Análisis de la comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría "APOE"

Eliécer Aldana Bermúdez[*]
Mª Teresa González Astudillo[**]

RESUMEN

En esta investigación se ha identificado cómo realizan los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas la comprensión del concepto de integral definida. Para ello se hizo un estudio de libros de texto que permitió identificar los elementos matemáticos que configuran el concepto, y establecer una descomposición genética del concepto de integral definida. Se ha utilizado el marco teórico "APOE" de Dubinsky (1991). La recogida de datos se realizó utilizando: un cuestionario, una entrevista y un mapa conceptual. Estos datos se analizaron a partir de las relaciones lógicas que se establecen entre los elementos matemáticos en diferentes sistemas de representación. El análisis permitió caracterizar los niveles y subniveles (INTRA 1, INTRA, INTER 1, INTER y TRANS), en los que se encuentra cada sujeto.

[*] Universidad del Quindío. Dirección electrónica: eliecerab@uniquindio.edu.co.
[**] Universidad de Salamanca, España. Dirección electrónica: maite@usal.es.

IDENTIFICACIÓN DE PROBLEMA

El concepto de integral definida es uno de los conceptos fundamentales del análisis matemático. Se incluye en el currículo de diferentes carreras y, en concreto, aparece en el plan de estudios de la Licenciatura de Matemáticas; por tanto, resulta de interés realizar un estudio acerca de su comprensión. La comprensión de un concepto matemático es básica para la construcción del conocimiento; al respecto, Dreyfus (1991) manifiesta que comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante y es el resultado de una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurre e interactúa una gran cantidad de procesos mentales.

El aprendizaje del concepto de integral definida, de acuerdo con nuestra experiencia y los resultados obtenidos en diversas investigaciones, presenta dificultades para los estudiantes que se manifiestan mediante la utilización mecánica, algorítmica y memorística de su definición; no logran establecer una conexión entre el pensamiento numérico, algebraico, geométrico y analítico; tienen problemas para calcularlas áreas bajo curvas cuando la gráfica de la función pasa de ser positiva a ser negativa o presenta discontinuidades; en otros casos, piensan la integral solo asociada al concepto de área pero aislada de otros contextos, y demuestran dificultades para aplicar las propiedades de la integral definida.

Para conocer mejor la forma como se ha venido presentando este concepto hicimos un estudio de los libros de texto y pudimos concluir que los elementos matemáticos más habituales en los libros de texto y que configuran el concepto de integral definida se pueden agrupar en cinco bloques temáticos que hemos denominado: el área como aproximación, (ACA); el área como límite de una suma, (ALS) la integral definida, (LID); las propiedades de la integral definida, (PID), y los teoremas fundamentales y del valor medio, (TFV), (Aldana, 2011, p: 36).

Los resultados que se han obtenido en el estado del arte acerca de este concepto(Aldana y González, 2009) reflejan una ausencia de comprensión por parte de los alumnos. Así, en una de las investigaciones pioneras en torno a este concepto (Orton, 1983) se señala que los alumnos son capaces de realizar cálculos algebraicos en los que intervienen las integrales pero no son capaces de comprender el papel que juega el límite en la definición de este concepto y no son capaces de dotar de significado a los símbolos que se utilizan en estos cálculos. Mundy (1984) por otro lado presenta el análisis de un cuestionario en el que los alumnos debían evaluar diferentes integrales como $\int_{-3}^{5} |x+2|\, dx.$ seleccionando la respuesta correcta entre varias opciones, pero obtuvo un número muy reducido de respuestas correctas. Por su parte, Calvo (1997) en un cuestionario pasado a estudiantes de primer curso de Cálculo observa que los alumnos identifican la integral definida con el cálculo de áreas, por lo que si la integral es negativa tienden a cambiar el signo.Rasslan y Tall (2002), exploran la imagen del concepto (Vinner, 1991) de integral definida que tienen los estudiantes de bachillerato a través de un cuestionario, y concluyen que muy pocos alumnos responden correctamente a las preguntas, por lo que sugieren introducir este concepto a partir de experiencias previas de los alumnos. Para otros investigadores como Czarnocha et al. (2001) es esencial la coordinación entre el esquema visual de la suma de Riemann y el esquema de los límites de la secuencia numérica para el desarrollo de una comprensión del concepto de integral definida. Para decidir y distinguir si los estudiantes llegan a una verdadera comprensión de la definición del concepto de integral definida en lugar de tener solo una percepción empírica de la integración,Paschos et al. (2006)desarrollaron un estudio de caso con una estudiante universitaria sobre la abstracción reflexiva en la construcción del concepto de integral definida.

