

analyse, nous avons sélectionné 7 collections dans chaque pays. L'analyse a porté sur les chapitres qui traitent des MTCD. Dans l'analyse présentée ici, nous avons cherché à observer 19 formes différentes de présentation de données dans des activités qui intègrent les MTCD dans les manuels scolaires. Nous savons que, pour la construction des concepts relatifs à la MTCD, un des éléments qui doit être pris en considération est la variété des formes selon lesquelles les données sont présentées. Nous observons que quelques formes sont plutôt utilisées tant dans les ouvrages sélectionnés au Brésil qu'en France. Nous observons quelques limitations comme le diagramme en boîte qui n'est présenté que dans les livres en France. Dans les deux pays, nous avons aussi relevé des formes peu ou pas utilisées. Nous considérons qu'une plus grande variété de formes d'utilisation enrichit les activités qui concernent les MTCD présentées dans les livres et accroît le niveau de conceptualisation. En nous appuyant sur le cadre de l'A.S.I. nous avons tenté d'explicitier des propriétés des ouvrages qui pourraient permettre d'interpréter les intentions pédagogiques des auteurs.

Mots clé: *Mesures de tendance centrale, Mesures de dispersion, Formes de présentation des données, Théorie des champs conceptuels, Enseignement secondaire du second cycle (lycée).*

Introdução

A Estatística pela sua importância na formação do cidadão vem ampliando a sua participação na educação escolar. Nos anos 80, pudemos observar o destaque dado a esta pelo documento “agenda para ação” apresentado pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) dos Estados Unidos. Neste documento temos um conjunto de orientações para o ensino de Matemática que destaca a “importância de trabalhar com um amplo espectro de conteúdos, incluindo já no ensino fundamental, por exemplo, elementos de estatística, probabilidade e combinatória, para atender a demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos” (BRASIL, 1998, p.20). Esse documento influenciou reformas em diversos países. Tanto no Brasil como na França, a Estatística é vista atualmente desde o ensino fundamental nos programas e livros didáticos.

A Estatística é dividida em duas grandes áreas: a Estatística descritiva e a Estatística inferencial. Na Estatística descritiva, temos um conjunto de conceitos fundamentais que são as medidas de tendência central e de dispersão. Observamos diversos estudos realizados no mundo que apontam para deficiências na aprendizagem da média aritmética, a exemplo de Pollatsek et al (1981), Mevarech (1983); Strauss e Bichler (1988) Goodchild (1988), Zawojewsky (1988), Li e Shen (1992), Cai (1995), Gal (1995), Mokros e Russell (1995), Watson (1996), Batanero (2000), Cazorla (2002), Stella (2003), Lima (2005) e Gitirana et al (2010). Também observamos pesquisas que tratam tanto da média como da mediana e da moda. Estas também identificam

deficiências associadas aos processos de ensino e de aprendizagem, a exemplo de Mayén et al (2007), Mayén (2009) e Merino (2003). A nossa pesquisa se insere em um quadro novo, uma vez que procura abordar a questão das medidas de tendência central junto com as de dispersão e analisar um conjunto de conceitos referentes a essas medidas. Neste artigo, procuramos observar mais especificamente as formas de apresentação dos dados em atividades que envolvem as medidas de tendência central e de dispersão.

Existem diversas formas de apresentar os dados em atividades⁴ resolvidas e propostas nos livros didáticos que envolvem as medidas de tendência central e de dispersão. Levantamos algumas destas para analisar os livros didáticos.

A escolha do livro didático se deve à sua importância no processo de transposição didática. O livro didático organiza o programa anual em partes, formando os capítulos para serem abordados dentro do tempo escolar. Ele também serve como material de referência pelos professores, como destacado pela OCEM (BRASIL, 2006, p.86) “o livro didático vem assumindo, há algum tempo, o papel de única referência sobre o saber a ser ensinado, gerando, muitas vezes, a concepção de que ‘o mais importante no ensino da matemática na escola é trabalhar o livro de capa a capa’”.

Na nossa análise, escolhemos livros didáticos do ensino médio no Brasil e na França. A escolha da França, além do Brasil, se deve pelas características dos programas destes dois países. Ao contrário do Brasil que apresenta orientações, na França o programa tem força de lei. Também destacamos a importância da França no desenvolvimento da didática da matemática fundamental (Chevallard, Bosch, Gascón, 2001) e pelos inúmeros estudos nesta área. O Brasil, por outro lado, apesar de não ter força de lei nos seus programas nacionais, no sentido que devem ser cumpridos à risca, possui um programa de avaliação dos livros didáticos (PNLD) que procura selecionar os melhores livros para serem adotados pelas escolas públicas. Dessa forma, em função das características de cada um destes países, esta pesquisa procurou observar tanto as semelhanças quanto as diferenças dos livros do ensino médio nestes dois países

Trataremos na próxima seção das teorias que dão suporte a nossa pesquisa.

⁴ Utilizamos o termo “atividade”, nesta pesquisa, como unidade de análise. No livro didático, existem questões propostas e resolvidas. Cada questão pode ter mais de uma atividade, por exemplo: *considerando as medidas 2, 4 e 5, determinar a média aritmética e a moda*. Consideramos neste caso duas atividades: determinar a média aritmética e a moda. Não abordamos se uma atividade prevista no livro trata-se de uma situação problema, um exercício, um problema aberto etc. Cada um destes termos remetem a diversos sentidos. Por exemplo, Prioret (2008) apresenta diversos sentidos para a palavra **problema** que vão do ponto de vista epistemológico, histórico, dos matemáticos, da didática da matemática, da psicologia, diferenciando os vários sentidos. Não entraremos nesta discussão.

Diferentes formas de apresentação dos dados, conceitos e desenvolvimento conceitual

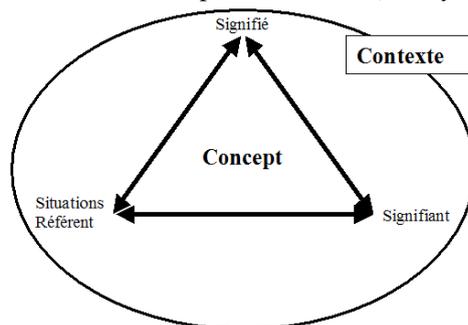
Nos apoiamos na teoria dos campos conceituais (Vergnaud, 1990, 1996, 2012) na qual para o desenvolvimento dos conceitos, faz-se necessário mobilizar esquemas. Podemos nos deparar com duas classes de situações. Na primeira já conhecida, mobilizamos esquemas já existentes. Na segunda, diante de uma situação nova, faz-se necessário um momento de reflexão e exploração, de tentativas que podem resultar no sucesso ou fracasso. Neste segundo momento, são utilizados vários esquemas na solução. Estes podem ser decompostos e recombinaados em um processo que normalmente acompanha descobertas. A riqueza das situações existentes pode ampliar um conceito. Assim, quando se apresenta um conjunto de três números e solicita-se o cálculo da média, o sucesso nesta atividade não significa o sucesso em uma outra, na qual no lugar de um conjunto de três números, teremos uma tabela com um maior número de observações que foram agrupadas em classes. Assim, no segundo caso, temos novos conceitos que estão associados à atividade. Temos a ideia de que podemos agrupar um conjunto de observações em classes. Esta nova situação pode levar a pensar na ideia de atributo, sem contudo um aprofundamento teórico da teoria dos atributos (Kendall e Yule, 1948). Além do conceito de observação, faz-se necessário, neste caso, utilizar o conceito de efetivo (Régnier, 2007) que possui o mesmo significado de frequência absoluta (Dodge, 2007).

