SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i4.80

EXPLORANDO LAS NOCIONES PROBABILÍSTICAS INFORMALES EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN BÁSICA

EXPLORING INFORMAL PROBABILISTIC NOTIONS IN PRIMARY EDUCATION STUDENTS

Hugo Alvarado Martínez
alvaradomartinez@ucsc.cl
Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile

Sergio Tapia Muñoz
sergiotapia@institutoclaret.cl
Instituto Claret, Temuco, Chile

María Lidia Retamal Pérez
lretamal@ucsc.cl
Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile

Liliana Tauber
estadisticamatematicafhuc@gmail.com
Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina

RESUMEN

En este trabajo se analizan las intuiciones y heurísticas sobre la probabilidad en 331 estudiantes de primaria (12-13 años) por medio de un cuestionario de seis ítems cerrados, y se examinan las argumentaciones en dos ítems abiertos. Los resultados muestran una alta variación en la intuición probabilística en situaciones aleatorias y la existencia de razonamientos acerca de nociones informales de probabilidad bajo una condición. Se considera pertinente para la enseñanza en este nivel educativo favorecer un acercamiento a la comprensión con distintas situaciones de incertidumbre mediante la profundización de los significados intuitivo y clásico de la probabilidad.

PALABRAS CLAVE:
Probabilidad, Incertidumbre, Intuición, Educación básica.

ABSTRACT

This paper analyzes the intuitions and heuristics about probability in 331 primary school students (12-13 years old), by means of a questionnaire of six closed items and examines the arguments in two open items. The results show a high variation in probabilistic intuition in random situations and the existence of reasoning about informal notions of probability under a condition. It is considered that, at this educational level, it is relevant to favor an approach to understanding with different situations of uncertainty by deepening the intuitive and classical meanings of probability.

KEYWORDS:
Probability, Uncertainty, Intuition, Primary education.

Recibido: 28 de Mayo de 2021, Aceptado: 24 de Junio de 2021

1. Introducción

Un currículo que considera el desarrollo de las intuiciones probabilísticas desde los primeros años, permite enfrentar las dificultades en el aprendizaje de la Estadística y Probabilidad y progresar en el razonamiento formal probabilístico, especialmente confrontando las ideas informales y creencias que tienen los estudiantes sobre las probabilidades (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). La enseñanza de la probabilidad en la etapa escolar generalmente no se atiene a las ideas informales y creencias que tienen los alumnos sobre las probabilidades (Kahneman y Tversky, 1972). Más aún, aunque utilizamos nociones probabilísticas informales a diario para tomar decisiones, la investigación sobre probabilidad se ha centrado principalmente en los significados clásico y frecuentista (Alvarado et al., 2018).

Una dimensión de indagación en educación estadística es estudiar las dificultades de comprensión en el razonamiento probabilístico; en particular, investigar cómo las personas hacen juicios y toman decisiones cuando se enfrentan a situaciones de incertidumbre (Garfield y Ben-Zvi, 2008). Se concuerda con Sharma (2014) en que los entornos sociales y la cultura común pueden influir en las ideas informales de probabilidad, y en la necesidad de confrontar las creencias cotidianas intuitivas con los conceptos probabilísticos. Esta confrontación permitiría aclarar los objetivos, el propósito y las limitaciones de la enseñanza de la probabilidad.

Las investigaciones proponen dar oportunidades a los estudiantes de variadas experiencias de situaciones probabilísticas asociadas a los diversos significados de la probabilidad (Batanero et al., 2005). Así, es posible mencionar los estudios relacionados con la enseñanza de la probabilidad mediante paradojas (Batanero et al., 2012; Contreras et al., 2014), probabilidad condicional (Batanero et al., 2014), significados de la probabilidad (English y Watson, 2016; Gómez et al., 2015; Sanabria y Núñez, 2017; Sharma, 2014) y significado de la probabilidad intuitiva (Alvarado et al., 2018; Fulmer, 2014; Gómez et al., 2014).

Teniendo en cuenta estos fundamentos, el presente trabajo analiza las intuiciones y heurísticas sobre la probabilidad que atribuye un grupo de estudiantes de básica (12 y 13 años) en situaciones de incertidumbre, analizando las respuestas entregadas a un cuestionario de seis ítems y las soluciones de dos ítems abiertos. Las interrogantes que rigen este estudio son: ¿Cómo los estudiantes de educación básica responden a situaciones aleatorias que involucran razonamiento heurístico? y ¿Qué argumentos utilizan los estudiantes respecto a nociones de probabilidad clásica?

2. Marco de referencia

2.1 Razonamiento probabilístico

Fischbein (1987) califica como un serio error no considerar la confianza que tienen los estudiantes en sus intuiciones, sugiriendo que hay que tomar conciencia de que se poseen intuiciones correctas y útiles, y que debemos lograr ser capaces de controlar nuestras intuiciones de forma de llegar a comprender (asimilar) de manera adecuada las estructuras formales propias del razonamiento lógico. Fischbein y Schnarch (1997) sugerían que en el aprendizaje de la probabilidad los estudiantes debían crear nuevas intuiciones, y la enseñanza debía proveer de experiencias en que los estudiantes confrontasen sus esquemas intuitivos primarios y las causas de los conflictos y errores en los tipos de razonamiento específicos a las situaciones probabilísticas.

Nisbett y Ross (1980) señalan que es posible adquirir un correcto razonamiento estadístico intuitivo sobre conceptos abstractos, tales como la Ley de los grandes números, y aplicarlo para resolver problemas cotidianos, siempre que reconozcamos la situación como aleatoria. Kahneman et al. (1982) afirman que las heurísticas y sesgos son resistentes a la enseñanza e incluso se observa en sujetos con alta preparación matemática. Estos autores describen los sesgos de razonamiento que ocurren como resultado de un proceso cognitivo, como la heurística, que lleva a una solución inmediata del problema, pero no garantiza que la solución sea correcta, bien por usar un modelo inapropiado de la situación o por falta de estructuras cognitivas específicas. Una heurística puede entenderse como la estrategia utilizada por las personas al emitir un juicio, realizar una estimación, tomar una decisión, entre otras acciones, para descomplejizar un problema, pero basándose en información limitada. Así, a través de heurísticas, las personas reducen la complejidad de calcular probabilidades y predecir valores, pero al no contar con toda la información requerida se producen sesgos de razonamiento en el juicio o decisión que se adopta.

La heurística de la representatividad, como regla intuitiva e informal, permite, a partir de lo que ya se conoce, inferir sobre un suceso, e incluye juzgar la posibilidad de los resultados. En este sentido, un resultado es más probable si su estructura es más similar a la de la asumida por el modelo subyacente. Kahneman y Tversky (1982) indican que, si un suceso es altamente representativo de cierta categoría, se juzga como alta la probabilidad de que el suceso tenga su origen en esa categoría. Sin embargo, su aplicación conduce en muchos casos a inferencias razonables, pues puede aumentar la probabilidad de cometer sesgos debido a que el hecho de que algo sea más representativo no lo hace más probable. En el presente estudio se pretende analizar esta heurística (ítems 1, 2 y 3) con estudiantes de educación básica.