A partir del conocimiento de estas dificultades y de los mecanismos de construcción del concepto se han realizado diferentes propuestas de enseñanza del concepto de integral como la de Turégano (1994) que propone como alternativa enseñarla utilizando la génesis histórica del concepto, comenzado con el concepto de integral de forma independiente de la diferenciación y como primera introducción al límite. Partiendo de un análisis epistemológico del concepto de integral, y de las aportaciones de matemáticos tales como Cavalieri, Wallis y Roberval, Czarnocha, et al. (2000) diseñan una instrucción para estudiantes universitarios concluyendo que los estudiantes muestran una visión diferente que la desarrollada por la instrucción habitual. Depool (2004)utiliza las nuevas tecnologías para desarrollar la comprensión del concepto de integral definida de estudiantes universitarios y definir un modelo de competencia cognitivo de la integral definida. En este mismo sentido, Camacho et al. (2008) utilizan software en un curso de ingeniería para ayudar a los alumnos a comprender los conceptos de partición, refinamiento, aproximación y límite. A partir del diseño de una ingeniería didáctica González-Martín (2006) para los primeros cursos universitarios en torno al concepto de integral impropia trata de mejorar la comprensión de este concepto por parte de los estudiantes.

Las dificultades en la comprensión y construcción de los objetos matemáticos y, más concretamente, las dificultades encontradas en el aprendizaje del concepto de integral definida, la forma como lo presentan los diferentes libros de texto, y cómo algunos de ellos hacen mayor énfasis en los procedimientos algorítmicos y algebraicos, antes que en el significado analítico del concepto y los aportes encontrados en distintos estudios por algunos investigadores, nos han llevado a formular el siguiente problema de investigación: ¿Cómo adquieren los estudiantes el concepto de integral definida? Para poder hacer un acercamiento a la respuesta de esa pregunta, a lo largo de este estudio intentamos responder a las siguientes preguntas más específicas: ¿Cómo podemos caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de integral definida? ¿Qué relaciones y qué elementos matemáticos se manifiestan en cada nivel de desarrollo de la integral definida? ¿Cómo podemos caracterizar el paso de un nivel de desarrollo al siguiente?

Los objetivos planteados en esta investigación van dirigidos a profundizar en la comprensión que tienen los estudiantes de Licenciatura de Matemáticas del concepto de integral definida. Así, el objetivo general de esta investigación esestudiar el desarrollo del esquema del concepto de integral definida que tienen los estudiantes universitarios en el marco teórico APOE. Este objetivo general se concreta en los siguientes objetivos específicos:

