JUEGOS DIDÁCTICOS DE INDAGACIÓN EN TORNO A LA COVARIACIÓN DE DOS MAGNITUDES CONTINUAS

Patricia Bochaca
Affiliation: IES Los Albares, Spain; bochaca@gmail.com
Josep Gascón
Affiliation: Autonomous University of Barcelona, Faculty of Mathematics, Spain; gascon@mat.uab.cat
Pedro Nicolás
Affiliation: University of Murcia, Faculty of Education, Spain; pedronz@um.es

Resumen: Los paradigmas didácticos basados en la indagación parecen ser actualmente auspiciados desde diferentes instituciones de nuestra sociedad. Pero la adopción de dichos paradigmas didácticos por parte de la profesión docente no está exenta de dificultades vinculadas, por ejemplo, a aspectos epistemológicos de las matemáticas. En efecto, para lograr lo que estos paradigmas proponen se requeriría una reorganización de las matemáticas que mostrara el conocimiento matemático como el resultado de un proceso de indagación. Más aún, a lo largo de ese proceso debería quedar claro cuál es la fundamentación racional del correspondiente conocimiento matemático. Para eso proponemos lo que llamamos *paradigma de la modelización matemática*, que presenta el conocimiento matemático como el resultado de la construcción y el estudio de un cierto modelo que aspira a capturar algunas propiedades esenciales de un sistema dado. En este trabajo abordamos el caso específico de los rudimentos del cálculo diferencial. Para ello, expresamos la correspondiente actividad de modelización en términos de un *juego de indagación*. Finalmente, mostramos cómo ese juego de indagación ha sido utilizado, en un caso real, para la enseñanza del inicio del cálculo diferencial mediante un *juego didáctico de indagación*.

Palabras clave: Aprendizaje basado en la indagación, Paradigma didáctico, Modelización matemática, Sistema de variación de magnitudes, Cálculo diferencial.

INQUIRY DIDACTIC GAMES ON THE COVARIATION OF TWO CONTINUOUS MAGNITUDES

Abstract: Didactic paradigms based on inquiry seem to be fostered by many institutions in our society. But the adoption of those didactic paradigms entails many challenges for teachers. For example, linked to epistemological aspects of mathematics. Indeed, to achieve what those paradigms propose teachers would require a suitable reorganization of mathematics showing mathematical knowledge as an output of an inquiry process. Moreover, along this process it should become clear how mathematical knowledge is rationally grounded. For this, we propose the so-called *paradigm of mathematical modelling*, which presents mathematical knowledge as the result of the construction and the study of a certain model aiming to capture some essential features of a given system. In this work we address the specific case of the rudiments of differential calculus. For that end, we express the corresponding modelling activity in terms of an *inquiry game*. Finally, we show how this inquiry game has been use, in a concrete case, to teach the beginning of differential calculus by means of an *inquiry didactic game*.

Key words: Inquiry-Based Learning, Didactic paradigm, Mathematical modelling, System of variation of magnitudes, Differential calculus.

INTRODUCCIÓN: PARADIGMAS DIDÁCTICOS BASADOS EN LA INDAGACIÓN

Como se afirma en GASCÓN & NICOLÁS (2019, 2020), cada *paradigma didáctico* propone una manera específica de describir e interpretar la educación en una institución docente y puede caracterizarse, brevemente, por el *modelo epistemológico subyacente* y por los *fines educativos* que propugna (formulados con los términos de dicho modelo). Típicamente cada paradigma incorpora también unos *medios didácticos* para conseguir dichos fines y, ocasionalmente, aparece como *respuesta a un conjunto de hechos didácticos* que pueden interpretarse como síntomas de un *fenómeno* que el paradigma saca a la luz y pretende soslayar. Los *fines educativos* que propugna son los que determinan la dirección del cambio que se propone (en coherencia con los hechos didácticos que se pretende evitar).

Los fines educativos que propugna el *paradigma didáctico vigente* en una institución constituyen una característica esencial del mismo porque inciden de manera muy relevante sobre la elección de los *medios* que se proponen para alcanzarlos y sobre la descripción de los *fenómenos didácticos* que son visibles. Dichos fines se establecen en coherencia con la estructura de la Sociedad y varían a lo largo de su historia en función de las normas que la rigen en cada periodo histórico (DURKHEIM, 1924/1991). Así, por ejemplo, habrá quien afirme que en las sociedades occidentales actuales se considera cada vez más que los fines educativos de las instituciones docentes deberían vehicularse mediante un *aprendizaje basado en la indagación* que choca con el tipo de *enseñanza* tradicional que todavía está vigente en gran medida en nuestras escuelas y cuyos fines educativos giran en torno a la *reproducción de conocimientos*.

Esta idea de aprendizaje, frecuentemente designada con la etiqueta genérica de *Inquiry-Based Learning* (IBL) o *aprendizaje basado en la indagación*, que se remonta a John Dewey y más allá (THOMAS, 2013), está ganando vigencia como muestra el hecho de que, en las últimas décadas, ha sido propuesta, con diferentes niveles de precisión, por varios investigadores, instituciones y enfoques pedagógicos y didácticos (ARTIGUE; BLOMHØJ, 2013). Por su parte, la Unión Europea, a través de informes como (ROCARD et al, 2007) y diferentes proyectos, como PRIMAS (http://www.primas-project.eu), han apoyado también su implementación en las instituciones educativas europeas.

Aunque los enfoques que propugnan un aprendizaje basado en la indagación no constituyen un paradigma unificado claramente definido, todos ellos pretenden integrar en el proceso de aprendizaje algunas tareas propias del «método científico» tales como: formular preguntas; hacer observaciones; explicitar la información con la que se cuenta en cada momento; desarrollar métodos de prueba; recopilar, analizar e interpretar datos e informaciones; formular posibles explicaciones; proponer conjeturas y hacer predicciones.

Junto a estos rasgos comunes, que están formulados en términos «pedagógicos» (independientes de toda disciplina particular) y que podemos considerar en cierta medida como *medios* más o menos compartidos, los diferentes enfoques basados en la indagación proponen *fines educativos* muy diversos que van desde *resolver problemas abiertos* o llevar a cabo *proyectos*, hasta superar la *carencia de vocaciones científicas*, pasando por *alfabetizar científicamente a los alumnos*. Todos estos enfoques son, en alguna medida, herederos del *aprendizaje por descubrimiento* de Jerome Bruner (1966) y, como tales, señalan vagamente una dirección de cambio que pretende superar las consecuencias «indeseables» (según el ideal actualmente vigente de la formación científica) de la enseñanza transmisiva que, como hemos dicho, comporta un aprendizaje sustentado en la mera reproducción de conocimientos.

En todos los casos, más allá de procurar que se alcancen los citados fines educativos genéricos, los profesores que trabajan en una institución en la que el paradigma vigente está basado en la indagación, aunque este solo se proponga como «meta a la que se debería tender», se enfrentan a un importante problema de la profesión docente. Se trata del *problema del diseño y la gestión* de los dispositivos didácticos necesarios para:

(1) Superar una enseñanza basada en la reproducción de conocimientos, mediante la puesta en marcha de dispositivos didácticos que potencien los procesos indagatorios.

(2) Convertir los citados fines educativos genéricos en fines educativos específicos del dominio en el que se lleva a cabo el proceso de indagación, y procurar que la comunidad de estudio alcance los correspondientes *fines educativos específicos.*

Para explicar las grandes dificultades con las que tropiezan los profesores para hacerse cargo de este problema profesional, se suele apelar (incluso por parte de la comunidad didáctica) a las «falsas creencias de los profesores sobre la ciencia» y a la trivialización de la práctica científica originada por la «falta de una formación adecuada de los profesores».

En general, las respuestas institucionales que recibe este problema tienen una fundamentación epistemológica muy débil, en coherencia con el nivel pedagógico en el que se plantea. Por ejemplo, el proyecto PRIMAS propone los denominados *Módulos de Desarrollo Profesional* (https://primas-project.eu/modules/modules-english/) dedicados a proporcionar a los maestros estrategias para administrar el IBL. En definitiva, las respuestas institucionales a los principales problemas que se plantea el profesorado inmerso en un paradigma didáctico basado en la indagación no están fundamentadas en ningún modelo epistemológico explícito del conocimiento que está en juego y han mostrado una eficacia muy limitada para generar y gestionar el desarrollo de un proceso de indagación que permita alcanzar los fines propuestos en el nivel pedagógico. Su ineficacia se acentúa cuando nos situamos en los niveles disciplinar y subdisciplinar.