2.2 Significados de la probabilidad

Gómez et al. (2015) indican que la probabilidad, desde su emergencia, ha estado sujeta a diferentes interpretaciones y debates filosóficos que todavía continúan y se relacionan con la concepción y definición del azar en diferentes periodos históricos (Batanero, 2005, 2016; Batanero y Díaz, 2007; Borovcnik y Kapadia, 2014). Batanero (2005) realizó una caracterización de los diferentes significados de la probabilidad y cómo han sido tenidos en cuenta en la enseñanza secundaria. Analiza los diferentes elementos de campos de problemas, procedimientos, lenguaje, propiedades y conceptos relacionados con los cinco significados de la probabilidad. A saber, significado de la probabilidad intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático. Este estudio aborda principalmente el significado intuitivo y clásico.

> *a) Significado intuitivo de la probabilidad*: Las ideas intuitivas de probabilidad, como grados de creencia personal, es común encontrarlas al enfrentarse en diversos juegos de azar y también expresadas en noticias y en anuncios publicitarios a través de los medios de comunicación. Batanero (2005) indica que las ideas intuitivas sobre el azar aparecen tanto en niños como en personas que no han estudiado probabilidades, quienes usan frases y expresiones coloquiales como posible, previsible y presumible, para "cuantificar" sucesos inciertos y expresar su grado de creencia en ellos.
>
> b) *Significado clásico de la probabilidad:* Está ligado a la regla de Laplace, donde la probabilidad de un suceso es el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles (considerados equiprobables). A pesar de su limitación a experimentos aleatorios con un número finito de posibilidades, este significado ha primado en la escuela durante muchos años en los juegos de azar.

Este trabajo aporta a las investigaciones anteriores (Rodríguez et al., 2018; Tauber y Olesker, 2014; Vásquez y Alsina, 2017) enfocándose en el significado intuitivo (ítems 1, 2, 3 y 6) que apenas ha sido considerado en la enseñanza de la probabilidad de la educación básica, en el significado clásico (ítems 4, 5 y 7) y en la idea informal de probabilidad compuesta (ítem 8). A continuación, se describe la metodología y los resultados obtenidos.

3. Metodología

El procedimiento para llevar a efecto esta investigación considera un estudio descriptivo con el propósito de explorar las nociones probabilísticas informales, para dar respuestas a las interrogantes: ¿Cómo los estudiantes de educación básica responden a situaciones aleatorias que involucran razonamiento heurístico? y ¿Qué argumentos utilizan los estudiantes respecto a nociones de probabilidad clásica? A continuación, se mencionan los participantes, el instrumento utilizado, así como las respuestas esperadas a los ítems propuestos.

3.1 Participantes

Participaron de la investigación 331 estudiantes de segundo ciclo escolar de básica (ver Tabla 1) provenientes de un establecimiento educacional particular gratuito de una región del sur de Chile. De los 331 estudiantes, de edades entre 12-13 años, 172 (51,2%) son mujeres. Los estudiantes completaron el cuestionario con lápiz y papel en una sesión de dos horas pedagógicas (total 90 minutos) en la asignatura de Matemática. Cabe señalar que los estudiantes de este nivel han realizado conjeturas acerca de la tendencia de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento con dados, monedas u otros, y explican las probabilidades de eventos obtenidos por medio de experimentos de manera manual, estimándolas de manera intuitiva, utilizando frecuencias relativas y relacionándolas con razones, fracciones o porcentaje.

Tabla 1. Número de estudiantes según nivel educativo

Nota. Elaboración propia.

Nivel	**Número de estudiantes (%)**
Séptimo	156 (47,1%)
Octavo	175 (52,9%)

3.2 Instrumento

Se construyó un cuestionario con ocho ítems, seis de ellos cerrados y dos abiertos. Los ítems evaluaban intuiciones, heurísticas y conocimientos básicos de probabilidad en estudiantes de educación básica. Los ítems 1, 2 y 3 del cuestionario presentan heurísticas de representatividad y fueron adaptados de los problemas de Kahneman y Tversky (1972) y Tversky y Kahneman (1974). El ítem 6 es una adaptación del problema de Gardner (1959) y hace mención a la confusión de probabilidades del producto y condicional. En este ítem se les propuso a los participantes evaluar en escala ordinal de 10 en 10 para estimar su grado de creencia sobre probabilidades, dentro de un rango del 0 al 100. El ítem 4 aplica la regla de Laplace en extracciones sin reemplazo y el ítem 5 estudia la regla de Laplace al aumentar el número de repeticiones. El ítem 7 fue seleccionado de Vásquez y Alsina (2017), donde compara extracciones de bolitas por la regla de Laplace. El ítem 8 se refiere a la aplicación de la regla del producto y fue elaborado por los autores.

Un cuestionario más amplio, que incluye estos ítems, fue evaluado por cuatro especialistas de estadística y didáctica de la estadística y aplicado a estudiantes de otros niveles educativos (Alvarado et al., 2018). Cabe señalar que este estudio pretende explorar las intuiciones probabilísticas y aplicación de la probabilidad clásica de los estudiantes de nivel escolar sobre estos ítems, dado que posteriormente, en el nivel medio-superior, son formalizadas sus soluciones.

En la Tabla 2 se describen los ocho ítems de cuestionario aplicado y su objetivo de evaluación, presentando situaciones referidas a nociones probabilísticas informales con ítems de selección múltiple y la estimación de probabilidad en escala ordinal con apreciación de 0 a 100 (ítem 6).

Tabla 2 . Descripción de los ítems de razonamiento y conocimientos de probabilidad en el cuestionario

Nota. Elaboración propia.