- Identificar el grado de comprensión del concepto de integral definida en estudiantes de Licenciatura de Matemáticas mediante la tríada de la teoría APOE
- Describir el tipo de relaciones que establecen los alumnos entre los elementos matemáticos que constituyen el concepto de integral definida
- Establecer las formas de representación usadas por los alumnos para resolver tareas relacionadas con el concepto de integral definida y la síntesis entre dichas formas de representación.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico en el que se ha fundamentado esta investigación es la teoría "APOE", desarrollada por Dubinsky (1991) y un grupo de investigadores Research in UndergraduateMathematicsEducationCommunity (RUMEC), basada en la noción de abstracción reflexiva (Piaget & García, 1982) y modificada para ser aplicada al pensamiento matemático avanzado. Desde esta perspectiva teórica del conocimiento matemático, Dubinsky (1991, 2000) y Asiala et al. (1996) consideran que los sujetos realizan ciertas construcciones mentales para comprender los conceptos matemáticos. Estas construcciones mentales se denominan: acciones,procesos, objetos y esquemas, y se logran mediante diferentes mecanismos como: interiorización,coordinación,inver sión, encapsulación,desencapsulación, y tematización (Dubinsky, 1991). El refuerzo de la teoría APOE con los tres niveles de desarrollo del esquema propuestos por Piaget y García (1982) ha llevado a mejorar la comprensión y explicación del concepto de esquema (Dubinsky & MacDonalds, 2001). De-Vries (2001) caracteriza los niveles de desarrollo de un esquema como: intra, cuando solo se identifican aspectos individuales aislados; ínter, se caracteriza por la construcción de relaciones, y trans, se adquiere cuando se tiene construida una estructura completa; las relaciones descubiertas en el ínter son comprendidas dando coherencia al esquema. El primer paso para llegar a comprender un concepto matemático tiene que ver conla descomposición genética, descrita en la teoría APOE de Dubinsky (1996) & Asiala et al., (1996).

METODOLOGÍA

Esta investigación se realizó en Armenia, en la Universidad del Quindío, tratando de caracterizar el desarrollo del esquema de integral definida de los estudiantes que cursan tercer año de Licenciatura de Matemáticas y que estudian por primera vez el concepto de integral definida.

Para diseñar los instrumentos utilizados en la recogida de la información, inicialmente se llevó a cabo una revisión de diferentes libros de texto que incluyen el concepto de integral definida, lo que permitió determinar los elementos que configuran este concepto matemático y establecer una descomposición genética previa de dicho concepto. Posteriormente, se diseñó un precuestionario que fue revisado por expertos españoles en Didáctica del Análisis y aplicado de forma experimental. A partir del informe de los expertos y de los resultados de los alumnos, se hizo el cuestionario definitivo que constaba de ocho tareas y que fue contestado por once estudiantes. Posteriormente se diseñó el guion de una entrevista semiestructurada (Ginsburg et al., 1983) con el objetivo de que nos permitiera obtener información para describir y explicar el nivel de desarrollo del esquema de integral sefinida de cada alumno. Dichas entrevistas fueron audiograbadas. Finalmente, los alumnos realizaron un mapa conceptual, sobre el concepto de integral definida.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

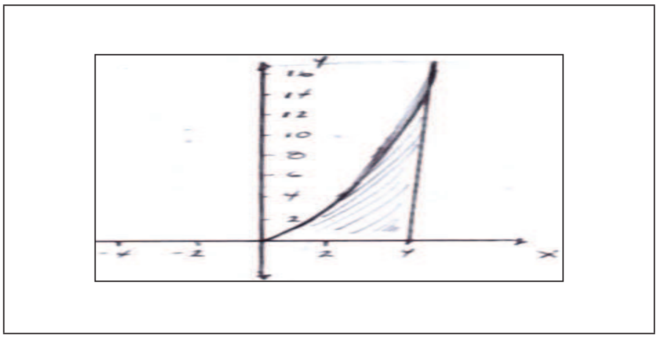
El análisis de los datos se realizó utilizando conjuntamente los tres instrumentos: cuestionario, entrevista y mapa conceptual. Desde el marco teórico

APOE, consideramos que el desarrollo del esquema pasa por tres niveles, determinados por las relaciones lógicas que un sujeto es capaz de establecer, y por el número de elementos matemáticos gráficos (G), algebraicos (A) y analíticos (AN) que utiliza en la resolución de las tareas. Esto nos ha permitido caracterizar los diferentes niveles de desarrollo del esquema de integral definida en cada alumno. Para cada uno de los niveles, se describen las características que lo determinan y se muestra cómo los sujetos manifiesta dichas características en la resolución de las tareas.