Para Vergnaud (1990, p. 145, tradução nossa), um conceito é formado por um conjunto interligado de três elementos:

- **S** (situations, Référent): “um conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referência)”;
- **I** (signifié): “um conjunto de invariantes operatórios sobre os quais repousa a operacionalidade dos esquemas (o significado);
- **S** (signifiant): “um conjunto de formas verbais e não verbais que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante)”.

A figura seguinte (FIGURA 1) proposta por Acioly-Régnier (2010) acrescenta a definição prévia integrando a noção de contexto.

Figura 1. O conceito na teoria dos campos conceituais (Acioly-Régner, 2010, p.175).



Logo, consideramos que quando ampliamos o conjunto de situações que envolvem um conceito e que demanda novos esquemas e outros conceitos associados, como também novas formas verbais ou não verbais associadas à situação, podemos contribuir para o desenvolvimento do conceito. Por outro lado, podemos ter situações restritas que limitam à ampliação do conceito. Por exemplo, se numa sala de aula temos um professor que se limita ao uso das atividades propostas no livro didático, considerando que este livro se restringe a apresentar a média com um conjunto reduzido de observações não agrupadas, podemos ter o desenvolvimento do conceito desta medida bastante limitado pelos alunos desta sala de aula.

Cazorla (2002) na sua tese de doutorado, faz um levantamento de gráficos estatísticos mais utilizados (FIGURA 2). Podemos ter outras classificações que subdividem ou agrupam algumas destas. Contudo, para nossa pesquisa vamos considerar esta apresentada.

Uma das formas de apresentação indicadas nesta figura (FIGURA 2) é o diagrama chamado diagrama de caixa, ou seja boxplot de John W. Tukey (1977). Apontamos que J. W. Tukey contribuiu muito no desenvolvimento do uso de representações gráficas originais como também o diagrama de ramo e folha (Benjamini, 1988) (Rousseeuw, Ruts, Tukey, 1999). Este gráfico apresenta: o segundo quartil, ou seja, a mediana; o primeiro quartil e o terceiro; a amplitude, ou seja, a medida entre o valor máximo e o mínimo e o desvio interquartil. O diagrama de caixa pode ser utilizado, por exemplo, para comparar dois conjuntos de dados utilizando estes indicadores de tendência central e de dispersão. Podemos, com a utilização deste tipo de gráfico, ampliar o nível de conceptualização sobre as medidas de tendência central e dispersão utilizadas junto a este. Este gráfico consta no programa anterior para o segundo ano do ensino médio, na série científica na França (France, 2000) e no programa atual (France, 2010). Consideramos que o uso deste diagrama pode ampliar o nível de conceptualização sobre

a dupla mediana e desvio interquartil. Não obstante, vale salientar que a medida de dispersão mais congruente com a medida de posição que é a mediana, é o desvio médio absoluto relativamente à mediana, ou seja, a média dos valores absolutos das diferenças entre cada valor da série estatística e a mediana.

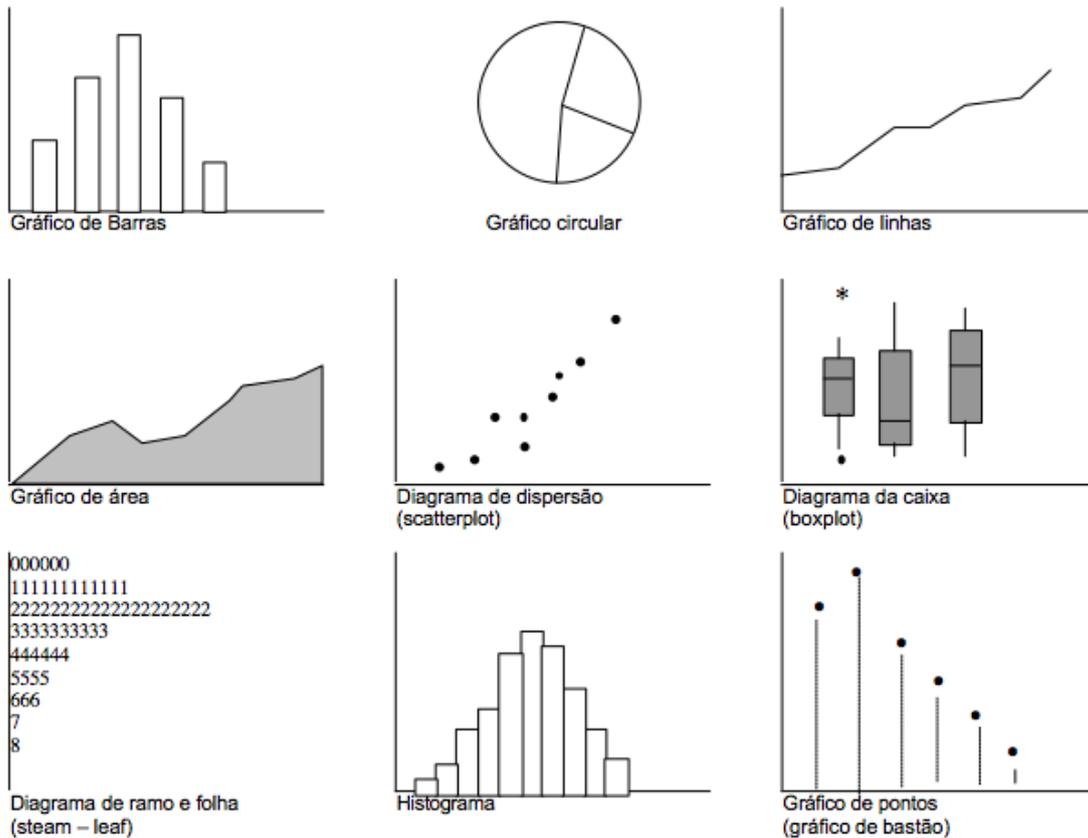
$$DMA(Q_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i |x_i - Q_2| \text{ onde } Q_2 \text{ designa o segundo quartil, ou seja, a mediana.}$$

Observamos que essa medida de dispersão pode ser calculada tomando qualquer valor de referência.