Ítem	**Razonamiento emergente**
1. Si de una tómbola con pelotas enumeradas del 1 al 5 se sacan cinco pelotas con reposición, ¿qué es más probable que ocurra? a) Que salga el número 22222. b) Que salga el número 12345. c) Que salga el número 25314. d) Todas son igualmente probables.	Falacia del jugador.
2. Se lanza una moneda 8 veces, obteniendo en orden los siguientes resultados: cara, sello, cara, sello, sello, sello, sello, sello. Si se lanza la moneda por novena vez, ¿qué es más probable que pase? a) Es más probable que salga cara, puesto que han salido demasiados sellos y ya es hora de que salga cara. b) Es más probable que salga sello, puesto que ha salido sello en cinco lanzamientos sucesivos. c) Es igual de probable que salga cara o sello.	Heurística de representatividad. Independencia de eventos.
3. Eduardo desde pequeño mostró gran afición por el arte. Entró a estudiar a la universidad donde se destacó por su talento por la escritura y fotografía, transformándose en el mejor de su carrera. En la última década recorrió el mundo fotografiando y ayudando en los diversos desastres naturales. ¿Cuál de estos sucesos tiene más probabilidad de ser cierto? a) Eduardo trabaja en un diario. b) Eduardo trabaja en un diario y es voluntario de bomberos. c) Ambos sucesos son igualmente probables.	Heurística de representatividad.
4. En una bolsa se ponen 4 bolas rojas, 4 azules y 2 verdes, y después se mezclan. Se sacan 3 bolas fuera, resultando 2 rojas y 1 azul. A continuación, se saca otra bola sin echar las anteriores. ¿De qué color es más probable que sea? a) El rojo tiene mayor probabilidad. b) El azul tiene mayor probabilidad. c) El verde tiene mayor probabilidad.wd) Todos los colores tienen la misma probabilidad.	Razonamiento proporcional. Regla de Laplace.
5. Cindy y Trudy juegan tirando un dado normal. Si sale un 5 gana Cindy y si sale menos de 3 gana Trudy. ¿Cuántas veces habrá ganado cada uno, aproximadamente, después de tirar el dado 60 veces? a) Trudy y Cindy ganan el mismo número de veces. b) Cindy gana el doble de veces que Trudy. c) Trudy gana el doble de veces que Cindy. d) Cindy gana 17 veces más que Trudy. e) Trudy gana 17 veces más que Cindy.	Razonamiento proporcional. Regla de Laplace.
6. Si se lanza una moneda tres veces, ¿qué tan probable es obtener sello en el tercer lanzamiento si se sabe que los dos primeros lanzamientos fueron cara? Asignar valores de posibilidad de 0 a 100.	Independencia de eventos. Probabilidad bajo condición.

<table>
<tr><td>7. Resuelva. Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continúa. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya.
a) El juego es justo.
b) Luis tiene más ventaja.
c) Eduardo tiene más ventaja.</td><td>Razonamiento proporcional. Regla de Laplace.</td></tr>
<tr><td>8. Resuelva. Se muestran los resultados de una encuesta realizada a 60 personas sobre la preferencia de mermeladas, clasificadas en no dietética y dietética. Al seleccionar a uno de estos encuestados al azar, la probabilidad de que sea hombre y prefiera mermelada no dietética es:
<table>
<tr><th></th><th>Mermelada no dietética</th><th>Mermelada dietética</th></tr>
<tr><td>Mujer</td><td>6</td><td>24</td></tr>
<tr><td>Hombre</td><td>18</td><td>12</td></tr>
</table>
a) 18/24
b) 18/30
c) 18/60
d) 30/60 × 24/60
e) 1/18</td><td>Regla del producto.</td></tr>
</table>

3.3 Respuestas esperadas a los ítems cerrados

El enunciado del ítem 1, asociado a los juegos de azar, es conocido como la falacia del jugador o falacia de Montecarlo. Esto es, al ser una falacia lógica, se cree incorrectamente que los sucesos ya ocurridos afectan a los que podrían ocurrir. La respuesta correcta es la opción (d), debido a que la probabilidad de la secuencia 22222 es de un 0,032%, la probabilidad de la secuencia 12345 es de un 0,032% y la probabilidad de la secuencia 25314 es de un 0,032%, por lo tanto, todas las opciones tienen la misma posibilidad de ocurrencia. Tversky y Kahneman (1974, p. 1125) han indagado este tipo de preguntas, llegando a la conclusión de “que los individuos consideran que un suceso aleatorio tiene menos posibilidad de ocurrir porque ha ocurrido durante cierto periodo”, en este caso el valor 2 de la secuencia.

El ítem 2 requiere identificar la presencia de un evento independiente, debido a que solamente se trabajará con una sola moneda. Así, los eventos resultantes pueden ser cara (C) o sello (S), teniendo cada una ½ de probabilidad de ocurrir. Al ser solo una moneda, los resultados anteriores no tienen incidencia en el próximo lanzamiento, ya que la posibilidad de ocurrencia no se altera ni varía. Por lo tanto, la respuesta correcta corresponde a la alternativa (c). Situaciones de este tipo han sido estudiadas por Serrano et al. (1998) y Tauber y Olesker (2014). En sus investigaciones sobre posibilidad de ocurrencia de 5 monedas con 5 opciones dirigido a estudiantes de educación media, evalúan si los estudiantes usan la heurística de la representatividad en sus juicios sobre la probabilidad de obtener diferentes secuencias en el lanzamiento de una moneda.

El ítem 3 es una adaptación de Tversky y Kahneman (1974). Hay que tener en cuenta las probabilidades de dos situaciones: a) “Eduardo trabaja en un diario” b) Eduardo trabaja en un diario y es voluntario de bomberos”; para que las ocurrencias de dos sucesos sean simultáneas, deben ser menor o igual que la probabilidad de ocurrencia de cada uno. La solución a este problema es la alternativa (a) en donde $P(A \cap B) \leq P(A)$ y $P(A \cap B) \leq P(B)$. Tversky y Kahneman (1974) señalan que la mayoría de quienes responden esta problemática utilizan la heurística de representatividad en este tipo de pregunta, dejando de lado las propiedades de la probabilidad.

El ítem 4 es un problema de asignación de probabilidades en extracción sin reemplazo. La solución requiere de razonamiento proporcional, al comparar tres posibles sucesos que no son de igual probabilidad con extracciones sin reemplazo, lo que modifica la composición de la urna y el espacio muestral. En este caso es importante el suceso previo y su dependencia en el siguiente suceso. La respuesta correcta es (b).

El ítem 5 tiene como respuesta correcta la alternativa (c). Un dado normal tiene 6 caras y la probabilidad de que salga 5 es de 1/6 por parte de Cindy. Al ser 60 lanzamientos, se debe multiplicar 1/6 por 60, dando como producto 10. En el caso de Trudy, gana cuando el dado es menor que 3 (1 ó 2), en donde la probabilidad de obtener esos números es 2/6; al ser lanzado 60 veces, se debe multiplicar 2/6 por 60, lo que da como resultado 20.

En el ítem 6 hay que tener presente que el resultado (cara o sello) es independiente, ya que solo se trabaja con una moneda, por lo que la probabilidad de que sea sello es de ½; aunque los lanzamientos anteriores sean cara, la probabilidad de ocurrencia sigue siendo la misma.