EL PARADIGMA DISCIPLINAR DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA BASADO EN LA INDAGACIÓN

Como hemos citado anteriormente, el paradigma vigente en los sistemas docentes europeos actuales (al menos en sus documentos oficiales y en el ánimo de la Unión Europea) propugna que los fines educativos deberían vehicularse mediante un *aprendizaje basado en la indagación* para superar el tipo de *enseñanza* tradicional centrada en la *reproducción de conocimientos* y acercarse así al modelo de la creación de conocimientos mediante la indagación propio de las comunidades científicas. Diversos autores, interpretando la indagación y la modelización matemáticas de formas diversas, consideran que los procesos de indagación tienen muchos puntos de contacto con algunas de las tareas que intervienen en la modelización (SALA; FONT, 2019).

Desde nuestro punto de vista, algunas tareas que forman parte del *proceso de indagación* –entendido este como un proceso que integra algunas de las tareas propias del «método científico» citadas anteriormente– tienen como objetivo transformar la situación problemática que se está estudiando en cuestiones abordables a través de un *proceso de modelización matemática* que tiene muchos rasgos en común con la forma como este proceso se conceptualiza en la *teoría antropológica de lo didáctico* (TAD) (ARTIGUE et al., 2012; ARTIGUE; BAPTISTE, 2012; ARTIGUE; BLOMHØJ, 2013).

Desde la TAD, en coherencia con un postulado epistemológico general, asumimos la existencia de fuertes conexiones entre los denominados procesos de indagación y de modelización puesto que, consideramos que *todo conocimiento sobre un sistema se construye mediante procesos de modelización de este* y que dichos procesos siempre están generados por cuestiones problemáticas para las que no se dispone de medios para abordarlas directamente desde el sistema. La construcción de conocimientos evoluciona mediante un proceso de indagación que relaciona el modelo con el sistema modelizado y que cristaliza en una dialéctica entre respuestas provisionales, inferencias, refutaciones y nuevas cuestiones que pueden requerir de la construcción de nuevos modelos y así sucesivamente. Para más detalles sobre la forma de conceptualizar los procesos de modelización en la TAD, ver (GASCÓN, 1994; BOLEA, 2002; GARCÍA et al., 2006; BARQUERO; BOSCH; GASCÓN, 2013).

De hecho, en el caso de las matemáticas, la TAD propone, a nivel disciplinar, el *paradigma de la modelización matemática* (PMM) compatible con el *paradigma del cuestionamiento del mundo* que es un paradigma pedagógico basado en la indagación (CHEVALLARD, 2013a y 2013b). El PMM responde a un *fenómeno didáctico disciplinar* que se manifiesta en múltiples características de la organización matemática escolar vigente en las instituciones docentes actuales como, por ejemplo: el *carácter puntual* de las praxeologías matemáticas escolares; la *rigidez* e *incompletitud relativa* de las mismas; la tendencia a la *algoritmización* de las tareas matemáticas; la escasa incidencia del *cuestionamiento tecnológico* de las técnicas y, en general, del bloque tecnológico-teórico, sobre la práctica matemática; la *desarticulación* entre las diferentes áreas y sectores de la matemática escolar; el *autismo temático* que comporta el olvido de las posibles *razones de ser* de una obra cuando estas dependen de su conexión con los niveles superiores de codeterminación didáctica; y la autosuficiencia de la matemática escolar que aparece *encerrada en sí misma* y cuya relación con el resto de disciplinas se reduce a un mero *aplicacionismo* (GASCÓN; NICOLÁS, 2020). Todas estas características confluyen en un macrofenómeno didáctico disciplinar que se manifiesta en las enormes restricciones institucionales que dificultan la vida normal y el desarrollo de la actividad de *modelización matemática* (MM) en las instituciones responsables de la educación matemática y, como veremos, obstaculizan la obtención de los fines educativos que el PMM propugna.

El PMM se sustenta en un *modelo epistemológico general* de las matemáticas que considera toda actividad matemática con una actividad de modelización y ha sacado a la luz múltiples *fenómenos didácticos* que afectan a las matemáticas escolares como disciplina (GARCÍA et al., 2006). En dicho modelo, se consideran provisionalmente verdaderas las proposiciones que vienen avaladas por la coherencia entre los resultados obtenidos en el modelo y las relaciones entre los elementos del sistema modelizado. Los *medios* o estrategias didácticas que plantea el PMM, se sustentan en los *recorridos de estudio e investigación* (REI) que son *dispositivos didácticos* especialmente adecuados para superar las restricciones que inciden sobre la vida institucional de la MM (BARQUERO; BOSCH; GASCÓN, 2013).

En coherencia con este modelo epistemológico y con estos medios, los *fines educativos* que propugna el PMM consisten, en primera instancia, en que las comunidades de estudio lleven a cabo una genuina actividad de investigación científica, para responder a las cuestiones problemáticas que surgen en todo tipo de sistemas (matemáticos o extramatemáticos) mediante la construcción de modelos matemáticos de estos, realizando un trabajo sistemático, paciente, profundizado y a largo plazo con dichos modelos. Se trata de un objetivo educativo intermedio y, como tal, de un medio para alcanzar el *objetivo educativo último* propugnado por el PMM. Este consiste en que las comunidades de estudio reconstruyan las matemáticas mediante el uso de *argumentos racionales no necesariamente deductivos* fundamentados en las relaciones entre los elementos del sistema (cuyas variables son magnitudes) y los correspondientes elementos del modelo matemático de dicho sistema. De esta forma, se posibilita uno de los objetivos fundamentales de las instituciones educativas: la transmisión de conocimiento fundado racionalmente (NICOLÁS, en prensa) al tiempo que se supera la falsa dicotomía en la forma de organizar y presentar las matemáticas en los niveles educativos no universitarios: o argumentación deductiva o simple presentación ostensiva, más o menos desarticulada, y sin justificación racional.

JUEGOS DIDÁCTICOS DE INDAGACIÓN COMO MEDIOS DIDÁCTICOS

En múltiples trabajos desarrollados en el ámbito de la TAD, se ha constatado la existencia de fenómenos subdisciplinares que afectan específicamente a un dominio concreto de la matemática escolar (como la proporcionalidad, la geometría, el álgebra elemental o el cálculo diferencial). Para profundizar en el estudio de estos fenómenos ha sido necesario construir modelos epistemológicos específicos, relativos al dominio correspondiente de la matemática escolar (compatible con el modelo epistemológico general de las matemáticas, esto es, con el modelo epistemológico de la modelización matemática). Se trata de los denominados *modelos epistemológicos de referencia* (MER) que, además de sacar a la luz los citados fenómenos, proporcionan elementos para formular y abordar los problemas correspondientes. En lo que sigue, nos situaremos en este nivel subdisciplinar que constituye un escenario en el que se plantean problemas docentes relativos a cómo diseñar y gestionar los procesos de estudio. En concreto, se plantea qué debe hacer el profesor para ayudar a los estudiantes a:

YQ_1: reconstruir un conocimiento preestablecido a través de un proceso indagatorio;

YQ_2: desarrollar habilidades de indagación;

YQ_3: desarrollar una actitud receptiva en lo que se refiere a la ampliación y «mejora» del conocimiento.

Aquí nos centraremos en las cuestiones YQ_1 e YQ_2 asumiendo provisionalmente que YQ_3 puede considerarse, al menos parcialmente, como una consecuencia de las dos primeras. Para reformularlas, observemos que la situación formada por un grupo de estudiantes, X, un profesor, Y, un *milieu*, $\mathcal{O}$, (en el sentido de BROUSSEAU, 2002) y un conocimiento a estudiar, puede considerarse como un juego (HINTIKKA, 1982), que podría llamarse *juego didáctico*, cuyas reglas expresan el tipo de movimientos permitidos para los jugadores X, Y y $\mathcal{O}$, y determinan cuándo los jugadores X e Y ganan el juego.

A cada paradigma didáctico de referencia le corresponde un cierto tipo de juegos didácticos, y los *medios* de este paradigma podrían formularse en términos de las *reglas* de los juegos didácticos correspondientes. Se podría decir que los juegos didácticos vinculados al PMM son *juegos didácticos de indagación*, y que las cuestiones YQ_1 e YQ_2 solicitan las posibles estrategias de Y para ganar este tipo de juegos. De hecho, una de las características interesantes de describir un sistema didáctico en términos de la teoría de juegos es que permite hablar de *estrategias*.