Nivel intra 1. Este subnivel de desarrollo del esquema se caracteriza porque los alumnos no son capaces de establecer ninguna relación lógica entre los elementos matemáticos, recuerdan los elementos matemáticos de memoria y se muestran incapaces de utilizarlos en la resolución de las tareas; utilizan elementos matemáticos solo en las formas de representación G y A, donde muestran algunas concepciones erróneas, y resuelven algunas tareas de forma incorrecta. Por ejemplo A5, en la tarea 3.

Sea R la región entre la gráfica de la función $f(x)=x^2$ y el Intervalo [0,4]
-Utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R.
-Justifica tu respuesta.

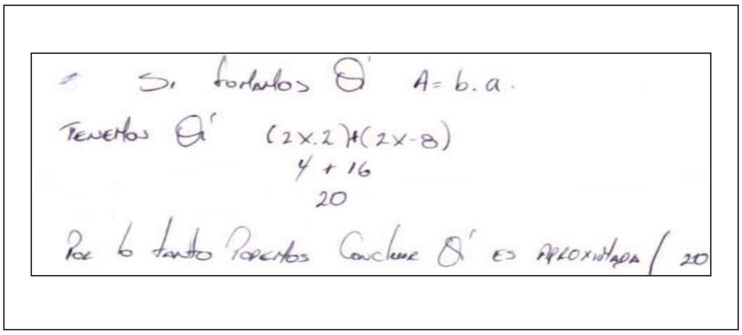
Este alumno representa de forma G la función:



A5, representación G de la tarea 3 del cuestionario

Aunque hay un intento de utilizar el elemento matemático ACA de forma G porque dibuja la función, no logra hacer ningún tipo de aproximación utilizando este elemento matemático. Recurre a un cálculo algebraico utilizando el elemento matemático ACA, para obtener unos valores aproximados.

Para ello, subdivide el intervalo en dos subintervalos de longitud de la base 2 unidades cada uno y, para cada uno de ellos, calcula el área aplicando la fórmula del área de un rectángulo, uno de ellos de altura 2 y otro de altura 8. No hay coordinación entre los cálculos algebraicos y la representación gráfica, puesto que las alturas no se corresponden con ninguna figura geométrica que haya representado en la gráfica y tampoco se corresponden con los puntos por los que pasa la curva. Durante la entrevista, cuando se le pregunta por los cálculos que realizó en el cuestionario, no es capaz de establecer un razonamiento lógico que los justifique.



Si tomamos θ' $A = b.a.$

Tenemos θ' $(2x.2)+(2x-8)$

$4 + 16$

20

Por lo tanto podemos concluir θ' es aproximada / 20

A5, resolución A de la tarea 3 del cuestionario

Nivel intra. En este nivel, los alumnos suelen realizar algún intento de conjunción lógicaentre elementos matemáticos, recordar elementos matemáticos inconexos de forma aislada y utilizarlos en la resolución de las tareas y no tener sintetizados los modos de representación, especialmente el AN. Por ejemplo A4, en la tarea 2:

Sea R, la región encerrada por el gráfico de la función *(f(x)*=$4x$ y el eje *x*, en el intervalo [–2,2].

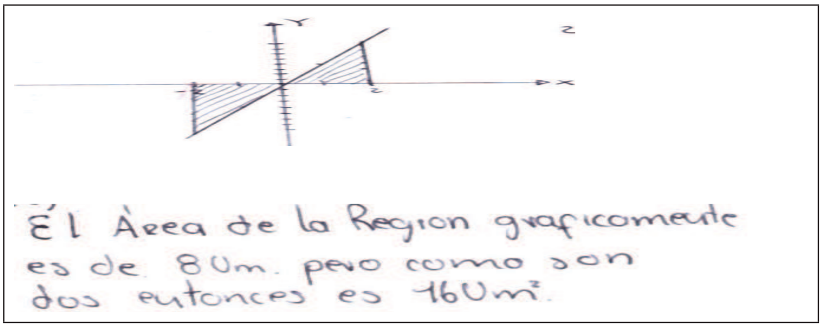
a. Dibujar la gráfica.

b. Calcular gráficamente el área de la región R.

c. Calcular la $\int_{-2}^{2} 4x\,dx$.