En el ítem 7, aunque Eduardo tiene menor cantidad de bolas blancas en comparación con las negras, la probabilidad de extraer una de color blanco es de 1/3, ya que son 10 blancas dentro de un total de 30. Las opciones que tiene Luis de sacar la bola blanca son de 30 dentro de un total de 90; aunque tiene más bolas blancas, la probabilidad de extracción, al igual que Eduardo, corresponde a 1/3, lo que conlleva a que el juego sea justo (respuesta correcta (a)). Este ítem corresponde a un estudio de Vásquez y Alsina (2017), en el que analizaron los resultados con profesores que enseñan Matemática.

En el ítem 8 los estudiantes deben aplicar los conocimientos relacionados con la probabilidad del producto o regla de la multiplicación, en este caso que sea hombre (30) y que prefiera la mermelada no dietética (18). La solución correcta, alternativa (c), tiene por probabilidad 18/60.

4. Resultados

4.1 Resultados de los ítems cerrados 1 al 6 según asignaciones de probabilidad intuitiva y clásica

A continuación, se realiza un análisis descriptivo de los ítems que involucra razonamiento de la heurística de representatividad (ítems 1, 2, 3 y 6), conocimiento de la probabilidad clásica (ítems 4, 5 y 7) y conocimiento de la regla del producto (ítem 8), respondidos por 331 estudiantes de educación básica.

Ítem 1. Si de una tómbola con pelotas enumeradas del 1 al 5 se sacan cinco pelotas con reposición, ¿qué es más probable que ocurra?
a) Que salga el número 22222.
b) Que salga el número 12345.
c) Que salga el número 25314.
d) Todas son igualmente probables.

En la Figura 1 se puede apreciar que 69,7% de los estudiantes seleccionan la alternativa (d), que corresponde a la respuesta correcta, mientras que 27,3% de los participantes optan por las alternativas (a), (b) y (c). Las investigaciones de Tversky y Kahneman (1974) indican como error frecuente que los estudiantes crean que los sucesos pasados pueden afectar en los que ya vienen en lo relativo a actividades aleatorias, suponiendo más probable que salgan números en orden aleatorio (alternativa c) que números ordenados o repetidos (alternativas a y b).

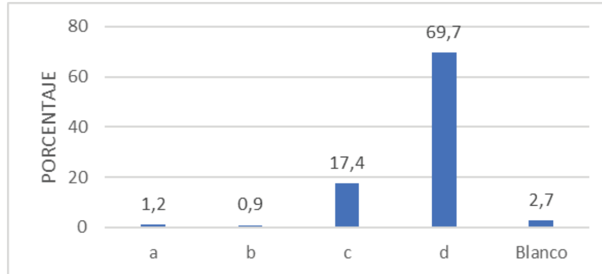

Figura 1. Porcentaje de respuestas al ítem 1, n = 331 (respuesta esperada d). Nota. Elaboración propia.

Ítem 2. Se lanza una moneda 8 veces, obteniendo en orden los siguientes resultados: cara, sello, cara, sello, sello, sello, sello, sello. Si se lanza la moneda por novena vez, ¿qué es más probable que pase?

a) Es más probable que salga cara, puesto que han salido demasiados sellos y ya es hora de que salga cara.

b) Es más probable que salga sello, puesto que ha salido sello en cinco lanzamientos sucesivos.

c) Es igual de probable que salga cara o sello.

En la Figura 2 se observa que 77,9% de los estudiantes seleccionaron la alternativa correcta (c), señalando que existe la misma probabilidad de que salga cara o sello, sin considerar los resultados de los lanzamientos anteriores. Además, es posible visualizar que el 20,9% de los estudiantes cree que sí inciden los sucesos anteriores en el noveno lanzamiento (alternativas a y b), situación similar a la presentada en el ítem 1. Si se comparan estos resultados con los obtenidos en la investigación de Vásquez y Alsina (2017), en los que un 36,6% de los profesores de educación básica en ejercicio que enseñan Matemática dieron una respuesta correcta, se verá que en este estudio se obtuvieron mejores resultados.

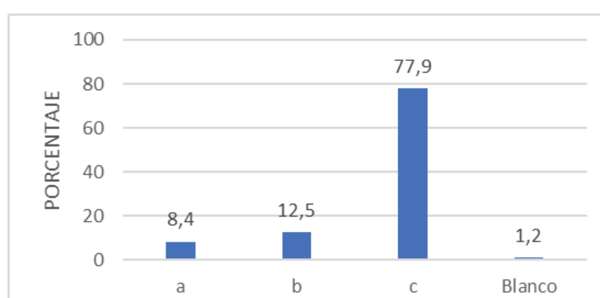

Figura 2. Porcentaje de respuestas al ítem 2, n = 331 (respuesta esperada c). Nota. Elaboración propia.

Ítem 3. Eduardo desde pequeño mostró gran afición por el arte. Entró a estudiar a la universidad donde se destacó por su talento por la escritura y fotografía, transformándose en el mejor de su carrera. En la última década recorrió el mundo fotografiando y ayudando en los diversos desastres naturales. ¿Cuál de estos sucesos tiene más probabilidad de ser cierto?

a) Eduardo trabaja en un diario.
b) Eduardo trabaja en un diario y es voluntario de bomberos.
c) Ambos sucesos son igualmente probables.

En la Figura 3 es posible observar que el 35,3% de los estudiantes ha seleccionado la alternativa (a), el 23,9% considera correcta la alternativa (b) y el 39,9% cree correcta la alternativa (c). Estos resultados discrepan de los obtenidos por Tversky y Kahneman (1974), encontrando que la mayoría de los encuestados escoge la alternativa (b) influenciándose por la heurística de la representatividad en este tipo de preguntas, dejando de lado las propiedades de la probabilidad.

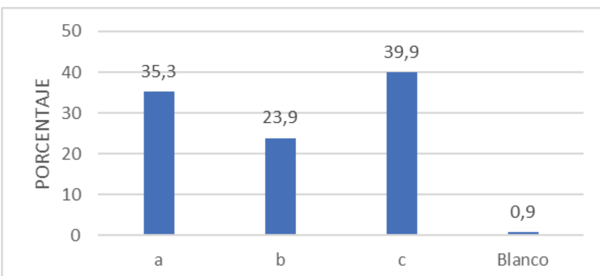

Figura 3. Porcentaje de respuestas al ítem 3, n = 331 (respuesta esperada a). Nota. Elaboración propia.

Ítem 4. En una bolsa se ponen 4 bolas rojas, 4 azules y 2 verdes, y después se mezclan. Se sacan 3 bolas fuera, resultando 2 rojas y 1 azul. A continuación, se saca otra bola sin echar las anteriores. ¿De qué color es más probable que sea?

a) El rojo tiene mayor probabilidad.
b) El azul tiene mayor probabilidad.
c) El verde tiene mayor probabilidad.
d) Todos los colores tienen la misma probabilidad.