El carácter infructuoso de las estrategias pedagógicas citado anteriormente parece estar relacionado con el hecho de que no existe un *método científico único* para abordar cualquier investigación, independientemente de las preguntas específicas y del conocimiento en juego. Aun así, Hintikka enfatiza algunas características lógicas compartidas por todos los procesos de indagación en su *Modelo de Investigación Interrogativo* (HINTIKKA et al, 2002). De acuerdo con este, una indagación puede ser considerada como un juego, llamado *juego de indagación*, con dos jugadores, el *Indagador* y el *Oráculo*. El juego comienza cuando el Indagador, partiendo de ciertas premisas teóricas T, se enfrenta a una cuestión XQ_0. Para el Indagador, los movimientos permitidos son: plantear *cuestiones* al Oráculo (por ejemplo, trabajar con ejemplos, realizar experimentos controlados, etc.) y hacer *inferencias*[1] (usando como premisas tanto las respuestas extraídas de T como las del Oráculo). Por otro lado, el Oráculo tiene un solo movimiento permitido: *responder* a las cuestiones que le plantea el Indagador. Este gana el juego si puede inferir una respuesta a XQ_0. En referencia a la cuestión YQ_2 digamos que, a priori, tener habilidades de indagación consiste en poder desarrollar estrategias para ganar un juego de indagación.

Parece razonable decir que para que un *juego didáctico* sea un *juego didáctico de indagación*, X y $\mathcal{O}$ deben jugar un *juego de indagación*, con X (grupo de estudiantes) haciendo el papel de Indagador y $\mathcal{O}$ (*milieu*) el papel de Oráculo, mientras que Y (profesor) debe restringir sus movimientos de alguna manera. Bajo esta perspectiva, para abordar los problemas docentes enunciados mediante las cuestiones YQ_1 e YQ_2 se requiere, en el contexto de un juego didáctico de indagación, que Y lleve a cabo determinadas estrategias (poniendo en marcha *técnicas didácticas* adecuadas) para hacer que X gane el juego de indagación correspondiente. Pero no podemos delinear las estrategias de Y sin mirar más de cerca los posibles movimientos de Y. Por supuesto, el primer movimiento importante de Y consiste en establecer la cuestión inicial XQ_0 para X. Después del análisis lógico de Hintikka de los juegos de indagación

[1] Tanto si una inferencia es correcta como si es incorrecta la llamaremos *inferencia conjetural*. Internamente el Indagador la considera una *inferencia*, pero desde el punto de vista de un análisis externo a la investigación se la considera inicialmente como una *conjetura*. Dependiendo de las premisas que utilice y de la validez lógica de la propia inferencia, podrá dar origen a una proposición correcta o incorrecta.

(HINTIKKA et al., 2002), y según (GENOT; GULTZ, 2015), la *habilidad de indagación* es la capacidad de distinguir entre cuestiones fructíferas e infructuosas a lo largo de una investigación. Por lo tanto, otro tipo de movimientos permitidos para Y debería ser ayudar a X a discernir si una posible cuestión es fructífera y a encontrar buenas preguntas.

UN JUEGO DE INDAGACIÓN EN TORNO A LA COVARIACIÓN DE DOS MAGNITUDES: EL INICIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

Nomenclatura

Denotaremos por T el equipamiento praxeológico con el que parte el indagador. Cada juego de indagación comienza con al menos una pregunta para la cual, típicamente, el Oráculo no tiene una respuesta. Esta pregunta será XQ_0. Con frecuencia, a lo largo de la investigación, el Indagador, también incorpora preguntas XQ_n para las cuales el Oráculo tampoco tiene una respuesta. Por eso distinguimos entre: preguntas Q_n que están dirigidas y son directamente respondidas por el Oráculo (que pueden ser planteadas tanto por X como por Y), y *cuestiones de investigación,* XQ_n. Las respuestas del Oráculo son O_n. Las inferencias del Indagador son I_n que, como hemos dicho, tienen un carácter conjetural.

Los movimientos del juego se numerarán en secuencia, independientemente de si son preguntas del indagador (X), del professor (Y), inferencias (I) o respuestas del oráculo (O).

Equipamiento praxeológico de partida

Asumimos que el Indagador tiene cierta familiaridad con las funciones. En particular, que a cada valor x una función f le hace corresponder un único valor $f(x)$.
Asumimos también que el Indagador sabe que, para que una función f sea *creciente* (respectivamente, *decreciente*) en el intervalo $[a, b]$, se debe cumplir, para cualesquiera $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$, que $f(x_1) \leq f(x_2)$ (respectivamente, $f(x_1) \geq f(x_2)$). Diremos que f es *estrictamente creciente* (respectivamente, *estrictamente decreciente*) en el intervalo en el intervalo $[a, b]$, se debe cumplir, para cualesquiera $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$, que $f(x_1) < f(x_2)$ (respectivamente, $f(x_1) > f(x_2)$).

Finalmente, asumimos que el Indagador tiene familiaridad y sabe representar diferentes tipos de polinomios (de grado 1 y grado 2, al menos). No asumimos ningún conocimiento sobre límites de sucesiones, límites de funciones, continuidad o cálculo diferencial.

Esquema de un juego de indagación como modelo epistemológico de referencia

En esta sección esbozamos un MER expresado como un *juego de indagación* en el que, partiendo de una cuestión en torno a la covariación de dos magnitudes, el Indagador termina desarrollando algunas herramientas básicas del cálculo diferencial. En la sección siguiente analizaremos un proceso de estudio real en el que se usó este *juego de indagación* para llevar a cabo un *juego didáctico de indagación*.

Asumimos que el equipamiento praxeológico del Indagador incluye la noción de *grado de precisión* en el trabajo con magnitudes. En cada contexto habrá un grado de precisión diferente, pero lo importante para nuestro juego de indagación es el hecho de que dicho grado existe. Decimos que, en nuestro trabajo con la magnitud M, asumimos un *grado de precisión* δ si dos números x_1 y x_2 representando sendas cantidades de la magnitud M son considerados iguales cuando $|x_1 - x_2| < \delta$. Así, decimos que tenemos un *grado de precisión de milésimas* si la milésima es el último decimal significativo, si el grado de precisión es de $0{,}001$, de modo que, por ejemplo, los números $9{,}1234$ y $9{,}1235$ son considerados iguales porque $|9{,}1234 - 9{,}1235| = 0{,}0001 < 0{,}001$.

Asumimos también cierta familiaridad con la noción de *razón*. En particular, asumimos que el Indagador sabe que la razón $y{:}\,x$, expresada por una cantidad y de magnitud N y una cantidad x de magnitud M, es la misma que la razón $q{:}\,1$, donde q, que es el cociente que resulta de dividir y por x, se interpreta como cantidad de la magnitud N y el 1 como cantidad de la magnitud M.

El contexto del que parte el juego es el siguiente. El Indagador considera un sistema concreto, un estado de cosas, en el que intervienen dos magnitudes, M y N, y una función f que a una cantidad x de M le hace corresponder una cantidad y de N. A un tal sistema lo llamamos *sistema de variación de magnitudes* (SVM)[2].

[2] GARCÍA (2005) ya utilizó el SVM en el diseño de una organización didáctica para estudiar el papel que podría desempeñar la proporcionalidad en el ámbito de las relaciones funcionales elementales.

Partimos de dos cuestiones iniciales relacionadas, una sobre cómo detectar cuándo hay (de)crecimiento, y otra sobre cómo comparar (de)crecimientos:

$XQ_{0.1}$: Dado un SVM con función f, y dado un intervalo $[a,b]$ de cantidades de la magnitud M, ¿es f creciente o decreciente en dicho intervalo?

$XQ_{0.2}$: Sea f una función definida en el intervalo $[a,b]$, y sea g una función definida en el intervalo $[c,d]$. Si ambas son crecientes, ¿alguna de ellas (de)crece más que la otra? ¿Cómo podemos comparar el crecimiento?

XQ_1: El Indagador se puede preguntar si la función f será creciente (respectivamente, decreciente) en el intervalo $[a,b]$ siempre que su *tasa de variación* en dicho intervalo, $TV(f,a,b) = f(b) - f(a)$, sea positiva (respectivamente, negativa).