Outro ponto a destacar, refere-se ao histograma que é um conceito bem definido, ou seja, a curva representando a função densidade de frequência ou de probabilidade, embora muitas vezes confundido com o diagrama de barras. Já faz tempo que essa questão foi abordada por Régnier (1998)

Assim como este gráfico, diagrama de caixa, consideramos que os demais gráficos poderiam ser utilizados em atividades que envolvam as MTCD, contribuindo para ampliar o desenvolvimento deste campo conceitual pelos alunos do ensino médio. Seria o caso com o histograma de uma distribuição de frequências de uma variável contínua para a estimação gráfica da moda e dos três quartis (Régnier, 1998). Dessa forma, esta pesquisa procurou, entre outras coisas, responder a questão: que tipos de gráficos são apresentados nos livros didáticos ao se abordar as MTCD?

Uma outra forma de apresentar os dados seria através das observações que podem ou não estar ordenadas. Podemos também fazer o uso de tabelas. Assim, além destas nove formas de apresentação dos dados, através de gráficos, indicadas por Cazorla (2002), incluímos outras formas de apresentação na nossa pesquisa. No quadro abaixo (QUADRO 1), temos o código referente à variável, o termo utilizado e, em alguns casos que julgamos necessário, algumas observações. As variáveis V11 a V19 correspondem às apresentadas na figura acima (FIGURA 2).



Destacamos que utilizamos os termos observações no sentido de valor das variáveis. O termo efetivo é usado no sentido da quantidade de cada observação com o mesmo atributo e efetivo total quando temos o total das observações. Vale salientar que o efetivo é, por natureza, um número inteiro. Não podemos deixar de lado que encontra-se um uso da palavra frequência para designar o efetivo, apesar da frequência ser por definição como sendo os efetivos de cada observação dividido pelo efetivo total. Assim, a frequência é um número racional sendo um número cuja expressão exata é a razão entre dois números inteiros. Tal quantidade é elemento do intervalo $[0; 1]$. Habitualmente, usa-se uma representação semiótica na forma de um número decimal ou na forma de porcentagem.

Apresentamos esta descrição, pois na nossa pesquisa observamos os significados atribuídos a estes termos utilizados com outros significantes. Como por exemplo, o termo efetivo usado por Régnier (2007, Dehon et al, 2008) sendo utilizado por Dodge (2007) como sendo a frequência absoluta. Também existem variações nos livros didáticos desses termos. Essas variações ocorrem de forma mais nítida quando comparamos os livros do Brasil com os da França.

Quadro 1. Formas de apresentação dos dados.

Variável	Forma de apresentação no livro didático	Precisões
V01	Dados não ordenados	Para o cálculo da média independe se está ou não ordenado. Contudo, para o cálculo da mediana é necessário que ordenem-se os dados, exigindo assim mais uma tarefa pelo estudante.
V02	Dados ordenados	Facilita o cálculo da mediana.
V03	Tabela com dados não ordenados	Normalmente, ao se colocar os dados em uma tabela estes devem estar ordenados. Contudo, podemos ter casos em que não se ordenam, como observamos em alguns livros didáticos.
V04	Tabela com observações	Podemos também chamar de tabela com os dados ordenados. É a forma mais simples de apresentar, usada algumas vezes para um pequeno número de observações. Também pode ser necessária em função do uso, por exemplo a lista dos 100 homens mais ricos do planeta (com o nome e montante da fortuna).
V05	Tabela com observações e efetivos	Uma forma mais comum de apresentar os dados quando temos medidas que se repetem.
V06	Tabelas com observações, efetivos acumulados e/ou efetivos	É muito prático em diversas situações como o cálculo da mediana.
V07	Tabela com observações e frequência (ou apenas frequência)	Observamos em alguns casos livros, a apresentação apenas da frequência.
V08	Tabela com intervalo de classe e efetivos	
V09	Tabela com intervalo de classe e frequência	
V10	Tabela com intervalo de classe, frequência e frequência acumulada	
V11	Gráfico de barras	
V12	Histograma	
V13	Diagrama de caixa	
V14	Gráfico circular	
V15	Gráfico de linhas	
V16	Gráfico de áreas	
V17	Diagrama de dispersão	
V18	Diagrama de ramo e folha	
V19	Gráfico de pontos	

Destacamos em livros brasileiros o termo frequência no sentido de frequência absoluta ou efetivos. Assim, faz-se necessário definir claramente o sentido dado aos termos que associamos às formas de apresentação dos dados. Na nossa modelagem para analisar os livros didáticos, construímos 19 variáveis binárias codificadas por V01 até V19 que se constituíram como característica diretamente observável.

Abordagem metodológica

Apresentaremos, nesta seção, os critérios de seleção para a construção da amostra e o procedimento de análise dos dados.

Construção da amostra

Foram selecionados no Brasil e na França livros do ensino médio. Contudo, faz-se necessário especificar de que ensino médio estamos tratando. Assim, o primeiro critério de seleção da amostra dos livros é a definição de que ensino médio estamos abordando. O ensino médio no Brasil é dividido em 4 percursos, conforme a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB (Brasil, 2010):

- Ensino médio
- Educação profissional técnica de nível médio – pode ser realizada junto com o ensino médio ou após a sua conclusão e voltada para o exercício de profissões técnicas de nível médio técnico (seção IV-A e capítulo III da LDB).
- Educação de jovens e adultos (EJA) – constitui outra modalidade do ensino fundamental e médio com características próprias e duração diferenciada para aqueles que não puderam fazer o estudo na idade regular (seção 5 da LDB).
- Educação profissional e tecnológica – abrangem diversos níveis: formação inicial e continuada ou qualificação profissional; profissional de nível médio, educação profissional tecnológica de graduação e pós-graduação.
- Selecionamos os livros do ensino médio, de formação mais geral no Brasil. Na França temos:
 - O ensino médio geral e tecnológico (lycée d'enseignement général et technologique);
 - O ensino médio profissional (lycée professionnel).

Na nossa pesquisa, escolhemos o ensino médio geral e tecnológico. Este por sua vez se divide a partir do segundo ano do ensino médio em dois percursos: o ensino médio geral e o tecnológico. Selecionamos o ensino médio geral. O mesmo possui três percursos de dois anos que se iniciam no segundo ano:

- Série científica (S) - Tem como especialidades: a Matemática, Física, Química, Ciências da vida e da terra (SVT), Informação e Ciência digital.

- Série econômica e social (E.S.) - Tem como especialidades: as Ciências Sociais e Políticas, a Matemática e Economia aprofundada
- Série literária (L) – Possui como especialidades: as artes, artes do circo, língua e cultura da antiguidade (grego ou latim), linguagem viva 3, linguagem viva 1 ou 2 aprofundamento, Matemática, Direito e questões do mundo contemporâneo. A Matemática é uma das disciplinas opcionais a ser escolhida pelos alunos.