En la Figura 4 se aprecia que 52,5% de los estudiantes señalaron que la bola de color azul tiene mayor probabilidad de salir en una segunda extracción sin reemplazo (opción b correcta), resultados similares a los obtenidos por Cañizares (1997) en donde un 50% de los futuros profesores de Matemática testeados respondió correctamente. Los distractores en el problema de razonamiento proporcional asignando probabilidades en extracciones sin reemplazo provocó que 26,1% de los alumnos escogiera la alternativa (d), ya que es la opción de equiprobabilidad, entendiendo así que al ser bastante baja la diferencia de las bolas de los distintos colores que hay dentro de la urna, no existe mayor influencia al haber mayor o menor probabilidad de extraer una de las bolas. En otro caso con profesores de Matemática, 91,5% respondió correctamente (Bastías, 2017), teniendo así una diferencia considerable respecto de los resultados de este estudio.

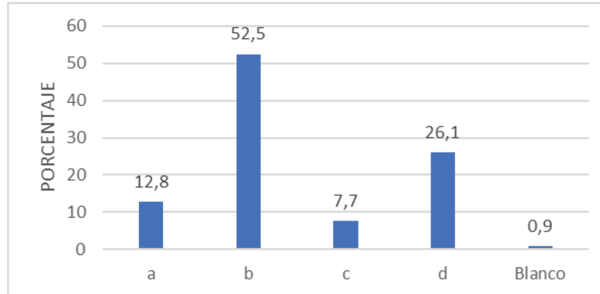

Figura 4. Porcentaje de respuestas al ítem 4, n = 331 (respuesta esperada b). Nota. Elaboración propia.

Ítem 5. Cindy y Trudy juegan tirando un dado normal. Si sale un 5 gana Cindy y si sale menos de 3 gana Trudy. ¿Cuántas veces habrá ganado cada uno, aproximadamente, después de tirar el dado 60 veces?

a) Trudy y Cindy ganan el mismo número de veces.
b) Cindy gana el doble de veces que Trudy.
c) Trudy gana el doble de veces que Cindy.
d) Cindy gana 17 veces más que Trudy.
e) Trudy gana 17 veces más que Cindy.

En la Figura 5 se puede observar que 36,8% de los estudiantes señala correctamente que Trudy gana el doble de veces que Cindy (alternativa c). Los distractores fueron similares en porcentaje de respuestas, 18,2% de los estudiantes indicaron la alternativa (a), que Trudy y Cindy ganan el mismo número de veces, seguido de 17,7% que seleccionaron que Trudy gana 17 veces más que Cindy (alternativa e). Los resultados de Bastías (2017) fueron mejores con profesores de Matemática, alcanzando 79,9% de respuestas correctas, lo que permite dilucidar que tener la formación matemática otorga el uso de propiedades tales como la regla de Laplace y la esperanza matemática.

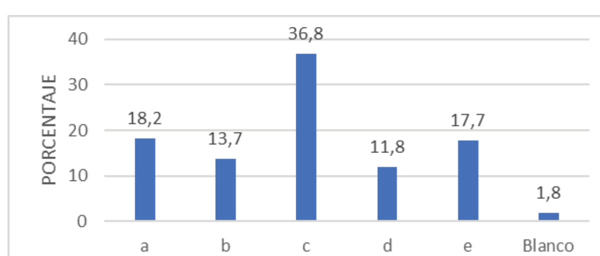

Figura 5. Porcentaje de respuestas al ítem 5, n = 331 (respuesta esperada c). Nota. Elaboración propia.

Ítem 6. Si se lanza una moneda tres veces, ¿qué tan probable es obtener sello en el tercer lanzamiento si se sabe que los dos primeros lanzamientos fueron cara?

En la Figura 6 se puede apreciar que 49,2% de los estudiantes asignó un valor de 50 de probabilidad de obtener sello en el tercer lanzamiento, respuesta que es correcta, debido a que las opciones que se presentan son independientes entre sí (cara y sello). Además, un 33,6% otorgó un valor inferior a 50, destacando que 12% declaró valores entre 10 y 20 de probabilidad de ocurrencia, y que puede ser explicado al pensar el suceso CCS como uno de los ocho sucesos del espacio muestral sin atender a la condicionalidad del problema. Estos resultados se condicen con la experiencia similar en niños de 11 a 13 años de edad (Estrella et al., 2019), señalando que

> Cada uno de los dos posibles resultados, cara o sello, tienen la misma probabilidad independientemente del número de veces que la moneda se haya lanzado antes, y de los resultados obtenidos. Razonar que es más probable que el próximo lanzamiento será sello en vez de cara debido a los anteriores lanzamientos es la falacia: la idea de que una racha de suerte pasada influya de alguna forma en las posibilidades futuras. (p. 294)

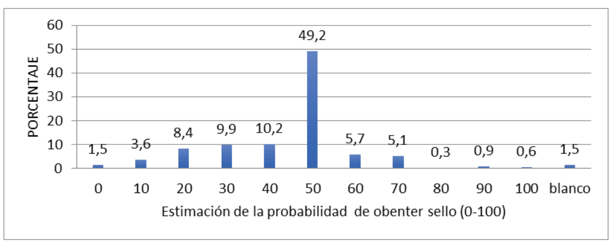

Figura 6. Porcentaje de respuestas al ítem 6 según estimación de la probabilidad (respuesta esperada valor 50), n = 331
Nota. Elaboración propia.

4.2 Resultados de los ítems cerrados 1 al 6 según nivel educativo

En la Figura 7 se presenta la distribución de las respuestas correctas de los primeros seis ítems cerrados dadas por los 331 estudiantes de educación básica. El gráfico permite comparar la variabilidad de cada ítem, observando que las diferencias entre los dos niveles son mínimas, siendo los ítems 1 y 3 sobre heurística de representatividad los de mayores diferencias con 8,1% y 8,9%, respectivamente. Por otra parte, el ítem 6 es el que ha presentado menores dificultades en ambos grupos, resultado importante a la hora de reflexionar sobre el razonamiento intuitivo de los estudiantes, ya que como se señaló anteriormente, la actividad conduce a pensar sobre probabilidades condicionales e independencia. Lo anterior, puede ser muy relevante en el sentido de desarrollar propuestas didácticas que potencien estos razonamientos; como es el caso de la falacia del jugador y la heurística de la representatividad, que según Fischbein (1975), los estudiantes carecen de experiencias en ambientes de desarrollo de intuiciones primarias sobre la independencia de sucesos.

Figura 7. Variabilidad de respuestas correctas, ítems 1 a 6 según nivel educativo. Nota. Elaboración propia.

4.3 Análisis de los argumentos a las respuestas de los ítems 7 y 8

Ítem 7. Argumenta. Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continúa. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya.

a) El juego es justo.
b) Luis tiene más ventaja.
c) Eduardo tiene más ventaja.