Q_2: El Indagador le pregunta al Oráculo si el signo de la tasa de variación determina el crecimiento o decrecimiento de una función afín concreta, por ejemplo $f(x) = 2x + 1$,

O_3: La respuesta será afirmativa. Para obtenerla se puede recurrir a la representación gráfica de la función.

Q_4: El Indagador le pregunta al Oráculo si el signo de la tasa de variación determina el crecimiento de una parábola concreta, por ejemplo, de $f(x) = x^2$,

O_5: La respuesta es negativa. En efecto, en ese caso, mediante representación gráfica, se puede ver fácilmente que la función no es creciente en el intervalo $[-1,2]$, y sin embargo se tiene que $TV(f,-1,2) = f(2) - f(-1) = 4 - 1 = 3 > 0$.

I_6: El Indagador infiere por lo tanto que el signo de la tasa de variación es suficiente para las funciones afines, pero no basta en general para determinar el crecimiento o decrecimiento. Que no basta para cualquier tipo de función ha quedado claro a partir de Q_4 y O_5. Que es suficiente para cualquier función afín viene apoyado por Q_2 y O_3. Además, se puede elaborar un argumento aún más satisfactorio. En efecto, uno puede ver que la función afín $f(x) = mx + n$ es creciente (respectivamente, decreciente) si $m > 0$ (respectivamente, $m < 0$), y, para cualquier intervalo $[a,b]$ se tiene que la correspondiente tasa de variación es $TV(f,a,b) = mb + n - ma - n = m(b - a)$, que es un valor positivo (respectivamente, negativo) si m>0 (respectivamente, $m < 0$).

XQ_7: Sea $f(x) = mx + n$ es una función afín definida en el intervalo $[a,b]$, y $g(x) = sx + t$ una función afín definida en el intervalo $[c,d]$. Si ambas son crecientes y la correspondiente tasa de variación de f es mayor que la correspondiente tasa de variación de g, ¿podemos decir entonces que f crece más que g?

Observemos que en el equipamiento praxeológico no asumimos ninguna definición precisa sobre el significado de 'crecer más'. Le damos entonces en XQ_7un contenido intuitivo y aún no matematizado a esa expresión.

Q_8: Con $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x + 2$, consultamos al Oráculo sobre $TV(f, 0{,}1)$, sobre $TV(g, 0{,}3)$ y sobre la comparación de crecimientos en dichos intervalos.

O_9 : Tenemos que $TV(f, 0{,}1) = 2 < 3 = TV(g, 0{,}3)$. Sin embargo, mediante una representación gráfica, es fácil ver que f crece más en [0,1] que g en [0,3], pues tiene una gráfica con más pendiente.

I_{10}: A la luz de la respuesta O_9 concluimos que, aunque la tasa de variación sirva para detectar el (de)crecimiento de las funciones afines, no sirve para comparar la cantidad de crecimiento.

XQ_{11}: Quizás la explicación está en que, para ver la cantidad de crecimiento, nos interese comparar cuánto crece la cantidad de la magnitud N con relación al crecimiento de la magnitud M. De hecho, esta parece ser la descripción precisa de 'crecer más'. Decimos que *f crece más* en $[a, b]$ que g en $[c, d]$ si la razón $(f(b) - f(a)): (b - a)$ es mayor que $(g(d) - g(c)): (d - c)$. Como hemos dicho más arriba, presuponemos en el Indagador cierta familiaridad con la idea de proporcionalidad. Así, el Indagador sabe que para comparar dichas proporciones basta con dividir $f(b) - f(a)$ entre $b - a$, dividir $g(d) - g(c)$ entre $d - c$, y comparar dichos cocientes. En efecto, llamemos $TVM(f, a, b)$, *tasa de variación media de la función* f *en el intervalo* $[a, b]$, al resultado de dividir $f(b) - f(a)$ entre $b - a$. ¿Qué información nos da dicho número? Podemos interpretar $TVM(f, a, b)$ como la cantidad de la magnitud N que se aumenta en nuestro sistema de variación de magnitudes cuando en la magnitud M se aumenta 1, es decir, como la razón $TVM(f, a, b): 1$, que es la misma que la razón (f(b)-f(a)): (b-a). Análoga interpretación podemos hacer de $TVM(g, c, d)$.

Hemos de decir que, en ocasiones, se puede ver la TVM como una cierta cantidad de la *magnitud* '*cociente*' N/M, pero ese caso no lo abordaremos aquí.

Q_{12}: ¿Sirven las TVM para comparar la cantidad de crecimiento de $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x + 2$ en los intervalos [0,1] y [0,3], respectivamente?

$\mathcal{O}_{13}$: Sí. A pesar de que tenemos $TV(f,0{,}1)=2<3=TV(g,0{,}3)$, al calcular las correspondientes tasas de variación media se invierten las desigualdades: $TVM(f,0{,}1)=2<1=TVM(g,0{,}3)$, en coherencia con el hecho de que f crezca más en $[0{,}1]$ de lo que crece g en $[0{,}3]$.

I_{14}: La tasa de variación media sirve para comparar la cantidad de crecimiento en las funciones afines. En realidad, esta inferencia, respaldada por $\mathcal{O}_{13}$, no necesita mayor argumento porque, como hemos dicho antes, la propia definición de *tasa de variación media* podría verse como definición de *cantidad de crecimiento*. Observemos también que, si $f(x)=mx+n$ es una función afín arbitraria y $[a,b]$ es un intervalo cualquiera, entonces $TVM(f,a,b)=\frac{mb+n-ma-n}{b-a}=\frac{m(b-a)}{b-a}=m$. Recordemos que este resultado nos está diciendo que la razón entre $f(b)-f(a)$ (una cantidad de N) y $b-a$ (una cierta cantidad de M), es decir, lo que aumentamos en N cuando en M aumentamos $b-a$, es de $m:1$. Así, el signo del coeficiente m de la función $f(x)=mx+n$ nos informa sobre el (de)crecimiento y su valor absoluto $|m|$ sobre la cantidad de (de)crecimiento.

A partir de ahora trabajaremos solo con la tasa de variación media, pues parece más ventajoso. En efecto, el signo de la TVM coincide con el de la correspondiente TV (pues la TVM se calcula a partir de la TV dividiendo por un número positivo), y, además, allí donde falla la TV (en la comparación de la cantidad de crecimiento), triunfa la TVM.

Lo que muestra la respuesta del Oráculo ante la pregunta Q_4 del Indagador es que la técnica de la TV (y, por lo tanto, de la TVM) no ayuda a responder la pregunta $XQ_{0.1}$ en algunos casos porque solo tiene en cuenta lo que ocurre con la función en los extremos del intervalo, olvidando lo que ocurre en su interior. Además, aparentemente, este problema no se soluciona dividiendo el intervalo $[a,b]$ en diferentes subintervalos $[a,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup\ldots\cup[x_{n-1},b]$ y mirando el signo de la TVM en cada uno de esos subintervalos, pues en cada uno de ellos el problema podría persistir.

¿O no es exactamente así? Para responder a esta pregunta debemos tener en cuenta la noción de *grado de precisión*, que asumíamos presente en el equipamiento praxeológico inicial del Indagador. Llamamos ε al grado de precisión en nuestro trabajo con la magnitud N.

Veamos cómo usar el hecho de que en el manejo efectivo de las magnitudes exista el grado de precisión. Dada una función f, llamaremos *tasa de variación puntual en* a *por la* *derecha*, y escribimos $TVP^+(f,a)$, a la $TVM(f,a,a+h)$ con h una cantidad de magnitud M *suficientemente pequeña*. Análogamente, llamaremos *tasa de variación puntual en* a *por la izquierda*, y escribimos $TVP^-(f,a)$, a la $TVM(f,a-h,a)$ con h una cantidad de magnitud M *suficientemente pequeña.*

XQ_{15} : Observemos que, si f es afín, tendremos que $TVP^+(f,a) = TVP^-(f,a) = TVM(f,a,b)$ para cualquier intervalo $[a,b]$. Ahora bien, ¿aporta algo nuevo la TVP en el caso de los polinomios de grado superior a 1?

Q_{16}: ¿Cuál es $TVP^+(f,a)$ y $TVP^-(f,a)$ con $f(x) = x^2$ y a arbitrario?