Cada uma destas séries dá uma formação para um percurso profissional específico e um diploma do baccalauréat próprio. Seleccionamos para a nossa pesquisa os livros didáticos da série científica que fica a mais procurada para o diploma do baccalauréat⁵. Escolhemos as edições dos anos 2010, 2011 e 2012 do ensino médio geral. Tanto nesta série como na série econômica e social, a Matemática é obrigatória como no ensino médio no Brasil.

Para o ensino médio geral no Brasil, seleccionamos os livros adotados no Programa Nacional do Livro Didático, PNLD 2012 (Brasil, 2011). Este programa seleciona os livros que podem ser adquiridos pelas escolas públicas neste país, ou seja, os que atendam os padrões mínimos de qualidade considerados pela equipe de avaliação para poderem ser adotados. Foram selecionadas 7 coleções na avaliação de 2012. Para cada um destes livros adotamos um código: Br_C1_1^A (livro do Brasil, coleção 1, 1º ano do ensino médio). Usamos o mesmo código para as coleções francesas, substituindo o Br por Fr. Para comparar com as coleções brasileiras, seleccionamos 7 coleções das 11 listadas na página do Ministério da Educação Nacional da França. Das 11, temos um caso da indicação da editora sem a indicação da coleção que foi por isso excluído da análise. Dessa forma, restaram 10 para serem selecionadas (de 6 editoras). Escolhemos inicialmente os quatro livros didáticos mais utilizados nas escolas. Nas três últimas coleções, adotamos outros critérios (a mais antiga e duas editoras não contempladas das 6 editoras). No quadro 2, temos as coleções e os códigos utilizados para identificação.

Quadro 2. Codificação das coleções usadas no Brasil e na França por ano.

Coleção	Brasil			França			
	1º ano	2º ano	3º ano	Coleção	1º ano	2º ano	3º ano
Br_C1	Br_C1.1 ^A	Br_C1.2 ^A	Br_C1.3 ^A	Fr_C1	Fr_C1.1 ^A	Fr_C1.2 ^A	Fr_C1.3 ^A .v1 Fr_C1.3 ^A .v2
Br_C2	Br_C2.1 ^A	Br_C2.2 ^A	Br_C2.3 ^A	Fr_C2	Fr_C2.1 ^A	Fr_C2.2 ^A	Fr_C2.3 ^A .vu ⁶

⁵ O Baccalauréat foi criado em 1808 na França. Ele é um diploma que tem uma dupla particularidade: documentar o final do ensino médio e abrir o acesso ao ensino superior. O baccalauréat é um diploma nacional e é o primeiro diploma de nível superior. Ele não tem um caráter provisório como um exame para entrar na universidade em um determinado ano, podendo ser usado para o acesso à universidade em qualquer momento, em função da sua aprovação e notas obtidas (Andrade, 2013).

⁶ VU- volume único. Duas editoras adotam um volume único que engloba os dois volumes do último ano

Br_C3	Br_C3.1 ^A	Br_C3.2 ^A	Br_C3.3 ^A	Fr_C3	Fr_C3.1 ^A	Fr_C3.2 ^A	Fr_C3.3 ^A .vu
Br_C4	Br_C4.1 ^A	Br_C4.2 ^A	Br_C4.3 ^A	Fr_C4	Fr_C4.1 ^A	Fr_C4.2 ^A	Fr_C4.3 ^A .v1 Fr_C4.3 ^A .v2
Br_C5	Br_C5.1 ^A	Br_C5.2 ^A	Br_C5.3 ^A	Fr_C5	Fr_C5.1 ^A	Fr_C5.2 ^A	Fr_C5.3 ^A .v1 Fr_C5.3 ^A .v2
Br_C6	Br_C6.1 ^A	Br_C6.2 ^A	Br_C6.3 ^A	Fr_C6	Fr_C6.1 ^A	Fr_C6.2 ^A	Fr_C6.3 ^A .v1 Fr_C6.3 ^A .v2
Br_C7	Br_C7.1 ^A	Br_C7.2 ^A	Br_C7.3 ^A	Fr_C7	Fr_C7.1 ^A	Fr_C7.2 ^A	Fr_C7.3 ^A .v1 Fr_C7.3 ^A .v2

Fonte : Andrade (2013, p. sn)⁷

Para a análise, foram selecionados os capítulos que abordassem como objeto de estudo as medidas de tendência central e de dispersão (MTCD). Nas coleções francesas, as MTCD são abordadas em todas as coleções no primeiro ano e no segundo ano (série científica) do ensino médio. Das sete coleções aprovadas no PNLD 2012, duas abordam as MTCD no segundo e no terceiro ano do ensino médio e cinco abordam apenas no terceiro ano do ensino médio. Assim, temos na amostra francesa 7 coleções e 14 livros (sujeitos). Na coleção brasileira, 7 coleções e 9 livros.

Procedimento de análise dos dados

Foram analisados os capítulos que abordam as medidas de tendência central e de dispersão como objeto de estudo e como ferramenta. Assim, em cada livro selecionado foi analisado o capítulo que aborda estas medidas. Observamos neste capítulo, a presença (1) ou ausência (0) de uma forma de apresentação dos dados nas questões resolvidas e nas questões propostas que envolvem as medidas de tendência central e de dispersão. Com base nos resultados, elaboramos uma tabela na qual realizamos uma primeira análise das formas de apresentação presente nos livros selecionados. Em seguida, estes dados, na forma binária, foram tratados com o uso do software CHIC⁸. As funções essenciais do CHIC são de “extrair de um conjunto de dados, cruzando sujeitos e variáveis (ou atributos), regras de associação entre variáveis, fornecer um índice de qualidade de associações e de representar uma estrutura das variáveis obtida por meio de regras” (Couturier et al, 2004, p.1).

Resultados, análise e discussões

Apresentamos na tabela seguinte (TABELA 1), o levantamento geral destas formas de

do ensino médio na França.

⁷ A numeração da página não foi indicada, uma vez que estamos fazendo uma revisão final da tese e esta numeração pode sofrer alterações.

⁸ O termo CHIC é uma abreviatura de: Classificação Hierárquica Implicativa e Coesiva (Gras et al, 2013).

representação nas 7 coleções selecionadas na França. Considerando que na França as medidas de tendência central e de dispersão são vistas tanto no primeiro ano do ensino médio como no segundo. Temos um total de 14 livros ou seja dois por coleção. Considerando um total de 19 variáveis, se fossem observadas estas variáveis em todos os livros, teríamos um total de: 19 (variáveis) x 14 livros didáticos, o que corresponderia a 269 presenças. Levantamos nestas 7 coleções, com um total de 149 presenças das características levantadas, que correspondem a uma taxa de ocorrência de 56,02%. Das 19 variáveis levantadas, apenas 2 não constam em nenhuma das atividades analisadas, ou seja, as variáveis V17 e V18. Observamos que as variáveis V5, V8 e V11 estavam presentes em todos os livros da França. A presença nas variáveis V16 e V19 foi observada em apenas dois livros. Estes resultados indicam limitações de algumas variáveis, frequência de ausência elevada para outras ou frequência de presença forte para 3 variáveis.