El 35,3% de los estudiantes responde correctamente, señalando que el juego es justo entre Luis y Eduardo (ver Figura 8. Si bien el espacio muestral de cada uno de ellos es distinto en cantidad, no lo es en proporcionalidad, por lo tanto, existe la misma probabilidad de 1/3 en obtener una bola blanca (opción a).

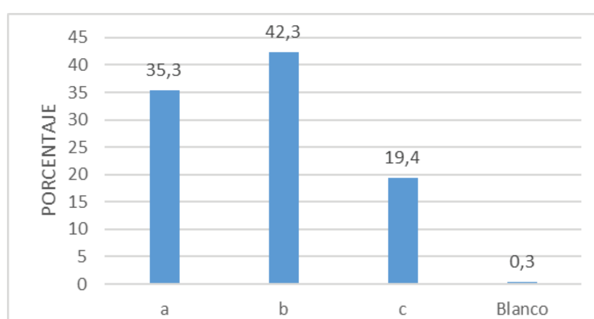

Figura 8. Porcentaje de respuestas al ítem 7, n = 331
Nota. Elaboración propia.

Hubo respuestas que si bien aplicaron la proporcionalidad no consideran el espacio muestral adecuado, es decir, en el caso de Eduardo consideraron 10/20 y para Luis 30/60 (ver Figura 9). Cabe destacar, en este caso, avances en la conexión de la aritmética con la probabilidad, es decir, los estudiantes están relacionando los conceptos matemáticos de porcentaje, razón, proporcionalidad directa y probabilidad.

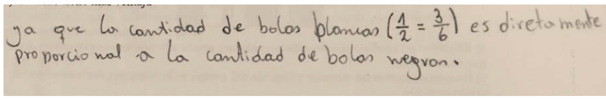

Figura 9. Argumento correcto del ítem 7

Nota. Elaboración propia.

Al comparar los resultados con la investigación realizada por Vásquez y Alsina (2017) con profesores de educación básica que enseñan Matemática, estos obtuvieron una mayor cantidad de respuestas correctas, con un 60,2%. En el caso de este estudio, 42,2% de los estudiantes optaron por que Luis tiene más ventaja, alternativa (b), asumiendo que al existir un espacio muestral más grande (90 bolas en total) es más difícil obtener la bola blanca, tal como lo argumenta un estudiante (ver Figura 10).

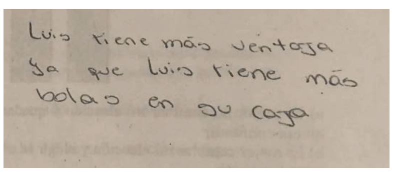

Figura 10. Argumento incorrecto del ítem 7

Nota. Elaboración propia.

También, 19,3% de los estudiantes señala que Eduardo tiene más posibilidades de ganar, siendo esta la alternativa (c). Una respuesta es dada en la Figura 11.

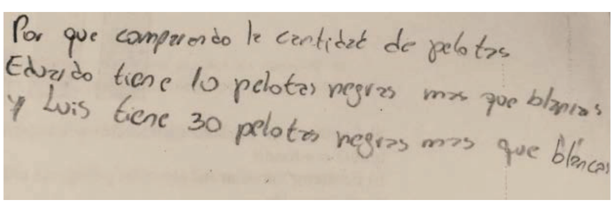

Figura 11. Argumento incorrecto del ítem 7

Nota. Elaboración propia.

La Tabla 3 no muestra diferencias importantes según nivel educativo de los estudiantes, tanto para la respuesta correcta e incorrectas, solo hay 2,7% de diferencia entre los alumnos de séptimo y octavo en su respuesta correcta.

Tabla 3 . Resultados del ítem 7 según nivel educativo en porcentaje

Nota. Elaboración propia.

	Séptimo	**Octavo**	**Total**
a	16,3	19,0	35,3
b	21,5	20,8	42,3
c	7,9	11,5	19,4
Blanco	1,5	1,5	3,0

Ítem 8. Argumenta. Se muestran los resultados de una encuesta realizada a 60 personas sobre la preferencia de mermeladas, clasificadas en no dietética y dietética.

	Mermelada no dietética	**Mermelada dietética**
Mujer	6	24
Hombre	18	12

Al seleccionar a uno de estos encuestados al azar, la probabilidad de que sea hombre y prefiera mermelada no dietética es:

a) 18/24 b) 18/30 c) 18/60
d) 30/60 × 24/60 e) 1/18

Del total de estudiantes hubo un 37,1% de respuestas correctas, opción c (ver Figura 12).

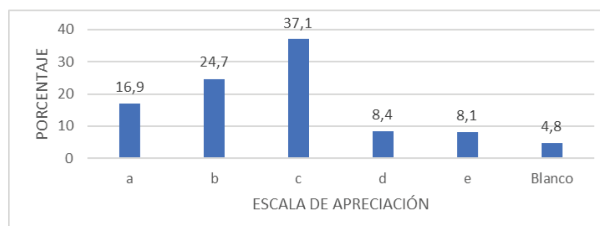

Figura 12. Porcentaje de respuestas al ítem 8, n = 331

Nota. Elaboración propia.

La Figura 13 presenta una solución correcta de obtener una probabilidad 18/60 en seleccionar a una persona hombre que prefiera mermelada no dietética, utilizando un razonamiento mediante la regla de Laplace.

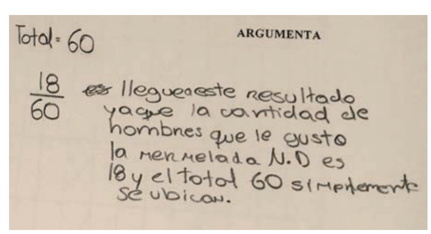

Figura 13. Argumento correcto del ítem 8

Nota. Elaboración propia.

En cambio, 24,4% de los estudiantes (Figura 14) asumen como correcta la alternativa (b) 18/30, considerando el espacio muestral de hombres (30) y dejando de lado a la cantidad de mujeres que indica el problema. Esta opción fue la más alta de error, y es interesante puesto que están dando una respuesta de probabilidad condicionada al reducir el espacio muestral, error que ha sido señalado por Contreras (2011) respecto a futuros profesores de Matemática, al confundir la probabilidad del producto y probabilidad condicional. Un estudiante señaló lo siguiente (ver Figura 14):

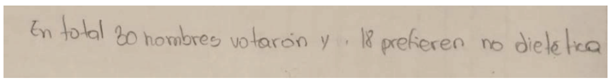

Figura 14. Argumento incorrecto del ítem 8

Nota. Elaboración propia.

En tanto, el 16,9% de los estudiantes (Figura 15) señaló la alternativa (a) de probabilidad 18/24, considerando el espacio muestral reducido de personas que prefieren mermelada no dietética, y de ellos calcularon la posibilidad de seleccionar a una persona hombre, pensada como probabilidad condicionada. Ver ejemplo en la Figura 15.