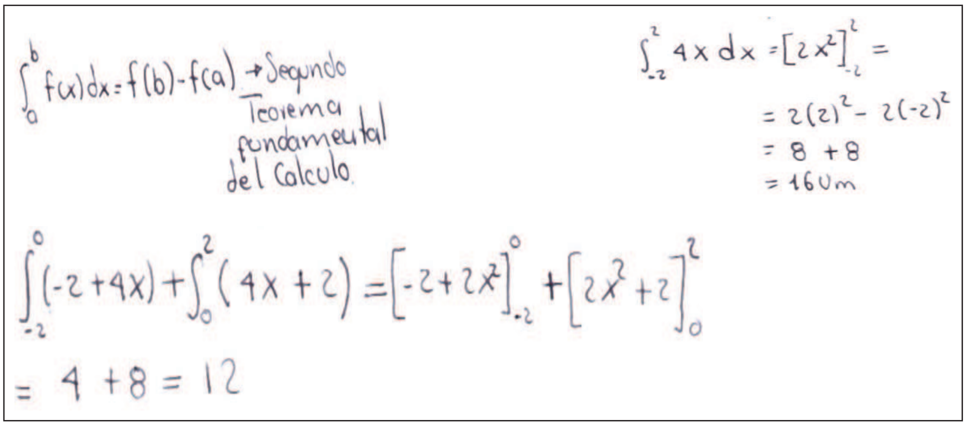
d. ¿Son iguales los dos resultados anteriores? Justificar cada paso.

Esta alumna representa gráficamente la función y utiliza esta representación para calcular gráficamente el área que se le pide.



A4, representación G de la tarea 2 del cuestionario

Ha utilizado el elemento matemático ACA de forma G, porque traza la gráfica de la función, forma dos triángulos rectángulos simétricos, uno sobre el eje x y el otro bajo el eje x, calcula el área de un triángulo y como los triángulos son iguales la duplica y obtiene el área total. Cuando se le plantea calcular la integral, esto es lo que hace:



A4, resolución A de la tarea 2 del cuestionario

Justifica el procedimiento afirmando que aplica el elemento matemático TFV y luego hace otro cálculo de la integral de forma errónea aplicando el elemento LID, concretamente la integración de funciones positivas y negativas, puesto que suma incorrectamente a cada integrando los extremos del intervalo [–2,2] de integración. En el protocolo de la entrevista explica cómo resolvió la tarea:

A4:…..le di valores a la x, para poder hallar la recta y dibujarla….

I: ¿Cómo ha calculado el área gráficamente?

A4: El área del triángulo es base por altura sobre 2, luego tengo de base 2 y de altura 8, entonces dos por ocho 16 y dividido entre 2, ocho. Como tengo otra figura igual, es solo multiplicar por 2 y obtengo las 16 unidades de medida cuadrada.

I: ¿El área que está bajo el eje OX es igual que la que está por encima del eje OX?

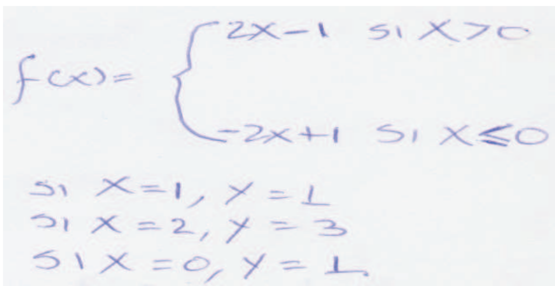
A4: No, porque es igual pero con signo contrario. Las áreas deben ser siempre positivas.

Demuestra que es capaz de calcular correctamente el área de forma G a partir del área de dos triángulos rectángulos de los que conoce fácilmente sus dimensiones pero, cuando se le pregunta si el área que está por encima del eje OX es igual al área que está por debajo del eje OX son iguales, se contradice porque dice que son iguales, pero de signo contrario, y afirma que las áreas deben ser positivas.