Na outra tabela seguinte (TABELA 2) expusemos o levantamento geral das coleções no Brasil. Na maioria dos livros selecionados no Brasil, as MTCD são vistas apenas no livro do terceiro ano e em apenas 2 coleções elas aparecem nos livros do segundo ano. Assim, temos um total de 9 livros das 7 coleções brasileiras. Considerando um total de 19 variáveis e 9 livros, temos um máximo de presença de 171 em todos os livros. Foram levantadas nos 9 livros brasileiros, com um total de 85 presenças que correspondem a 49,71% do total (valor um pouco abaixo das coleções francesas). Das 19 variáveis, a V13, V17 e V18 não constam a modalidade presença em nenhum dos livros levantados no Brasil. Comparando com os da França, a V17 e V18 também não constam a modalidade presença nas coleções francesas. A V13 consta a modalidade presença em todas as coleções francesas (em todos os livros do segundo ano do ensino médio e em alguns livros do primeiro ano), mas não consta essa modalidade nas coleções brasileiras. Com a modalidade ausência nas variáveis V17 e V18, não podemos considerar um problema, pois as representações não são normalmente usadas com as MTCD. Contudo, a V13 (diagrama de caixa) constitui uma limitação das coleções brasileiras pelas possibilidades que este oferece nas análises, uma vez que utiliza numa mesma representação uma medida de tendência central (mediana) junto com medidas de dispersão. Observamos quatro variáveis cuja modalidade presença aparece em todos os livros do Brasil. São as variáveis: V1, V4, V5 e V11. Assim, para as variáveis V5 e V11, só a modalidade presença ocorre em todos os livros do Brasil e da França, sendo consideradas incontornáveis pelos autores das coleções dos dois países. Por outro lado,

a modalidade presença nas variáveis V1 e V4 foi observada apenas nas coleções do Brasil.

O livro das coleções francesas com o maior número de ocorrências da modalidade presença foi o livro Fr_C5.1^A, entre as 14 das 19. No Brasil, o livro Br_C6.2^A foi o que apresentou o maior número de ocorrências da modalidade presença abrangendo 12 variáveis entre as 19 levantadas. O menor número de ocorrências da modalidade presença de uma forma identificada em um livro da coleção francesa foi 8 em 3 livros. Na coleção brasileira, esse menor número foi 6.

Tabela 1. Formas de representações levantadas nos livros didáticos da França.

Livros	Variáveis Vxx																			T
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Fr_C1.1A	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	9
Fr_C1.2A	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	8
Fr_C2.1A	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	8
Fr_C2.2A	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	10
Fr_C3.1A	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	12
Fr_C3.2A	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	12
Fr_C4.1A	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	11
Fr_C4.2A	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	8
Fr_C5.1A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	14
Fr_C5.2A	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	11
Fr_C6.1A	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	10
Fr_C6.2A	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	13
Fr_C7.1A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	12
Fr_C7.2A	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	11
Total	13	11	10	11	14	8	9	14	8	3	14	8	10	4	10	1	0	0	1	149

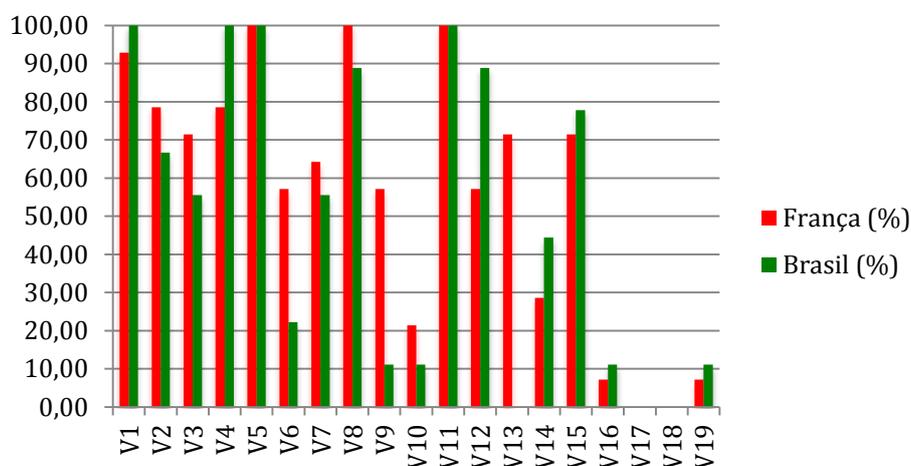
Tabela 2. Formas de representações levantadas nos livros didáticos do Brasil.

Livros	Variáveis Vxx																			T
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Br_C1.3A	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	9
Br_C2.3A	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	9
Br_C3.3A	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	8
Br_C4.3A	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	10
Br_C5.3A	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	10
Br_C6.2A	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	12
Br_C6.3A	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	11
Br_C7.2A	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	6
Br_C7.3A	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	10
Total	9	6	5	9	9	2	5	8	1	1	9	8	0	4	7	1	0	0	1	85

Na figura a seguir (FIGURA 3), indicamos a porcentagem da presença das características consideradas na nossa pesquisa na coleção brasileira (considerando 100% igual à participação da variável em nove livros) e na coleção francesa (considerando 100% igual a participação da variável nos 14 livros da França). Das 19 variáveis levantadas, a França apresentou em atividades relacionadas às MTCD 17 variáveis e o Brasil 16. Observamos que nos livros das coleções francesas tivemos 10 variáveis com

participação acima de 60%, o que indica uma participação pequena ou ausência das demais variáveis. No Brasil, tivemos 8 variáveis com participação acima de 60%.

Figura 3. Frequências da modalidade presença nos livros selecionados no Brasil e na França.



Os resultados iniciais indicam limitações em ambas as coleções. Trataremos a seguir de uma abordagem baseada no quadro teórico da Análise Estatística Implicativa – A.S.I. utilizando o software CHIC.

Esboço de uma abordagem estatística com o software CHIC

Para simplificar a apresentação dos resultados, assimila-se agora cada variável V01 a V19 respectivamente à variável binária V01presença, ..., V19presença.