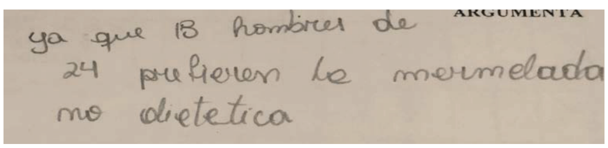

Figura 15. Argumento incorrecto del ítem 8

Nota. Elaboración propia.

La alternativa (d) de probabilidad 30/60×24/60 fue elegida por el 8,4% de los encuestados, en donde los estudiantes han argumentado de la siguiente manera la elección de su respuesta (Figura 16).

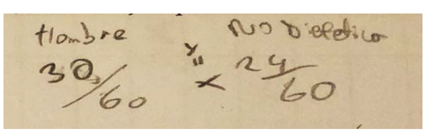

Figura 16. Argumento incorrecto del ítem 8

Nota. Elaboración propia.

Por último, hubo otro argumento que no está en contexto matemático, pero sí lo está en los temas que conciernen a las áreas de la salud: por lo general, las personas que consumen productos dietéticos son quienes sufren de alguna enfermedad, como lo que se puede apreciar en la siguiente Figura 17.

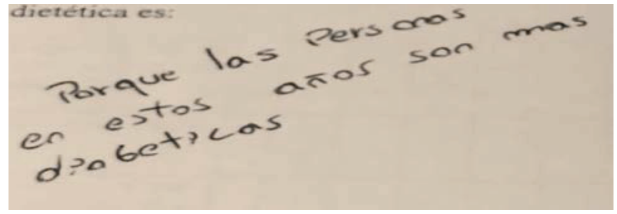

Figura 17. Argumento incorrecto del ítem 8

Nota. Elaboración propia.

En la Tabla 4 se puede apreciar que existe una diferencia de un 3,3% en la alternativa correcta de los estudiantes de séptimo y octavo año de educación básica. Además, no se observan diferencias importantes en los porcentajes de los distractores de acuerdo al nivel que se encuentra el estudiante.

Tabla 4 . Resultados del ítem 8 según nivel educativo en porcentaje

Nota. Elaboración propia.

	Séptimo	**Octavo**	**Total**
a	8,8	8,1	16,9
b	11,2	13,5	24,7
c	16,9	20,2	37,1
d	3,0	5,4	8,4
e	4,2	3,9	8,1
Blanco	3,0	1,8	4,8

5. Conclusiones

Este estudio hace mención a la importancia de tener en cuenta los significados intuitivo y clásico de la probabilidad a temprana edad, por el alcance que pueden tener en la construcción y modelación de la probabilidad frecuencial, subjetiva y axiomática en los niveles de secundaria y superior. En específico, se analizan los significados intuitivo y clásico de la probabilidad que atribuyen 331 estudiantes de educación básica de los niveles séptimo y octavo (12-13 años), por medio de las respuestas de los participantes a un cuestionario de seis ítems cerrados y analizando las argumentaciones de dos ítems abiertos.

En relación a la primera pregunta de investigación: ¿Cómo los estudiantes de educación básica responden a situaciones aleatorias que involucran razonamiento heurístico?, los resultados del cuestionario relacionados con la heurística de representatividad y la independencia de eventos revelan que en los ítems 1 y 2 no hubo mayor dificultad en las situaciones con experimentos de selección de pelotas con reposición y lanzamiento de monedas, obteniendo respuestas correctas sobre 70%, poniendo en juego la equiprobabilidad. El ítem 6, referido a la posibilidad de obtener en el tercer lanzamiento sello sabiendo que hubo dos caras, obtuvo tan solo un 49% de aciertos, lo que puede ser explicado por que hubo estudiantes que asociaron el experimento con el espacio muestral compuesto por ocho elementos, de los cuales hay un caso posible {ccs}. En el ítem 3, presentado a los estudiantes como una situación novedosa de la vida cotidiana (adaptado de Tversky y Kahneman, 1974), 35% alcanzaron la respuesta adecuada siendo la de mayor dificultad puesto que debían considerar dos situaciones, la ocurrencia de un suceso y dos sucesos simultáneamente. Las investigaciones sobre razonamiento probabilístico señalan que ante preguntas de respuesta simple se produce un sesgo predecible de nuestra mente, donde la persona contesta obviando ciertos datos estadísticos. En particular, en este estudio se ha ampliado el campo de aplicación de las intuiciones y heurísticas sobre la probabilidad en este nivel educativo (ítem 3), limitado principalmente a los sorteos y juegos de azar presentes en la probabilidad informal.

Las orientaciones curriculares de Matemática señalan que "en el área de la Probabilidad se pretende que estimen de manera intuitiva y que calculen de manera precisa la probabilidad de ocurrencia de eventos" (Ministerio de Educación de Chile, 2015). Sin embargo, en este nivel educativo son escasas las propuestas, fuera de los dispositivos manipulativos de fichas, monedas y dados, con planteamiento de situaciones sencillas y reales de donde emerjan razonamientos de heurística y presencia de nociones elementales de probabilidad.

En relación a los ítems que incluyeron nociones probabilísticas informales, se notó que en situaciones de razonamiento proporcional y regla de Laplace (ítems 4 y 5) hubo confusiones de los estudiantes al considerar de forma incorrecta los experimentos como equiprobables, 26,1% y 18,2%, respectivamente. A pesar, que los profesores de educación básica promueven la elaboración, con material concreto de dados y monedas, experimentos aleatorios con resultados equiprobables y no equiprobables.

En el análisis de las respuestas a los distintos ítems 1 a 6, se observaron diferencias mínimas según el nivel que cursaban los estudiantes, existiendo diferencias de tan solo 8,1% y 8,9% en los ítems 1 y 3 sobre heurística de representatividad (Figura 7). Así, la variabilidad de las respuestas no es alta entre un nivel y otro. Cabe señalar que estos dos niveles consecutivos son de transición a la educación media.

En las argumentaciones que conllevan elementos de la aritmética (ítem 7), los estudiantes situaron los conceptos de proporcionalidad directa, porcentaje, razón y probabilidad. Llama la atención que 42,2% de los estudiantes respondieron como distractor, mediante la aplicación de la proporcionalidad, pero no consideraron el espacio muestral adecuado. Continuando con la segunda pregunta de investigación: ¿Qué argumentos utilizan los estudiantes respecto de nociones de probabilidad clásica?, el ítem 8 resultó interesante, pues si bien la lectura de tablas de doble entrada se promueve en los siguientes niveles del currículo de Matemática, se intentó indagar en las argumentaciones de nociones de probabilidad informales como la regla del producto. 37,1% utilizaron elementos de probabilidad compuesta, estimando la probabilidad de la ocurrencia de dos sucesos simultáneamente. Nótese en las argumentaciones de los estudiantes respuestas de nociones de probabilidad bajo una condición, declarando una reducción del espacio muestral en su razonamiento condicionado informal, siendo esta la opción de 41,3% de los 331 estudiantes participantes. La literatura también reporta confusiones entre la regla del producto y la probabilidad condicional en profesores de Matemática.