Nivel ínter 1.En este subnivel de desarrollo del esquema del concepto de integral definida, es característico que el sujeto sea capaz de usar la conjunción lógica (y lógica) de forma correcta entre elementos matemáticos dados en el mismo sistema de representación; recordar algunos elementos matemáticos gráficos, algebraicos y/ o analíticos, y tener un esbozo de síntesis de los sistemas de representación gráfico y algebraico. Por ejemplo, A7, en la tarea 4.

Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=\|2x-1\|$, en el intervalo [0,2] y el eje x Justificar la respuesta.

Para representar la función, este alumno analiza los valores que toma según que sea positiva o negativa la función $2x-1$, aunque en el planteamiento se confunde entre las abscisas y las ordenadas y considera los casos en que x sea positivo o negativo.

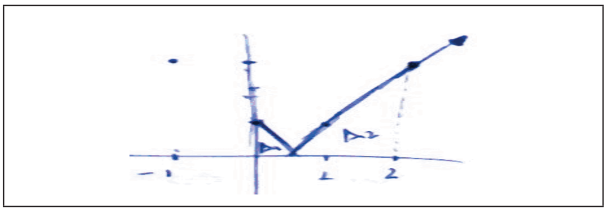


A7, representación A de la tarea 4 durante el cuestionario

Esto mismo lo expresa durante la entrevista. Está trasfiriendo directamente lo que recuerda del valor absoluto de x, al valor absoluto de $2x-1$.

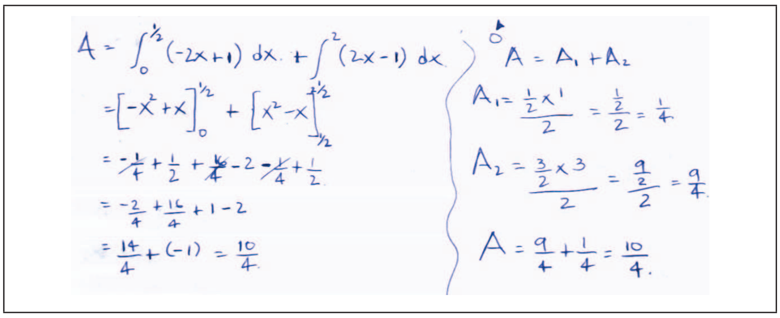
A7: El valor absoluto de esa función habría que redefinirlo como la función va a valer $2x-1$, si x es mayor que 0 y va a valer $-(2x+1)$, si x es menor o igual a 0.

Para representar gráficamente la función, da valores a x para obtener los valores correspondientes de y, obteniendo la siguiente gráfica.



A7, representación G de la tarea 4 del cuestionario

Posteriormente calcula el área limitada por la gráfica de la función.



A7, representación A de la tarea 4 del cuestionario

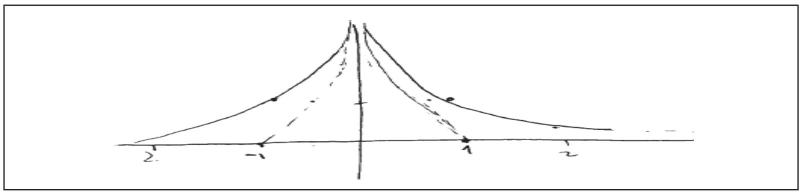
Para ello relaciona varios elementos matemáticosde forma A y establece una conjunción lógica entre los elementos matemáticos ACA,LID, PID y TFV.

Nivel ínter. En este nivel de desarrollo del esquema de integral definida hay un aumento del tipo de relaciones lógicas que los sujetos establecen entre los elementos matemáticos gráficos, algebraicos y analíticos, y lo hacen con más frecuencia. Los sujetos usan diferentes relaciones lógicas entre elementos matemáticos de forma correcta, salvo alguna excepción (generalmente en el mismo sistema de representación), recuerdan los elementos matemáticos necesarios en la resolución de una tarea en varios sistemas de representación (gráfico, algebraico y/o analítico), y tienen esbozo de síntesis de los sistemas de representación gráfico, algebraico y/o analítico.Por ejemplo, A2, en la tarea 7c.