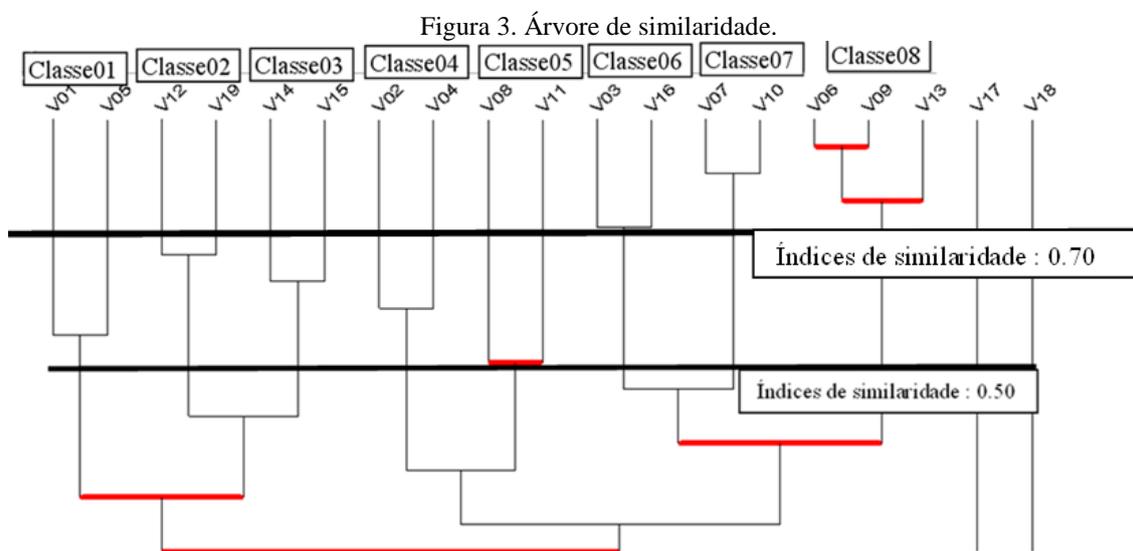
Exploração das relações de similaridade

Na figura seguinte (FIGURA 4), apresentamos a árvore de similaridade, uma classificação fundada sobre um modelo inspirado em I. C. Lerman (1981), (Lerman, Gras, Rostam 1981), (Lerman, Azé, 2004), no qual se utilizam índices de probabilidade. Observamos a divisão das 17 variáveis binárias (V17 e V18 não foram observadas em nenhum livro) em uma classe que se divide em 2 grandes subclasses. No primeiro nível de similaridade, aparece uma relação de similaridade entre as variáveis V06 (tabela com observações, efetivos acumulados e/ou efetivos) e V09 (tabela com intervalo de classe e frequência), com um índice de similaridade de 0,85, o que indica uma chance alta do livro utilizar a forma de representação V06 e usar a V09 ou se não usar V06 não usar a V09. Observamos a presença destas duas variáveis mais fortes na coleção francesa e um número reduzido na coleção brasileira. As variáveis V06 e V09 apresentam um nível 3

(0,73) de similaridade com a variável V13 (diagrama de caixa). A variável V13 é utilizada apenas na coleção francesa.

No segundo nível de similaridade, com índice de 0,82, temos as variáveis V07 (tabela com observações e frequência ou tabela com frequência) e V10 (tabela com intervalo de classe, frequência e frequência acumulada). A variável V10 foi pouco utilizada nas coleções dos dois países, sendo mais utilizada na França, assim como a variável V07. Se cortarmos a árvore ao nível de similaridade 0.5, aparecem 10 classes entre as quais duas ficam reduzidas a um elemento. Se cortarmos a árvore ao nível de similaridade 0.7, aparecem 15 classes entre as quais 12 ficam reduzidas a um elemento.

Ao tomar em conta os valores dos índices de similaridade, destaca-se que esse conjunto de 19 variáveis é bastante heterogêneo.



Ao considerar as três classes que se formam ao nível superior a 0.70, pode-se observar a sua composição respectiva: {V7, V10 }, {V06, V09, V13} e {V03, V16 }.

Quadro 3. Contribuições à classe : {V7 Tabela com observações e frequência (ou apenas frequência), V10 Tabela com intervalo de classe, frequência e frequência acumulada}.

Grupo ótimo : Fr_C3.1A Fr_C3.2A Fr_C6.2A Br_C5.3A

card GO = 4 p = 0.174 1-p = 0.826

A variável FR contribui a esta classe com um risco de: 0.216

Interseção com o grupo ótimo = 3

A variável BR contribui a esta classe com um risco de: 0.481

Interseção com o grupo ótimo = 1

A variável que contribui mais a esta classe é **FR** com um risco de: 0.216

Quadro 3. Contribuições à classe {V06 Tabelas com observações, efetivos acumulados e/ou efetivos, V09 Tabela com intervalo de classe e frequência, V13 Diagrama de caixa}.

Grupo otimal : Fr_C5.1A Fr_C6.1A Fr_C6.2A Fr_C7.2A
 card GO = 4 p = 0.174 1-p = 0.826
 A variável FR contribui a esta classe com um risco de : 0.0803
 Interseção com o grupo otimal = 4
 A variável BR contribui a esta classe com um risco de : 0.821
 Interseção com o grupo otimal = 0
 A variável que contribui mais a esta classe é **FR** com um risco de : 0.0803

Estas duas classes marcam a copresença coerente de tabelas de distribuições de variáveis discretas e contínuas. A formação destas é mais influenciada pelos livros didáticos franceses.

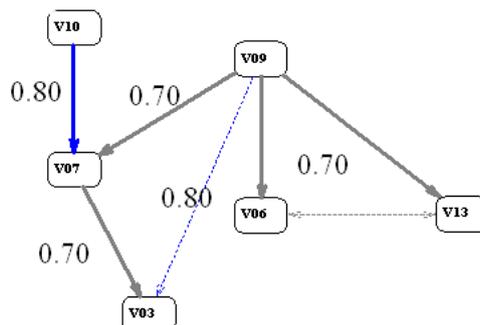
Quadro 3. Contribuições à classe : {V03 Tabela com dados não ordenados, V16 Gráfico de áreas}.

Grupo otimal : Br_C6.3A Fr_C4.1A
 card GO = 2 p = 0.087 1-p = 0.913
 A variável FR contribui a esta classe com um risco de : 0.347
 Interseção com o grupo otimal = 1
 A variável BR contribui a esta classe com um risco de : 0.181
 Interseção com o grupo otimal = 1
 A variável que contribui mais a esta classe é **BR** com um risco de : 0.181

Essa classe reúne dois elementos: um refere-se à noção de Tabela, outro à de Gráfico. Entretanto, a expectativa seria mais de ver agrupados a presença de Gráfico de áreas com Tabela com intervalo de classe e frequência. A classe é mais influenciada pelos livros didáticos brasileiros.

Exploração das relações de quase-implicação e coesão

Figura 4. Grafo implicativo.(nível de confiança $1-\alpha > 0.70$).

