DEMOSTRACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS PARA TODOS

Mª CONSUELO CAÑADAS SANTIAGO

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se basa en dos pilares fundamentales: la gran diversidad de la muestra con la que se realiza la actividad que se presenta y la importancia de la demostración en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles del sistema educativo. La demostración ha sido, en ocasiones, pensada sólo para los niveles más elevados de las matemáticas y con esta actividad pretendemos mostrar cómo utilizamos distintas demostraciones del teorema de Pitágoras para detectar modos de razonamiento que ayuden a elaborar y organizar un plan de actuación.

CARACTERÍSTICAS GENERALES

El tratamiento educativo de la **diversidad** se centra en las diferencias individuales, observadas en las múltiples respuestas que dan distintos seres humanos ante una misma actividad educativa. Esta diversidad abarca sus conocimientos y experiencias previos; sus capacidades intelectuales, sus intereses y su actitud motivada ante la enseñanza.

La **educación de adultos** hace referencia a la educación de aquellas personas que han sobrepasado la edad de las enseñanzas básicas. Puede tener una doble finalidad:

- Reparadora o compensadora, para subsanar o recuperar las oportunidades.
- Superadora o incremental, con el propósito de mejorar los niveles culturales o profesionales. (ANPE Madrid, 1998)

Los principios en los que se basa la metodología del trabajo con personas adultas hace referencia a la motivación de las mismas. Participa en los programas educativos voluntariamente debido al deseo personal por aprender, una necesidad en relación con sus proyectos personales. Para atender a sus intereses, se trata de lograr un equilibrio entre el aprendizaje formal y abstracto, con el aprendizaje a partir de las propias experiencias. Por esto, si la idea inicial era usar la demostración para analizar algunos de sus razonamientos, teniendo en cuenta las características de la muestra, decidimos proponerles una actividad concreta en la que pudieran manipular los materiales.

Por otro lado, pese al creciente interés e importancia reconocidos por profesores e investigadores en educación matemática, la **demostración matemática** continúa siendo un obstáculo para estudiantes y profesores. No se consigue obtener rendimiento (o no tanto como el que se pretende) de una herramienta tan potente como la demostración.

La importancia dada a la demostración no es tan fuerte en los niveles elementales de la enseñanza. Para tratar de poner de manifiesto la utilidad de la demostración en niveles básicos, nos hemos centrado en el Teorema de Pitágoras, uno de los primeros que se dan a conocer a los estudiantes y del que se conocen numerosas demostraciones.

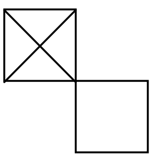
LA MUESTRA Y LA ACTIVIDAD PROPUESTA

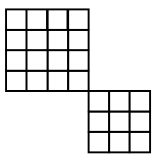
Se trabaja con un grupo de 25 alumnos –trabajadores del Personal de Administración y Servicios de la Universidad de Granada- inmersos en un proceso de educación de adultos del que esperaban una mejora de sus niveles cultural y profesional. La realización del curso les permitiría pasar a un grupo de categoría superior dentro de su profesión. La diversidad de la muestra es evidente tal y como se observa en las características que se señalan a continuación:

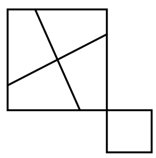
- Las edades están comprendidas entre 31 y 57 años. (Diversidad de edad)
- La actividad a la que se dedican es variada: limpieza, conserjería, jardinería, instalaciones deportivas o biblioteca. (Diversidad de trabajo)
- Han estado entre 2 y 41 años sin haber trabajado con las matemáticas como asignatura. (Diversidad de tiempo sin relación con la asignatura)
- 14 han cursado estudios básicos y 11 han alcanzado el grado medio (Bachillerato o FP). (Diversidad de grado de estudios realizado)

Las matemáticas se trabajan tres horas a la semana distribuidas en dos sesiones (una de dos horas y otra de una). No existía ningún programa elaborado previamente, aunque debían alcanzar unos conocimientos matemáticos equivalentes a los exigidos en la Enseñanza Obligatoria.

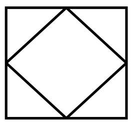
La actividad se lleva a cabo en una sesión de dos horas en las que se les explica la relación entre los enunciados analítico y geométrico del teorema de Pitágoras, y trabajan sobre el cuadernillo que se les entrega. Éste tiene dos partes: en la primera se les propone reconstruir la demostración geométrica del teorema de Pitágoras en tres propuestas distintas. En la segunda deben contestar a un cuestionario en el que se les pregunta por la demostración en general y por los tres casos que han trabajado y que se muestran a continuación:

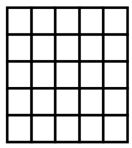
(1)


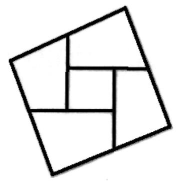
(2)


(3)


El objetivo era que construyan los siguientes cuadrados (sobre las hipotenusas de los triángulos rectángulos):

(1) 

(2) 

(3) 

LAS TRES DEMOSTRACIONES PROPUESTAS

Las tres demostraciones presentadas se pueden analizar desde distintos puntos de vista y encontramos que pertenecen al mismo conjunto de demostraciones: *no formales*, ya que están hechas por medio de dibujos, sin otro tipo de justificación, con lo que en principio, su generalización y validez son discutibles; son *geométricas* porque se basan en la comparación de áreas; y son demostraciones por *casos*, ya que en el razonamiento que se sigue, no hace referencia a cualquier triángulo rectángulo ya que son unas figuras geométricas prefijadas. (Ibañes y Ortega, 1997)

De todas las demostraciones de este teorema, se escogieron éstas porque pondrán de manifiesto unas características que permiten conocer el nivel de razonamiento abstracto al que trabajan los alumnos. El tamaño de las reconstrucciones que se les presentó era mayor que el que aquí se observa y los triángulos rectángulos tampoco tenían las mismas dimensiones en (1), (2) y (3) porque esto podía haber llevado a pensar que sólo eran válidas para triángulos rectángulos isósceles – como ocurre en (1)-.