$\mathcal{O}_{17}$: Tenemos $TVP^+(f,a) = 2a + h$ y $TVP^-(f,a) = 2a - h$, es decir, la razón entre $f(a+h) - f(a)$ y h es de $2a + h$, y la razón entre $f(a) - f(a-h)$ y h es de $2a - h$. Así, a la derecha de a, cada vez que aumentamos 1 de M aumentamos $2a + h$ de N, es decir, el cambio que experimentan las cantidades de la magnitud N cuando cambian las cantidades de la magnitud M a la derecha de a obedece a la razón de $2a + h$ a 1. Y, a la izquierda de a, cada vez que aumentamos 1 de M aumentamos $2a - h$ de N. Ahora bien, recordemos que hemos tomado h *suficientemente pequeño*. ¿Qué significa eso? Que es tan pequeño como para que la diferencia entre $2a + h$ y $2a$ sea menor que ε, y lo mismo para la diferencia entre $2a - h$ y $2a$. Así, si tomamos h suficientemente pequeño, podemos decir que $TVP^+(f,a) = TVP^-(f,a) = 2a$, es decir, que tanto a la derecha como a la izquierda de a, la función f se comporta como si por cada aumento en 1 de M hubiera un aumento de $2a$ de N. Esto nos dice que, en un entorno de a, la función $f(x) = x^2$ será creciente si $a > 0$, y será decreciente si $a < 0$. Esto es coherente con la representación gráfica de $f(x) = x^2$ según la cuál la función decrece hasta el 0 y crece a partir de ahí.

Observemos que ha sido clave poder tomar h tan pequeño como para que la diferencia entre $TVP^+(f,a)$ o $TVP^-(f,a)$, vistos como cantidades de N, y lo que queda de eliminar los monomios con h, sea menor que el grado de precisión ε de N. Además, si podemos tomar h tan pequeño como queramos, también conseguimos $TVP^+(f,a) = TVP^-(f,a)$.

Sigamos explorando para grados superiores.

Q_{18}: ¿Cuál es $TVP^+(f,a)$ y $TVP^-(f,a)$ con $f(x) = x^3$ y a arbitrario?

$\mathcal{O}_{19}$: $TVP^+(f,a) = 3a^2 + 3ah + h^2$. Observemos que, si h es suficientemente pequeño, la cantidad $3ah + h^2$ de magnitud N se puede considerar despreciable, menor que el grado de precisión ε con el que manejamos N. Como consecuencia, tenemos que $|TVP^+(f,a) - 3a^2| =$

$|3ah + h^2| < \varepsilon$, es decir, $TVP^+(f,a) = 3a^2$. Análogamente, $TVP^-(f,a) = 3a^2$. Así es que, para toda cantidad a de M, tenemos que las tasas de variación puntual a izquierda y derecha coinciden, $TVP^+(f,a) = TVP^-(f,a) = 3a^2$. Esto nos dice que $f(x) = x^3$ será creciente (respectivamente, decreciente) en entornos pequeñitos de valores a para los que $3a^2 > 0$ (respectivamente, $3a^2 < 0$). Concluímos entonces que $f(x) = x^3$ no será decreciente nunca, y que será creciente en los valores $a \neq 0$.

Cuando, para una función f y un valor a de M, tengamos $TVP^+(f,a) = TVP^-(f,a)$, llamaremos a ese valor *tasa de variación puntual en* a *de* f, y la denotamos por $TVP(f,a)$.

XQ_{20}: ¿Se tiene para todos los polinomios f que $TVP^+(f,a) = TVP^-(f,a)$ para todo a?

Q_{21} y $\mathcal{O}_{22}$: Se le puede hacer varias consultas al Oráculo con relación a polinomios concretos, y ver que, en efecto, para esos casos la tasa de variación puntual a derecha coincide con la tasa de variación puntual a izquierda.

I_{23}: Estas consultas al Oráculo parece que apoyan una respuesta positiva a la pregunta XQ_{20}. De todos modos, se puede dar un argumento aún más satisfactorio, mediante cálculos algebraicos, para probar que para un polinomio $f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ se tiene que $TVP^+(f,a) = TVP^-(f,a) = \sum_{i=0}^{n} c_i i a^{i-1}$. Tenemos entonces que, para un polinomio $f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$, en pequeños entornos de valores a para los que la cantidad $TVP(f,a) = \sum_{i=0}^{n} c_i i a^{i-1}$ sea positiva (respectivamente, negativa), la función f será creciente (respectivamente, decreciente). Dicho de otro modo, el estudio del crecimiento o decrecimiento de f se reduce al estudio de cuándo la función $x \mapsto TVP(f,x)$ es positiva o negativa. A esta función, la denominamos *función derivada de* f y la denotamos por $f'(x)$.

Resumimos el juego de indagación con el siguiente listado de jugadas:

- $XQ_{0.1}$: ¿cómo detectar el (de)crecimiento?
- XQ_1: ¿sirve la TV para detectar el (de)crecimiento?
- Q_2: misma pregunta para una función afín concreta.
- $\mathcal{O}_3$: la TV sí funciona para esa función afín concreta.
- Q_4: pregunta para una parábola concreta.
- $\mathcal{O}_5$: la TV no funciona para esa función parábola concreta.
- I_6: la TV detectar el (de)crecimiento de funciones afines, pero no en general.

- $XQ_{0.2}$: ¿cómo comparar la cantidad de (de)crecimiento?
- XQ_7: ¿sirve la TV para comparar la cantidad de (de)crecimiento?
- Q_8: misma pregunta para dos funiones afines concretas.
- $\mathcal{O}_9$: la TV no sirve para comparar la cantidad de (de)crecimiento de esas dos funciones concretas.
- I_{10}: la TV no sirve para comparar la cantidad de (de)crecimiento de esas dos funciones.
- XQ_{11}: ¿sirve la TVM para comparar la cantidad de (de)crecimiento?
- Q_{12}: misma pregunta para dos funciones afines concretas.
- $\mathcal{O}_{13}$: la TVM sí sirve para esa función afín concreta.
- I_{14}: la TVM sí sirve para comparar la cantidad de (de)crecimiento de funciones afines. De hecho, la TVM nos acerca a una matematización de la idea de 'cantidad de (de)crecimiento'.
- XQ_{15}: ¿sirven TVP^+ y TVP^- para detectar el (de)crecimiento de polinomios de cualquier grado?
- Q_{16}: misma pregunta para una parábola concreta.
- $\mathcal{O}_{17}$: sí funcionan para esa parábola concreta, y se tiene $TVP^+ = TVP^-$.
- Q_{18}: misma pregunta para un polinomio concreto de grado 3.
- $\mathcal{O}_{19}$: sí funcionan para ese polinomio de grado 3, y se tiene $TVP^+ = TVP^-$.
- XQ_{20}: ¿se tiene $TVP^+ = TVP^-$ para cualquier polinomio?
- Q_{21}: misma pregunta para polinomios concretos.
- $\mathcal{O}_{22}$: respuesta afirmativa para dichos polinomios.
- I_{23}: mediante un argumento inductivo llegamos a una respuesta positiva para XQ_{20}. Más aún, en el transcurso de las preguntas Q_{21} y las respuestas $\mathcal{O}_{22}$ podemos llegar a la fórmula general de $TVP(f, a)$ para un polinomio f general. El estudio del (de)crecimiento de f se reduce al estudio del signo de la función $a \mapsto TVP(f, a)$.

Los fenómenos didácticos en el juego de indagación

Nos parece importante decir que el juego de indagación que acabamos de presentar se puede ver no solo como un medio para alcanzar fines educativos pedagógicos, que se sitúan por encima de las disciplinas. Por ejemplo, promover una construcción del conocimiento como resultado de procesos de indagación. Además, podemos contemplar el juego de indagación como un medio para abordar fenómenos didácticos propios del nivel matemático. Por ejemplo, sacar a la luz el papel meramente 'decorativo' que desempeña la noción de *límite funcional* y, en particular, la noción de *derivada de una función*, en la última etapa de la enseñanza secundaria (BARBÉ et al., 2005). En efecto, en nuestro juego de indagación asignamos a una posible reconstrucción de la noción de derivada, una razón de ser práctica mostrando que las técnicas propias del cálculo diferencial se pueden ver como la solución concebida por el ser humano para superar las limitaciones del cálculo algebraico en el estudio de la covariación de dos magnitudes continuas.