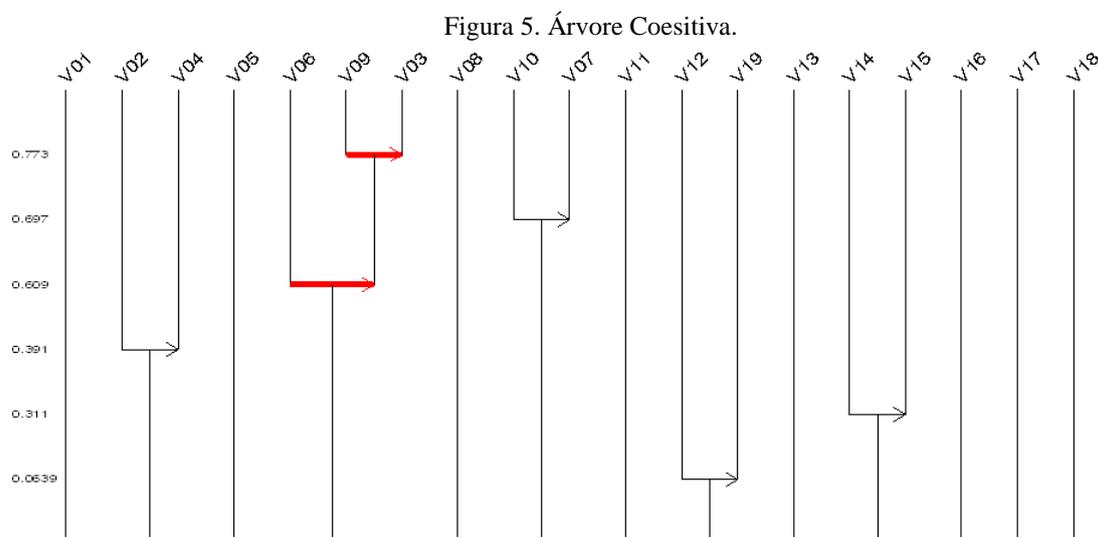


Na figura acima (FIGURA 4), apresentamos um grafo implicativo. Observamos que o uso da variável V09 pode implicar no uso da variável V06. O uso das variáveis V09 ou V10 pode implicar no uso das variáveis V07 e V13 (presente apenas nos livros da França).

Destaca-se uma quase-equivalência entre V06 [Tabelas com observações, efetivos acumulados e/ou efetivos] e V13 [Diagrama de caixa]

Na figura abaixo (FIGURA 5), apresentamos a árvore coesitiva. Observamos que poucas classes se formaram, sendo a maioria com dois elementos. Apresentamos cada uma destas classes obedecendo à ordem de qualidade de coesão decrescente:

- $\{V10 \Rightarrow V07\}$ Observa-se uma implicação do uso da tabela com observações e frequência (ou apenas frequência) com o uso de tabela com intervalo de classe, frequência e frequência acumulada.
- $\{V06 \Rightarrow \{V09 \Rightarrow V03\}\}$ O uso das tabelas com observações, efetivos acumulados e/ou efetivos será tanto usada quanto o uso da tabela com intervalo de classe e a frequência é usada junto com a tabela com dados não ordenados;
- $\{V02 \Rightarrow V04\}$ Observa-se implicação no uso de dados ordenados com o uso de tabelas com observações;
- $\{V14 \Rightarrow V15\}$ Embora se tenha uma relação de implicação mais baixa, observa-se uma implicação de uso do gráfico circular com o uso dos livros de gráfico de linhas;
- $\{V12 \Rightarrow V19\}$ O uso do histograma apresenta uma relação de implicação com o uso do gráfico de pontos.



Observamos que estas relações se limitam a 11 dos 17 gráficos utilizados. Assim, na árvore coesitiva não foram observadas relações entre as variáveis V01, V05, V08, V11, V16 e V19, considerando o nível de coesão definido.

Quadro 4. Contribuições à classe orientada $\{V06 \Rightarrow \{V09 \Rightarrow V03\}\}$.

Grupo otimal : Fr_C5.2A Br_C6.3A Fr_C6.1A Fr_C5.1A Fr_C1.1A Fr_C7.2A Fr_C7.1A Fr_C6.2A
card GO = 8 p = 0.348 1-p = 0.652
A variável FR contribui a esta classe com um risco de: 0.0728
Interseção com o grupo otimal = 7
A variável BR contribui a esta classe com um risco de: 0.876
Interseção com o grupo otimal = 1
A variável que contribui mais a esta classe é FR com um risco de: 0.0728

A formação desta classe orientada é mais influenciada pelos livros didáticos franceses.

Considerações finais

Os resultados possibilitaram identificar algumas limitações no uso de diferentes formas de representação dos dados, pela ausência ou pouco uso de algumas formas. Observamos também que algumas formas se apresentaram em maior número em um país do que em outro. Verificamos um caso em que uma forma de apresentação se limita a um país. Considerando que são as diversidades de situações que possibilitam ampliar a construção de um conceito, consideramos que os livros didáticos deveriam ampliar o uso de diferentes formas de apresentação dos dados ao abordar as medidas de tendência central e de dispersão. Através da análise estatística implicativa e com o auxílio do software CHIC, foi possível observar relações hierárquicas implicativas entre determinadas formas de apresentação dos dados utilizados em atividades que envolvem as medidas de tendência central e de dispersão nos 23 livros do Brasil e da França analisados.

Referências

- ACIOLY-REGNIER, N.M. (2010) *Culture et cognition : Domaine de recherche, Champ conceptuel, Cadre d'intelligibilité et Objet d'étude fournissant des instruments pour conduire des analyses conceptuelles et méthodologiques en psychologie et en sciences de l'éducation*. Note de synthèse HDR Université Lyon2.
- ANDRADE, V. L. V. X. de. (2013). *Os Conceitos de Medidas de Tendência Central e de Dispersão na Formação Estatística no Ensino Médio no Brasil e na França. Abordagem Exploratória no Quadro da Teoria Antropológica do Didático e da Teoria dos Campos Conceituais*. Tese de doutorado em cotutela – Universidade Federal Rural de Pernambuco e Universidade Lumière Lyon2..
- BATANERO, C. (2000), Significado y comprensión de las medidas de posición central. *UNO*, v. 25, 41-58.

BENJAMINI, Y. (1988). Opening the Box of a Boxplot. *The American Statistician* 42 (4): 257–262. doi:10.2307/2685133. JSTOR 2685133.

