense novamente.*

A<sub>2</sub>. *Podemos usar potência de base sete?*

P. *Por que você acha isso?*

A<sub>2</sub>. *Porque os resultados serão sempre divisíveis por sete.*

P. *Agora sabemos que todo resultado da potência de base sete, será divisível por sete, qual a outra regra que devemos respeitar?*

A<sub>2</sub>. *O resultado da potência deverá ser dividido por números de 2, 3, 4, 5 e 6 e ter resto 1.*

P. *Como você sugere encontrar o número de ovelhas então?*

A<sub>2</sub>. *Vou tentando dividir todos os resultados da potência por 2,3,4,5 e 6 até encontrar o resultado esperado. [...]*

Handwritten division problems showing 49 divided by 2, 3, 4, and 5. The results are 24 with remainder 1, 16 with remainder 1, 12 with remainder 1, and 9 with remainder 4.

[...]

Handwritten division problems showing 243 divided by 2, 3, 4, and 5. The results are 121 with remainder 1, 81 with remainder 0, 60 with remainder 3, and 48 with remainder 3.

[...]

**TRAJETÓRIAS DE ENSINO E APRENDIZAGEM NA FORMAÇÃO  
INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

- P. E o próximo qual é?  
 A<sub>2</sub>.  $7^4 = 2401$   
 P. E agora, respeita as regras?  
 A<sub>2</sub>. Vamos verificar:

Handwritten long division problems showing 2401 divided by 2, 3, 4, 5, and 6. Each division shows a remainder of 1.

- A<sub>2</sub>. Todos dão resto 1, e como tínhamos falado anteriormente, o resultado da potência é um múltiplo de 7, logo, respeita sim todas as regras.

No trecho supracitado destacam-se, também, as perguntas feitas pelo professor. Em questões, como “como você sugere encontrar o número de ovelhas então?”, os futuros professores apresentam indícios de que reconhecem a necessidade de que os estudantes estejam conscientes dos procedimentos que estão utilizando para resolver o problema. Doorman (2002) afirma que o professor deve ter cuidado no processo de reinvenção guiada para que a orientação não seja tal que os estudantes não tenham consciência do que estão fazendo. Retomar a discussão a fim de que os estudantes façam um fechamento de suas conclusões é um aspecto valorizado pelos autores da Educação Matemática Realística e, infere-se que é, também, pelos futuros professores.

A seguir apresentamos um trecho que contém a terceira estratégia apresentada.

- A<sub>2</sub>. Conheço a regra de divisibilidade por 5, e como eu quero sempre resto um, então o número terá que terminar em 6 ou 1. Porém, se terminar em 6, contradiz a do 2, que também terá que sobrar 1. Logo consigo definir que o número terminará em 1.  
 P. E o que mais você percebe com isso?  
 A<sub>2</sub>. Tenho que ver, 7 vezes quanto terá 1 na casa da unidade.  
 P. Qual é esse valor?  
 A<sub>2</sub>. 3, pois 7 vezes 3 é igual a 21, acho que agora posso definir outra regra, assim:

Handwritten multiplication problem:  $13 \times 7 = 91$ .

- A<sub>2</sub>. Vamos fixar o 3 na casa da unidade e ir alterando o valor da dezena, multiplicando por sete. Vamos multiplicar primeiro  $13 \times 7 = 91$ , já sei que a regra vale para 2 e 5, falta apenas conferir os demais.

Handwritten multiplication problems showing 13 multiplied by 7, 91 multiplied by 3, 91 multiplied by 4, and 91 multiplied by 6.

**TRAJETÓRIAS DE ENSINO E APRENDIZAGEM NA FORMAÇÃO  
INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

---

- P. Certo, e aí? Qual a conclusão?  
 A<sub>2</sub>. Vale para o 3 e 6, só não vale pro 4, agora tentarei  $7 \times 23 = 161$ .

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 7 \\ \hline 161 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 161 \overline{) 3} \\ \underline{15} \phantom{0} \\ 11 \phantom{0} \\ \underline{-9} \phantom{0} \\ 2 \phantom{0} \end{array}$$

- A<sub>2</sub>. Já percebi que não valera para o 3, então nem verificarei o restante. [...]

É possível identificar, na estratégia acima (conduzida pelo professor) indícios de matematização, uma vez que criam conjecturas, testam-nas e buscam validar seus procedimentos sistemáticos de resolução. Entende-se, então, que os futuros professores consideram que o encaminhamento das orientações pode se dar no sentido de oportunizar a matematização.

### Algumas considerações

Este artigo teve como objetivo apresentar uma discussão, à luz da Educação Matemática Realística, dos aspectos considerados pelos futuros professores na elaboração de Trajetória de Ensino e Aprendizagem.

Dos trechos selecionados da trajetória, reconhecemos que os futuros professores consideram a importância: de incentivar os estudantes a interpretar o problema, não respondendo de imediato suas perguntas; de que os estudantes estejam conscientes dos procedimentos que estão utilizando para resolver o problema; da necessidade da intervenção do professor por meio de questionamentos que orientam os estudantes em seus processos de aprendizagem; de oportunizar matematização por meio das orientações. Tais considerações revelam mobilização de conhecimentos relacionados à prática pedagógica do professor que ensina Matemática, relacionados a situações simuladas, como propõe o Projeto Pedagógico do curso de Matemática (Licenciatura) da UEL (CEPE, 2009), indicando que a elaboração de Trajetórias de Ensino e Aprendizagem pode ser uma oportunidade profícua para a formação de professores, na perspectiva da prática como componente curricular.



**Referências Bibliográficas**

AMERON, Barbara Ann van. **Reinvention of early algebra**: developmental research on the transition from arithmetic to algebra [S.l.]: [s.n.] - Tekst. - Proefschrift Universiteit Utrecht, 2002.

CONSELHO DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA. Reformula o Projeto Pedagógico do Curso de Matemática – Habilitação: Licenciatura, a ser implantado a partir do ano letivo de 2010. Resolução CEPE n. 230, de 2009.

CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO. Institui a duração e a carga horária dos cursos de licenciatura, de graduação plena, de formação de professores da Educação Básica em nível superior. Resolução CNE/CP n. 2, de 19 de fevereiro de 2002.

FREUDENTHAL, Hans. **Revisiting Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GRAVEMEIJER, Koeno; TERWEL, Jan. Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. **Journal of Curriculum Studies**, v. 32, n. 6, p. 777- 796, nov-dez. 2000.

PIRES Magna Natalia Marin e BURIASCO, Regina L. Cório de. **Prova em fases: instrumento para aprender**. Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil, 2012.

SILVA, Gabriel dos Santos e. **Uma configuração da reinvenção guiada**. 2015. 94f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. **Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9**. Utrecht: Utrecht University, 2000. CD-ROM.

\_\_\_\_\_. The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. **Educational Studies in Mathematics**, v. 54, n. 1, p. 09-35, nov. 2003.



**Veja mais em [www.sbem.org.br](http://www.sbem.org.br)**