JUEGO DIDÁCTICO DE INDAGACIÓN

Contexto

Echemos un vistazo a un juego didáctico de indagación experimentado por Patricia Bochaca, profesora de Matemáticas de Educación Secundaria en España, con uno de sus grupos, constituido por unos 20 de estudiantes de alrededor 16 años. Por razones de espacio, solo expondremos parte del juego, que en su totalidad se llevó a cabo a lo largo de dos semanas. En este juego las respuestas del oráculo fueron producidas por cálculos y ejemplos realizados por los alumnos.

Nomenclatura

Mantenemos la nomenclatura usada para los juegos de indagación. Además, denotamos a los movimientos del profesor mediante Y_n. Nótese que el primer movimiento del profesor, Y_0, consiste en plantear la cuestión inicial (o cuestión generatriz) XQ_0.

Cuestión inicial

El profesor dice: «Imagina que tenemos un sintetizador que emite sonidos cuyo volumen se rija por la función $f(x) = 1.25 \cdot x^3 - 15 \cdot x^2 + 45 \cdot x + 40$. Así, los valores de x son la cantidad de tiempo (medida en minutos) y los valores de $f(x)$ son la cantidad de volumen (medida en decibelios) en el momento x. Imagina que queremos usar este sonido en una película. ¿Cómo cambia el volumen en los primeros 10 minutos? ¿Aumenta o disminuye? ¿En qué intervalos aumenta y en cuáles disminuye?». Es importante notar los siguientes hechos: 1) el profesor sugiere considerar otros polinomios a lo largo de la indagación, y 2) es crucial para el proceso de indagación que x y $f(x)$ sean cantidades de ciertas *magnitudes*. Estos dos hechos son rápidamente evidentes para los estudiantes, y son refrendados por comentarios de la profesora. Por lo tanto, la verdadera cuestión (abstracta) de la indagación, $XQ_0 = Y_0$, es:

Sea f un polinomio que describe la relación entre dos magnitudes, la controlada x y la observable $f(x)$, involucradas en un contexto dado. Sea $[a, b]$un intervalo de cantidades de la magnitud correspondiente a x. ¿Cuáles son los subintervalos en los que $f(x)$ disminuye o aumenta?

Equipamiento praxeológico de partida

l Indagador da por sentado que:

- T_1: La gráfica de un polinomio $f(x) = mx + n$ es una línea recta. Creciente si $m > 0$ y decreciente si $m < 0$. La cantidad $|m|$ da información sobre cuánto aumenta o disminuye $f(x)$ cuando x aumenta una unidad.
- T_2: Un polinomio $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ es una parábola cóncava hacia arriba (respectivamente, hacia abajo) si $a > 0$ (respectivamente, $a < 0$), y tiene un mínimo (respectivamente, máximo) en $x = \frac{-b}{2a}$, siendo el correspondiente punto de la gráfica el *vértice* de la parábola. Las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ vienen dadas por la fórmula $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$.
- T_3: Cuando trabajamos en la práctica con cantidades de magnitudes, utilizamos la noción de *grado de precisión*. Cuando para dos cantidades α y β de una magnitud dada tenemos que $|\beta - \alpha|$ es más pequeño que el grado actual de precisión, escribimos ‘$\alpha \simeq \beta$’.

Desarrollo del proceso de indagación

Q_1: ¿Cuáles son los valores de $f(x)$ para $x = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$?

O_2:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	40	71.25	80	73.75	60	46.25	40	48.75	80	141.25	240

I_3: En el intervalo $[0,10]$ la función f alcanza un máximo global en $x = 2$ y un mínimo global en $x = 6$.

XQ_4: ¿Cada polinomio de grado 3 tiene dos extremos locales? En general, ¿cada polinomio de grado n tiene $n - 1$ extremos locales? Los alumnos esperan una respuesta afirmativa. Esta expectativa está apoyada por T_1 (que da una respuesta positiva para $n = 1$), por T_2 (que da una respuesta positiva para $n = 2$), y por I_3 (que da una respuesta positiva para $n = 3$ en el caso particular del polinomio allí considerado).

Si XQ_4 admite una respuesta afirmativa, entonces habría una estrategia para responder a XQ_0. De hecho, una vez que tengamos los extremos locales, tendríamos los subintervalos de crecimiento/ decrecimiento. Esto nos lleva a otra cuestión de investigación, XQ_5.

XQ_5: ¿Existe una fórmula para calcular los extremos locales de un polinomio en términos de los coeficientes?

Y_6: Los alumnos no saben cómo abordar XQ_5. Entonces la profesora les propone considerar XQ_0 para $g(x) = 0.3 \cdot x^3 - 3.65 \cdot x^2 + 2.1 \cdot x + 65$.

Q_7: ¿Cuáles son los valores de $g(x)$ para $x = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$?

O_8:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g(x)$	65	63.75	57	46.55	34.2	21.75	11	3.75	1.8	6.95	21

I_9: $g(x)$ es decreciente en $[0,8]$ y creciente en $[8,10]$, de modo que $g(x)$ alcanza un mínimo en $x = 8$.

$Y_{10} = Q_{10}$: Cuáles son los valores de $g(x)$ para $x = 0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1$?

O_{11}:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$g(x)$	65	65.17	65.28	65.31	65.28	65.18	65.01	64.78	64.5	64.15	63.75

I_{12}: Esta respuesta conduce a una *refutación de la conjetura* I_9 y obliga al Indagador a revisar I_3.

Y_{13}: Parece que el problema proviene del hecho de considerar intervalos susceptibles de particiones significativas adicionales, intervalos dentro de los cuales la función aún crecía o decrecía de manera perceptible, es decir, por encima de nuestro grado de precisión. Consideremos entonces intervalos del tipo $[a, a+t]$ o $[a-t, a]$ con t 'suficientemente pequeño'. Tratemos de averiguar cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento del polinomio $h(x) = x^3 - 8 \cdot x^2 + 13 \cdot x + 44$ en el intervalo $[0,10]$ utilizando intervalos suficientemente pequeños.

Q_{14}: Sea a un valor entre 0 y 10. Sea t una cantidad de tiempo muy pequeña. Ahora queremos saber el signo de las diferencias $h(a) - h(a-t)$ y $h(a+t) - h(a)$. Dependiendo de este signo, tendremos:

	$h(a) - h(a-t)$	$h(a+t) - h(a)$
Creciente en la práctica	$+$	$+$
Decreciente en la práctica	$-$	$-$

Con "(de)creciente en la práctica" queremos decir que la función es (de)creciente al menos midiendo las cantidades de magnitud según el grado de precisión manejado. Así, es posible que con un grado de precisión mayor, cambiáramos nuestro juicio sobre el comportamiento de la función en los intervalos $[a-t, a]$ y $[a, a+t]$.

Desafortunadamente, el Oráculo no puede decirnos directamente cuáles son los signos requeridos, sino únicamente cuáles son los resultados de las operaciones $h(a) - h(a-t)$ y $h(a+t) - h(a)$ en función de a y t.

O_{15}: Las respuestas del Oráculo son: $h(a) - h(a-t) = t^3 - 3at^2 + 3a^2t - 16at + 8t^2 + 13t$ y $h(a+t) - h(a) = 3a^2t + 3at^2 + t^3 - 16at - 8t^2 + 13t$.

I_{16}: Pero, aun así, ¿cómo saber el signo de estas diferencias? Notemos que si asumimos que t es suficientemente pequeño, entonces podemos ignorar los monomios que contienen t puesto que no representarían una cantidad significativa de decibelios. Por ejemplo, si $t = 0.001$dB, entonces $t^3 = 0.000000001$ dB y $3a^2t < 3 \cdot 10^2 \cdot 0.001 = 3$ dB, que es una cantidad inaudible de volumen. Pero si ignoramos todos los monomios que contienen t, obtenemos: $h(a) - h(a-t) \simeq 0 \simeq h(a+t) - h(a)$. Por lo tanto, la estrategia de ignorar simplemente los monomios que contienen t en las diferencias $h(a) - h(a-t)$ y $h(a+t) - h(a)$ no funciona.

Y_{17}: Podemos considerar no solo $h(a+t) - h(a)$ sino la razón entre $h(a+t) - h(a)$ y t (que es la amplitud del intervalo $[a, a+t]$). Para obtener información sobre esa razón podemos considerar la división $\frac{h(a+t)-h(a)}{t}$. Ese cociente será positivo (respectivamente, negativo) si y solo si $h(a+t) - h(a)$ es positivo (respectivamente, negativo). Análogamente con $h(a) - h(a-t)$.