BRASIL, Congresso Nacional. (2010). *LDB: Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional: lei nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996 que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional*. 5. ed. Câmara dos Deputados, Coordenação Edições Câmara, Brasília. Disponível em: <http://bd.camara.gov.br/bd/bitstream/handle/bdcamara/2762/ldb_5ed.pdf>. Acesso em: 24 de maio de 2011.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental*. MEC/SEF, Brasília.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. (2006). *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. 2. v. Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Básica, Brasília.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. (2011). *Guia de Livros Didáticos: PNLD 2012: Matemática*. Ministério da Educação/Secretaria de Educação Básica, Brasília.

CAI, J. (1995). Exploring students' conceptual understanding of the averaging algorithm. *School Science and Mathematics, Stillwater*, 98, (2), 93-98.

CAZORLA, I. (2002). *A relação entre a habilidade viso-pictórica e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos*. 335 f. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

COUTURIER, R., Bodin, A., & Gras, R. (2004). A classificação hierárquica implicativa e coesiva. *Manual Curso CHIC versão, 2*.

CHEVALLARD, Y., Bosch, M. e Gáscon, J. (2001). *Estudar Matemática: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. (Daisy V. de Moraes, trad.). Artmed, Porto Alegre.

DEHON, C., Droesbeke, J-J., Vermandele, C. (2008). *Eléments de Statistique*. (5 ed.). Université de Bruxelles, Bruxelles.

DODGE, Y. (2007). *Statistique : Dictionnaire encyclopédique*, Springer, Paris.

FRANCE, Ministère de l'Éducation Nationale et de la Recherche. (2000). *Bulletin Officiel de l'Éducation Nationale : Classe de première : Mathématiques série scientifique*. n. 7, 31 ago. Ministère de l'Éducation Nationale et du ministère de la Recherche, Paris.

FRANCE, Ministère de l'Éducation Nationale. (2010). *Bulletin Officiel Spécial : annexe Mathématiques Cycle Terminal de la Série Scientifique : Classe de Première*. n. 9, 30 set. Ministère de l'Éducation Nationale, Paris. Disponível em: <http://media.education.gouv.fr/file/special_9/21/1/mathsS_155211.pdf>. Acesso em 26 de set. 2011.

GAL, I. (1995). Statistical tools and statistical literacy: the case of the average. *Teaching Statistics*, Rapid City, v. 17, n.3, p. 97-99. Set. 1995.

GITIRANA, V. et al. (2010). Média aritmética no ensino fundamental. In Lopes, C. E.; Coutinho, C. Q. S.; Almouloud, S. A. (Org.). *Estudos e reflexões em educação estatística*. Mercado de Letras, Campinas. 105-131.

- GOODCHILD, S. (1988). School pupil's understanding of average. *Teaching Statistics*, Rapid City, 10 (3), 77-81.
- GRAS, R., Régnier, J-C., Marinica, C. Guillet, F. (Eds). (2013). *L'analyse statistique implicative*. Toulouse : Cépaduès-Éditions.
- KENDALI, M. G.; Yule, G. Udney. (1948). *Introdução à Teoria da Estatística*. Tradução Evandro de Oliveira Silva. IBGE, Rio de Janeiro.
- LERMAN, I.-C. (1981). *Classification et analyse ordinale des données*. Paris : Dunod,.
- LERMAN, I.-C., R. Gras. et H. Rostam (1981). Élaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaires, I et II, *Mathématiques et Sciences Humaines* n° 74,, 5-35 et n° 75, 5-47
- LERMAN, I.C. et J. Azé (2004). Indice probabiliste discriminant (de vraisemblance du lien) d'une règle d'association en cas de « très grosses » données, Mesures de qualité pour la fouille de données, *RNTI-E-1*, Toulouse : Cépaduès Éditions, 69-94.
- LI, K. J.; Shen, S. M. (1992). Students' weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics*, 14(1), 2-8.
- LIMA, R. C. R. (2005) *Introduzindo o conceito de média aritmética na 4ª série do Ensino Fundamental usando o ambiente computacional*. 272f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- MAYÉN, S. A. G. (2009). *Comprension de las medidas de tendencia central en estudiantes mexicanos de educación secundaria y bachillerato*. 396 f. Tese (Programa de Doutorado de la Didáctica de la Matemática), Universidade de Granada, Granada (Espanha).
- MAYÉN, S., Cobo, B., Batanero, C., Balderas, P. (2007). Comprensión de las medidas de posición central em estudiantes mexicanos de bachillerato. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática- UNIÓN*, 9., 187-201. ISSN: 1815-0640.
- MERINO, B. C. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de Secundaria*. 301f. Tese (Departamento de Didáctica de la Matemática). Universidade de Granada, Granada.
- MEVARECH, Z. R. A. (1983). Deep Structure Model of Students' Statistical Misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 14 (4), 415-429.
- MOKROS, J., Russell, S. J. (1995). Children's Concepts of Average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*, Reston, 26(1), 20-39.
- POLLATSEK, A., Lima, S., Well, A. D. (1981). Concept or computation: students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), 191-204.
- PRIOLET, M. *Enseignement et apprentissage de la résolution de problèmes mathématiques*. 2008. Tese (Doutorado) – Université Lyon 2, Lyon, 2008. http://theses.univ-lyon2.fr/documents/lyon2/2008/priolet_m
- REGNIER, J.-C. (1998). Histogramme. in J-C Girard, J-C Régnier (Eds), *Enseigner la Statistique du CM à la Seconde Pourquoi ? Comment ?*, Villeurbanne : IREM / Université Lyon1 – p.21-42. <http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00405993>

- REGNIER, J.-C. (2007). *Vocabulaire de Statistique*. Lyon: ISPEF – Université Lumière Lyon 2.
- ROUSSEEUW, P. J., Ruts, I., Tukey, J. W. (1999). The Bagplot: A Bivariate Boxplot. *The American Statistician* 53 (4): 382–387. doi:10.2307/2686061. JSTOR 2686061.
- STELLA, C. A. (2003). Um estudo sobre o conceito de média com alunos do Ensino Médio. 2003. 181 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- STRAUSS, S.; Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education*, Reston. 19(1), 64-80.
- TUKEY, J. W. (1977). *Exploratory Data Analysis*. Boston: Addison-Wesley.
- Vergnaud, G. (1990). La Théorie des Champs Conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. n.10, p.133-170.
- VERGNAUD, G. (1996). A Teoria dos Campos Conceituais. In Jean Brun (Org.). *Didáctica das matemáticas*. Tradução: Maria José Figueiredo. Instituto Piaget, Lisboa, 155-191.
- VERGNAUD, G., Plaisance, É. (2012). *Les Sciences de l'Éducation*. 5.ed. Éditions la Découverte, Paris. ISBN : 978-2-7071-7436-9. (Collection Repères).
- WATSON, J. (1996). What's the point? *The Australian Mathematics Teacher*, Stepney, 52(2), 40-43.
- ZAWOJEWSKI, J. S. (1988). Teaching Statistics: mean, median and mode: research into practice. *Arithmetic Teacher*, 25-26.