Debido a los escasos estudios sobre el tema en este ciclo educativo, al parecer los estudiantes de educación básica no han sido confrontados a una enseñanza de la probabilidad que evalúe y realce las intuiciones probabilísticas. Los resultados obtenidos del cuestionario sobre elementos de probabilidad informal pueden ser útiles para que los profesores promuevan la estimación intuitiva de la probabilidad. En base a la experiencia docente de los autores del presente estudio, estos coinciden con Fischbein (1975) en que los estudiantes, si bien no tienen un pensamiento formal sobre el azar, pueden desarrollar intuiciones relacionadas a este, lo que favorecería la comprensión de los conceptos probabilísticos. Se considera pertinente elaborar diseños de enseñanza de la probabilidad para estudiantes de educación básica que tengan presente no solo el trabajo con material concreto de azar, sino también ampliar con actividades de estimación de intuiciones probabilísticas de contingencia e interés de los estudiantes.

Es deseable continuar con la investigación, considerando una muestra más amplia de estudiantes que tenga en cuenta otros niveles escolares y distintos establecimientos educacionales (municipalizados y particular pagados). Así también, implementar y evaluar ciclos formativos de razonamientos informales de probabilidad. Una limitación del estudio ha sido confrontar algunos de los resultados con experiencias similares de profesores que enseñan probabilidad, debido a que no hay indagaciones relacionadas con este estudio de asignación de probabilidad intuitiva y exploración de ideas informales de probabilidad compuesta y probabilidad condicional.

Referencias

Alvarado, H., Estrella, S., Retamal, L., y Galindo, M. (2018). Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(2), 131-156. https://doi.org/10.12802/relime.18.2121

Bastías, H. (2017). E*studio del significado intuitivo y formal de la probabilidad en profesores de matemática* [Tesis de Magister no publicada]. Universidad Católica de la Santísima Concepción.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 8*(3), 247-264.

Batanero, C. (2016). Understanding randomness: Challenges for research and teaching. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 34-49). European Society for Research in Mathematics Education.

Batanero, C., Contreras, J. M., Cañadas, C., y Gea, M. M. (2012). Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad. *Novedades educativas, 261*, 78-84.

Batanero, C., Contreras, J. M., y Díaz, C. (2014). Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 12*(2), 1-13. https://doi.org/10.18845/rdmei.v12i2.1673

Batanero, C., y Díaz, C. (2007, julio). *Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje* [Ponencia invitada]. XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Federación Española de Profesores de Enseñanza de las Matemáticas, Granada, España.

Batanero, C., Henry, M., y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 16-42). Springer.

Borovcnik, M., y Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability. En E. J. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (pp. 7-34). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_2

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias* [Tesis Doctoral, Universidad de Granada]. Repositorio UGR. http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/CANIZARE.pdf

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional.* [Tesis Doctoral, Universidad de Granada]. Repositorio UGR. http://hera.ugr.es/tesisugr/19831870.pdf

Contreras, J. M., Batanero, C., Arteaga, P., y Cañadas, G. (2014). La paradoja del niño o niña: aplicaciones para la clase de probabilidad. *Revista digital Matemática, Educación e Internet, 14*(1), 1-13. https://doi.org/10.18845/rdmei.v14i1.1562

English, L., y Watson, J. (2016). Development of probabilistic understanding in fourth grade. Journal for *Research in Mathematics Education, 47*(1), 28-62. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.47.1.0028

Estrella, S., Alvarado, H., Olfos, R., y Retamal, L. (2019). Desarrollo de la alfabetización probabilística: textos argumentativos de estudiantes. *Revista Paradigma, 40*(1), 280-304.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Reidel. https://doi.org/10.1007/978-94-010-1858-6

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach.* Springer.

Fischbein, E., y Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(1), 96-105. https://doi.org/10.2307/749665

Fulmer, G. W. (2014). Undergraduates' attitudes toward science and their epistemological beliefs: Positive effects of certainty and authority beliefs. *Journal of Science Education and Technology, 23*(1), 198-206. https://doi.org/10.1007/s10956-013-9463-7

Gardner, M. (1959). Mathematical games. *Scientific American, 219*, 180-182.

Garfield, J., y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: connecting research and teaching practice.* Springer.

Gómez, E., Batanero, C., y Contreras, J. M. (2014). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 28*, 209-229. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

Gómez, E., Contreras, J. M., y Batanero, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para educación primaria en Andalucía. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 69-72). SEIEM.

Kahneman, D., Slovic, P., y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511809477

Kahneman, D., y Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology, 3*, 430-454. https://doi.org/10.1016/0010-0285(72)90016-3

Kahneman, D., y Tversky, A. (1982). Variants of uncertainty. *Cognition, 11,* 143-157. https://doi.org/10.1016/0010-0277(82)90023-3

Ministerio de Educación de Chile. (2015). Nuevas Bases Curriculares y Programas 7° básico a 2° año de Educación Media. Autor. http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-34960_Bases.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Autor.

Nisbett, R., y Ross, L. (1980). *Human inference: Strategies and shortcomings of social judgments.* Prentice Hall.

Rodríguez, F., Díaz, D., y Vásquez, C. (2018). Evaluación de la alfabetización probabilística del profesorado en formación y en activo. *Estudios Pedagógicos, 46*(1), 135-156. https://doi.org/10.4067/S0718-07052018000100135

Sanabria, G., y Núñez, F. (2017). La probabilidad como elemento orientador de la toma de decisiones. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 17*(2), 1-13. https://doi.org/10.18845/rdmei.v17i2.3079

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J., y Cañizares, M. J. (1998). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre modelos probabilísticos en las secuencias de resultados aleatorios. *Suma, 36*, 23-32.

Sharma, S. (2014). Teaching probability: A socio-constructivist perspective. *Teaching Statistics, 37*(3), 78-84. https://doi.org/10.1111/test.12075

Tauber, L.; y Olesker, L. (2014). Significados dados a los fenómenos aleatorios en el contexto de la enseñanza media uruguaya. En: L. Tauber (Ed.), *Actas de V Jornadas de Educación Matemática y II Jornadas de investigación en Educación Matemática.* Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1974). Judgement under uncertainity: Heuristics and biases. *Science, 185*, 1124-1131. https://doi.org/10.1126/science.185.4157.1124

Vásquez, C., y Alsina, A. (2017). Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*, 454-478. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a22