Q_{18}: Calcular $\frac{h(a)-h(a-t)}{t}$ y $\frac{h(a+t)-h(a)}{t}$.

O_{19}: Tenemos que $\frac{h(a)-h(a-t)}{t} = t^2 - 3at + 3a^2 - 16a + 8t + 13$, y

$$\frac{h(a+t)-h(a)}{t} = 3a^2 + 3at + t^2 - 16a - 8t + 13.$$

Y_{20}: Observemos que $h(a+t) - h(a)$ nos indica la variación de volumen cuando el tiempo se mueve en el intervalo $[a, a+t]$. Al dividir $h(a+t) - h(a)$ por t, que es la amplitud del intervalo, obtenemos la constante de proporcionalidad, dada en decibelios por minuto, dB/min, que nos indica que la variación de volumen en el intervalo $[a, a+t]$ es la misma que hay si en 1 minuto el volumen hubiera variado $3a^2 + 3at + t^2 - 16a - 8t + 13$ decibelios. Usamos ahora el hecho de que podemos suponer t tan pequeño como queramos. En ese caso, tenemos que $3a^2 + 3at + t^2 - 16a - 8t + 13 \simeq 3a^2 - 16a + 13$, porque la diferencia entre ambas cantidades de volumen es de $3at + t^2 - 8t$, y supongo que t es tan pequeño como quiera, entonces $3at + t^2 - 8t \simeq 0$ por estar por debajo del grado de precisión que manejamos cuando trabajamos con la magnitud volumen.

Q_{21}: Haciendo el mismo razonamiento, ¿qué obtenemos para $\frac{h(a)-h(a-t)}{t}$?

O_{22}: $\frac{h(a)-h(a-t)}{t} \simeq 3a^2 - 16a + 13$

Y_{23}: Observemos que tenemos $\frac{h(a)-h(a-t)}{t} \simeq \frac{h(a+t)-h(a)}{t}$.

Llamamos $h'(a)$ a este polinomio en a.

Y_{24}: Estudiemos el signo para algunos valores de a.

Q_{25}: ¿Qué valor obtenemos para $h'(0)$?

O_{26}: Tenemos $h'(0) = 13 > 0$.

Y_{27}: Esto nos dice que el aumento que experimenta h alrededor de 0 es análogo al que resultaría de aumentar 13 decibelios en un minuto.

Q_{28}: ¿Qué valor obtenemos para $h'(1)$?

O_{29}: Tenemos $h'(1) = 0$.

Y_{30}: Esto nos dice que el aumento que experimenta h alrededor de 1 es análogo al que resultaría de aumentar 0 decibelios en un minuto. Así es que h es constante alrededor de 1.

Y_{31}: Podemos estudiar el signo siguiendo un enfoque global. Sabemos que $3a^2 - 16a + 13$ es una parábola cóncava hacia arriba…

Q_{32}: ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $3a^2 - 16a + 13 = 0$?

O_{33}: Son $a = 1$ y $a = 4.333$ (ponemos tres decimales significativos para los minutos por considerar que cantidades de tiempo menores que una milésima de minuto son imperceptibles).

I_{34}: Esto implica que

	$a < 1$	$1 < a < 4.333$	$4.333 < a$
$3a^2 - 16a + 13$	$+$	$-$	$+$

Y entonces

	$a < 1$	$1 < a < 4.333$	$4.333 < a$
h	crece	decrece	crece

En el punto $a = 1$ tenemos que h pasa de crecer a decrecer y, por lo tanto, $a = 1$ parece ser un máximo (local). Por otro lado, en el punto $a = 4.333$ tenemos que h pasa de decrecer a crecer y, por lo tanto, $a = 4.333$ parece ser un mínimo (local). Luego, los alumnos aplican la misma técnica a los polinomios f y g.

El juego didáctico continuó más allá de lo que exponemos aquí. En particular, con la noción de derivada de un polinomio disponible, se abordó la pregunta XQ_5 para polinomios de grado 3. También se exploró cuáles podían ser las funciones derivadas de funciones no polinómicas. Pero no hablaremos de todo eso aquí.

En cualquier caso, la indagación termina encontrando una respuesta a la cuestión inicial XQ_0 lo que refuerza el equipamiento praxeológico de partida, ampliándolo, además, con los siguientes nuevos elementos:

T_4: Si f es un polinomio, tenemos que $\frac{f(a)-f(a-t)}{t} \simeq \frac{f(a+t)-f(a)}{t}$ para cualesquiera cantidades de magnitud a y t, siendo t suficientemente pequeño. Este cociente nos da un número que denotamos por $f'(a)$. Este cálculo de $f'(a)$ a partir de a define una función $a \mapsto f'(a)$.

T_5: Si f alcanza en $x = a$ un máximo o un mínimo (local), entonces tenemos que $f'(a) = 0$.

T_6: Después de estudiar los intervalos de crecimiento/decrecimiento de f, debe quedar claro si un punto $x = a$ para el cual tenemos $f'(a) = 0$ es (o no es) un máximo o un mínimo local de f.

T_7: Dada una función polinómica, $f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_2x^2 + c_1x + c_0$, la función que le corresponde, $f'(x)$, es también polinómica y puede ser calculada a partir de f utilizando el siguiente procedimiento formal: $f'(x) = nc_nx^{n-1} + (n-1)c_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2c_2x + c_1$.

A pesar de que existen argumentos a favor de T_4 y T_7 que hacen uso de cálculos algebraicos, los empleados por los alumnos en este caso son puramente inductivos, es decir, basados en el hecho de que estas afirmaciones universales se cumplen en varios casos particulares.

CONCLUSIONES

En la investigación descrita anteriormente, el Indagador pudo mejorar el equipamiento praxeológico inicial con nuevos elementos que permiten una respuesta satisfactoria (según la comunidad de estudio involucrada) a la pregunta XQ_0. En este sentido, podríamos decir que la investigación fue exitosa.

En cuanto al primero de los problemas docentes, YQ_1: *¿qué debe hacer el profesor para ayudar a los estudiantes a reconstruir un conocimiento preestablecido a través de un proceso indagatorio*?, uno de los factores que contribuyó al éxito del profesor, es que este tenía por adelantado un juego de indagación que desempeñaba el papel de MER. Este juego de indagación describe muchas estrategias posibles que el Indagador podría probar y deja claro que un Indagador virtual tiene una *estrategia ganadora*, es decir, una serie de movimientos que conducen a una respuesta a la cuestión inicial.

Esto no implica, como se ha visto, que el juego didáctico de indagación deba estar condenado a seguir al pie de la letra los caminos marcados por el juego de indagación. Cuánto se desvíe el juego didáctico de indagación del juego de indagación es entera decisión del docente. Por ejemplo, en cierto momento, el juego didáctico de indagación empieza evaluando las funciones f y g en muchos puntos ($Q_1, \mathcal{O}_2, Q_7, \mathcal{O}_8, Q_{10}, \mathcal{O}_{11}$) y obteniendo a partir de ahí inferencias erróneas (I_3 e I_{11}). Esas jugadas no estaban contempladas en el juego de indagación. También son inéditas las preguntas del juego didáctico XQ_4 y XQ_5, sobre el número de extremos locales de un polinomio y sobre la existencia de una fórmula para calcularlos. Por otro lado, aunque se trabaja con ellas, las nociones de tasa de variación, tasa de variación media y tasa de variación puntual no fueron objeto de estudio teórico en el juego didáctico.

El segundo de los problemas docentes planteados, YQ_2: *¿qué debe hacer el profesor para ayudar a desarrollar habilidades de indagación*?, consiste, como dijimos, en desarrollar la capacidad de distinguir entre preguntas fructíferas e infructuosas (lo que depende del contexto específico en el que se lleva a cabo el juego). A esto precisamente se dedicaron la mitad de los movimientos de la profesora (6 de los 10 descritos aquí). En efecto, Y_6 sirvió para que los alumnos olvidaran momentáneamente ciertas preguntas que, en ese punto de la indagación, eran poco prometedoras (XQ_4 y XQ_5, que se abordarían más adelante), y sirvió también para proveer a los alumnos de material empírico significativo (un nuevo polinomio, g, que iba a servir para poner en duda la inferencia I_3).