Decidir si la afirmación es verdadera o falsa. En caso de ser falsa, explicar por qué o mostrar un contraejemplo.

$$\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$$

El alumno realiza una representación G de la función:



A2, representación G de la tarea 7c durante la entrevista

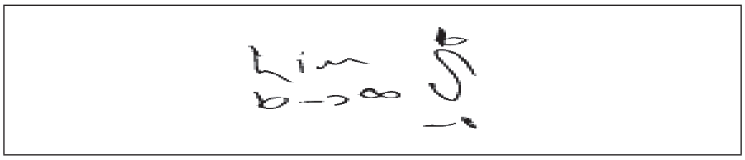
Esto le permite visualizar cuándo la función es discontinua:

I: ¿Cuál es el razonamiento que hace acerca de la proposición 7c?

A2: Es discontinua. En cero. No se puede aplicar.

I: ¿Por qué, qué haría entonces?

A2: Se resolvería como una integral impropia, porque la integral es impropia. Porque presenta una discontinuidad infinita, si es impropia. Uno de sus límites es infinito o el integrando presenta una discontinuidad de tipo infinito.



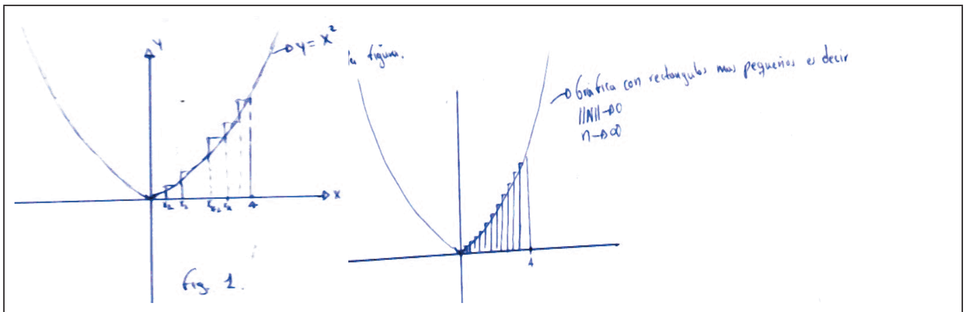
A2, representación A de la tarea 7c durante la entrevista

Este alumno comprende los elementos matemáticos necesarios implícitos para tomar una decisión sobre el valor de la proposición, responde y justifica correctamente el valor de falsedad de la afirmación, establece una relación de conjunción lógica entre los elementos matemáticos LID y TFV cuando considera que la función es discontinua, y por eso no cumple las condiciones necesarias para poder aplicar la regla de Barrow. Además, intenta plantear una integral impropia de forma AN para mostrar cómo se podría calcular la integral presentada en la tarea.

Nivel trans. En el nivel de desarrollo trans del esquema de integral definida, el sujeto suele usar diferentes relaciones lógicas (conjunción lógica, condicional y la contraria de la condicional) entre los elementos matemáticos de forma correcta; suele recordar los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea usando los significados implícitos para tomar decisiones, y muestra tener síntesis en los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.Por ejemplo, A11, en la tarea 3:

Sea R la región entre la gráfica de la función f(x)=x2 y el intervalo [0,4]
-Utiliza particiones para aproximar el valor del área de la región R.
-Justifica tu respuesta.