COMENTARIOS DE LOS RESULTADOS

En este apartado comentamos las respuestas y los razonamientos más significativos de la actividad. La primera observación es que, a pesar de haber trabajado previamente con los enunciados analítico y geométrico del teorema, inicialmente presentan dificultad para comprender la relación de éstos con la actividad. Unos no entienden la propuesta en sí, no saben qué hacer; mientras que otros, aunque ven clara la actividad, no la relacionan con el teorema de Pitágoras.

Desde el comienzo, dudan sobre el significado del término demostración. Hubo quien preguntó: "¿pero la demostración sirve para explicar o no tiene nada que ver?" A lo que se les remite a la segunda pregunta, en la que deben expresar lo que entienden por el término, pueden elegir distintos significados y no de forma única. 14 individuos de la muestra señalan más de un significado. De los 18 que la consideran comprobación (la opción más señalada), 15 llevan menos de 20 años sin haber estudiado matemáticas. 11 señalan la explicación como sinónimo de demostración. Con frecuencias inferiores pero igualmente significativas para nuestro trabajo, encontramos quienes consideran validación, argumentación y confirmación como sinónimos de demostración. Esto indica que los alumnos que más relación han tenido con las matemáticas en los últimos años, no se ciñen únicamente a la demostración formal a la que los matemáticos están acostumbrados y le ven más utilidades que el resto a la demostración matemática. Destacar también que ningún alumno considera la demostración como medio de justificación.

23 individuos de la muestra resuelven correctamente las tres propuestas. Dos alumnos no consiguen acabar la tercera, la misma que todos reconocen como la más difícil debido a la forma de las figuras y a la dificultad que encuentran para encajarlas. Estos dos alumnos son los que además presentan más dificultades para desarrollar el resto de la actividad y no habían trabajado con matemáticas desde que cursaron niveles elementales hace más de treinta años. Esto revela que en la capacidad para desarrollar razonamientos inductivos (nivel al que pertenecen las tres demostraciones) influye el tiempo que han estado alejados de las matemáticas y el nivel de estudios alcanzados –tal como en un principio se puede sospechar-.

En cuanto a la calificación de las actividades como demostraciones del teorema, en (1) sólo 3 alumnos detectan que es necesario que los catetos del triángulo rectángulo sean iguales para que la reconstrucción sea posible. Sin embargo, ni siquiera éstos derivan de esa idea que la demostración es válida sólo para casos particulares, no consideran esa característica como restrictiva para una demostración que califican de general. Todos tienen claro que (2) sí es demostración y la relacionaron inmediatamente con el enunciado geométrico del teorema de Pitágoras ya que asocian la representación usada con la medida de superficies y unidades cuadradas. La mayoría dudan del carácter demostrativo de (3).

CONCLUSIONES

Se ha puesto de manifiesto la posibilidad y el papel que puede desempeñar el trabajo con distintas demostraciones de un mismo teorema en una clase en la que la diversidad y un nivel básico de conocimientos matemáticos son dos de sus características. Esto muestra que la demostración y los razonamientos involucrados debieran ser tenidos en cuenta en la elaboración de unidades didácticas. Resulta enriquecedor considerar el papel que desempeña la demostración en el aula. En este caso han salido a la luz funciones como la verificación, la explicación y el descubrimiento, consideradas por deVilliers (1996) en su clasificación.

El carácter de generalidad de las demostraciones ha sido uno de los factores analizados por algunos alumnos en los razonamientos de las tres propuestas. Unos no consideran demostraciones aquéllas que sólo son válidas para algunos casos concretos; y otros aceptan la demostración como explicación al caso con el que se está trabajando en ese momento y eso es lo que imprime carácter demostrativo.

Según el grado de abstracción observado, es más adecuado trabajar con demostraciones informales o preformales, explicaciones intuitivas más que razonamientos lógicos aislados de hechos concretos. Y en cuanto al estilo, tiene mayor interés didáctico tratar demostraciones geométricas ya que resulta el más accesible a su nivel de razonamiento. Ejemplo de ello es que presentan dificultades al relacionar los enunciados analíticos y geométricos del teorema de Pitágoras, al representar con letras la longitud de un segmento o el área de una figura.

Con la realización de esta actividad trabajamos con otros tópicos distintos al Teorema de Pitágoras, por lo que se puede aprovechar la actividad para tratar cuestiones sobre las formas de figuras geométricas o el cálculo de áreas. También se puede usar este modo de trabajo como instrumento evaluador de los tópicos involucrados.

BIBLIOGRAFÍA

- ANPE MADRID. (1998), **Temario LOGSE. Elaboración Pedagógica**. Fotocomposición Cordero, Madrid.
- DEVILLIERS, M. (1996), **The Role and Function of proof in Dynamic Geometry**. Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education.
- IBAÑES, M & ORTEGA, T. (1997), **Mathematical Proofs: Classification and Examples for Use in Secondary Education**. Educación Matemática, 9, 2, 65-104.
- NCTM. (1972), **The Pythagorean Proposition**, Elisha Scott Lomis, NCTM Classics.