El movimiento Y_{10} sirvió para que los alumnos evaluaran el polinomio g en puntos entre 0 y 1. El movimiento Y_{13} sirvió para que los alumnos estudiaran las diferencias $h(a) - h(a-t)$ y $h(a+t) - h(a)$ pensando en una t 'suficientemente pequeña'. El movimiento Y_{17}

sirvió para que los alumnos pasaran a considerar proporciones entre diferencias, en vez de simplemente diferencias. El movimiento Y_{24} sirvió para que se comprobara el signo de $h'(a)$ para ciertos valores concretos de a. El movimiento Y_{31} sirvió para que los alumnos representaran la parábola $h'(a)$. Estos 6 movimientos están principalmente vinculados a impulsar la *praxis* de los alumnos. Los otros cuatro movimientos se dedicaron sobre todo a promover desarrollos en el *logos*. En efecto, Y_{20} les ofreció a los alumnos una interpretación útil de los cocientes de las diferencias. El movimiento Y_{23} consistió en observar que la tasa de variación puntual por la derecha coincide con la tasa de variación puntual por la izquierda en el caso del polinomio considerado. Y los movimientos Y_{27} e Y_{30} ofrecieron interpretaciones adecuadas de las respuestas del Oráculo $\mathcal{O}_{26}$ y $\mathcal{O}_{29}$.

Es importante observar que estos movimientos de la profesora fueron posibles gracias a la consideración previa del juego de indagación. Como sugiere nuestro ejemplo, cuando tratamos con una investigación real, las estrategias de los profesores formuladas en el nivel pedagógico no parecen ser muy relevantes. Por el contrario, la existencia de una estrategia didáctica fructífera parece basarse en una descripción matemática explícita a *priori* (en términos de preguntas, respuestas, inferencias conjeturales y refutaciones) de los posibles recorridos de una investigación (virtual pero realista). Se trata, como hemos indicado anteriormente, de un *modelo epistemológico de referencia* (MER) de dicho conocimiento esquematizado en forma de juego de indagación.

Por supuesto, para un determinado dominio de conocimiento, pueden construirse diferentes MER dependiendo del fenómeno que se pretenda sacar a la luz y del tipo de problemas didácticos que se pretenda formular y abordar. En nuestro caso, el MER descrito en ABELLÁN (2016) tenía como *objetivo subdisciplinar* mostrar que un proceso de estudio sustentado en dicho MER permite a la comunidad de estudio poner en marcha técnicas de cálculo que permiten superar las limitaciones de las técnicas aritmético-algebraicas cuando se trata de llevar a cabo ciertos tipos de tareas. Pero, al mismo tiempo, al mostrar la posibilidad de instaurar un proceso de indagación, se cumple un *objetivo pedagógico* porque se supera (localmente) el *monumentalismo* imperante en la organización didáctica escolar en un dominio particular.

Hemos mostrado que el paradigma pedagógico del cuestionamiento del mundo (CHEVALLARD, 2013a, 2013b) conlleva verdaderos desafíos para la comunidad de

Educación Matemática y hemos esbozado posibles soluciones en los niveles disciplinar y subdisciplinar. El conocimiento matemático, en su forma estándar, aparece en los libros de texto como surgiendo de la nada, organizado según criterios formales relativos al análisis lógico (los libros de Bourbaki son ejemplos paradigmáticos). Esta presentación de las matemáticas es, por supuesto, un gran logro humano que contribuye a cierto tipo de aclaración conceptual y a evitar problemas lógicos. Sin embargo, no parece ser el tipo de presentación requerida por algunos paradigmas didácticos que están actualmente en auge en nuestras sociedades según los cuales la reconstrucción de las matemáticas mediante procesos de indagación sería urgente y originaría beneficios educativos. Con el fin de hacer compatible la fundamentación racional del conocimiento y el uso de la indagación como medio para reconstruir dicho conocimiento, hemos propuesto el paradigma de la modelización matemática que está basado en la indagación y cuya implementación permite estudiar cuestiones que surgen en sistemas de todo tipo (cuyas variables son magnitudes) y llevar a cabo una reconstrucción de las matemáticas mediante el uso de argumentos que, sin ser necesariamente deductivos, permiten fundamentar racionalmente el conocimiento matemático.

Agradecimientos:

Esta investigación se ha financiado por los proyectos I+D+i: RTI2018-101153-A-C22 (MCIU/AEI/FEDER, UE) y RTI2018-101153-B-C21 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

REFERENCIAS

ARTIGUE, M., & BAPTISTE, P. Inquiry in mathematics education. In S. Borda (Ed.), **Resources for implementing inquiry in science and mathematics at school**, 2012. Retrieved from: http://www.fibonacci-project.eu

ARTIGUE, M., & BLOMHØJ, M. Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. **ZDM Mathematics Education**, 45, 797 – 810, 2013.

ARTIGUE, M., DILLON, J., HARLEN, W., & LÉNA, P. **Learning Through Inquiry**. Fibonacci Project, 2012. Retrieved from: http://www.fibonacci-project.eu.

ABELLÁN, V. **Cálculo diferencial**. Master's Thesis, Universidad de Murcia, Spain, 2016.

BARBÉ, J., BOSCH, M., ESPINOZA, L. & GASCÓN, J. Didactic restrictions on the teacher's practice. The case of limits of functions in Spanish High Schools. **Educational Studies in Mathematics**, 59: 235-268, 2005. DOI: 10.1007/s10649-005-5889-z

BARQUERO, B., BOSCH, M. & GASCÓN, J. Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. **Educação Matemática-Pesquisa***,* 15(1), 1-28, 2013.

BOLEA, P. **El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares**, Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza, 2002.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations**. Dordrecht, The Netherlands: Springer, 2002.

BRUNER, J. S. **Toward a Theory of Instruction.** Cambridge: Harvard University Press, 1966.

CHEVALLARD, Y. Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente, *REDIMAT* – **Jounal of Research in Mathematics Education***,* Vol. 2, No. 2, 161-182, 2013a. DOI: 10.4471/redimat.2013.26

CHEVALLARD, Y. **La enseñanza de la matemática en la encrucijada: por un nuevo pacto civilizacional**. Curso impartido en la Universidad Nacional de Córdoba. Córdoba, Argentina, 2013b.

DURKHEIM, E. **Educació i Sociologia**. Barcelona: Eumo Editorial, 1924/1991.

GARCÍA, F. J. **La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales** (Tesis doctoral). Universidad de Jaén, 2005.

GARCÍA, F. J., GASCÓN, J., RUIZ HIGUERAS, L. & BOSCH, M. Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics, **ZDM Mathematics Education**, 38(3), 226-246, 2006.

GASCÓN, J.El papel de la Reoslución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas., **Educación Matemática**, 6 (3), 37 - 51, 1994.

GASCÓN, J. & NICOLÁS, P. Research ends and teaching ends in the anthropological theory of the didactic, **For the learning of mathematics***,* 39 (2), 42-47, 2019.

GASCÓN, J. & NICOLÁS, P. Paradigmas didácticos y reforma curricular: el caso de la teoría antropológica de lo didáctico, **Educação Matemática-Pesquisa***,* 22(4), 725-741, 2020.

GENOT, E., & GULZ, A. The interrogative model of inquiry and inquiry learning. In B. Can (Ed.), **Perspectives on Interrogative Models of Inquiry: Developments in Inquiry and Questions**. Springer, 2015.

HINTIKKA, J. A dialogical model of teaching. **Synthese,** 51, 39-59, 1982.

HINTIKKA, J., HALONEN, I., AND MUTANEN, A. Interrogative logic as a general theory of reasoning. In D. Gabbay, R. Johnson, H. Ohlbach, and J. Woods (Eds.), **Handbook of the Logic of Argument and Inference**, volume 1, 295–337. Amsterdam: Elsevier, 2002.

NICOLAS, P. Coneixements, arguments i magnituds, **Noubiaix**, Institut d'Estudis Catalans, (en prensa).

ROCARD, M., CSERMELY, P., JORDE, D., LENZEN, D., WALBERG-HENRIKSSON, H., & HEMMO, V. **L'enseignement scientifique aujourd'hui: une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe**. Commission Européenne, Direction général de la recherche, Science, économie et société, 2007.

SALA, G. & FONT, V. El papel de la modelización en una experiencia de enseñanza de matemáticas basada en indagación, **AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática** - 2019, 16, 73-85 2019.

THOMAS, G. **Education: A Very Short Introduction**. Oxford: Oxford University Press, 2013.