Este alumno trata de rellenar el área por medio de rectángulos de forma G:



A11, representación G de la tarea 3 del cuestionario

Divide gráficamente el intervalo mediante una partición regular, por lo que está utilizando el elemento matemático ACA de forma G. En la figura de la izquierda, traza 5 rectángulos superiores, y en la figura de la derecha, traza bastantes rectángulos superiores para aproximar el área, afirmando que "la gráfica representarectángulos más pequeños y la norma de la partición tiende a cero, entonces n tiende a infinito", por lo que se podría deducir quetiene la intuición de indivisibles en relación con el área de la figura de la derecha. Luego resuelve la tarea de la siguiente forma:

Sea P una partición del intervalo $[0,4]$

$P = a = 0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{k-1} < x_k \ldots < x_n = b$ supongamos que P es partición regular y nos queda $\boxed{\Delta x = \frac{4}{n}}$ entonces

$x_0 = 0$

$x_1 = \frac{4}{n}$

$x_2 = 2\left(\frac{4}{n}\right)$

$\vdots$

$x_k = k\left(\frac{4}{n}\right)$

Sea $x_k = \varepsilon_k$ y refinamos la partición es decir $\|N\| \to 0$ o sea $n \to \infty$ y nos queda

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\, \Delta x = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{16k^2}{n^2}\right) \frac{4}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{64k^2}{n^3}$$

$$= \frac{64}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{64}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{128\, n^3 \ldots}{6n^3} = \frac{128}{6} = 21.3$$

A11, resolución A y AN de la tarea 3 del cuestionario

El alumno establece una relación entre la representación G y los sistemas de representación A y AN de los elementos ACA y ALS porque, a partir de las gráficas anteriores, calcula las sumas de Riemann, y calcula el límite para obtener el valor del área.

> I: ¿Sabría comentarme cómo ha resuelto la tarea?
>
> A11: Me piden que utilice particiones, entiendo por partición como coger un intervalo y dividirlo en un conjunto de $n-1$ puntos, donde esos puntos van a ser mayores que el extremo izquierdo, pero menores que el extremo derecho del intervalo, entonces lo que hice fue suponer que los puntos van a ser x_1, x_2 y que todos estos valores eran mayores que "a", que era en este caso cero, que era el extremo izquierdo del intervalo y que todos esos puntos eran menores que "b", eso es lo que entendía como particionar, por comodidad tuve en cuenta que iba a particionar esto con una cosa que se llama la partición regular, que es que la longitud de cada intervalo sea la misma. Después de eso lo que hice fue aplicar la definición de integral definida y la suma de Riemann.

A partir del esquema general de aproximación, utiliza las sumas de Riemann y les aplica el límite para establecer conexión con el elemento matemático la LID. Establece relación entre los elementos matemáticos ACA y LID, porque relaciona el concepto de área como una aproximación y el concepto de integral definida.

El análisis y los resultados mencionados en el apartado anterior, nos permitieron caracterizar a cada estudiante en un determinado nivel de desarrollo del esquema del concepto de integral definida por la forma como había resuelto todas las tareas a lo largo del cuestionario, por la manera de justificar los procedimientos de resolución durante la entrevista, y por la representación de dicho concepto matemático por medio de un mapa conceptual. El establecimiento del nivel de desarrollo para cada alumno se hizo asignando el mayor de los subniveles que demostró utilizar en la resolución de las tareas. Esto se hizo a pesar de que para algunas situaciones mostrara un nivel de desarrollo inferior. Además, se ha demostrado que el desarrollo del esquema del concepto de integral definida está ligado al de otros conceptos como el de función, límite, continuidad o derivabilidad. El dominio de estos otros esquemas determina, en gran medida, el grado de adquisición del concepto de integral definida.

CONCLUSIONES

En un comienzo de desarrollo del esquema, en el nivel INTRA 1, el estudiante no es capaz de establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos que utiliza en la resolución de las tareas y, muchas veces, cuando se produce un indicio de relación lógica lo hace de forma incorrecta. En el nivel INTRA se evidencian las primeras apariciones de un intento de conjunción lógica, aunque sigue siendo de manera aislada o inconclusa. De forma creciente y progresiva en los niveles ÍNTER 1, ÍNTER y TRANS se van incrementando las relaciones lógicas, ya no solo se establece la conjunción lógica, sino que aparece, además, la condicional, y en algunos casos, la relación del contrario de la condicional.

Dentro de las relaciones lógicas hemos identificado que la conjunción lógica se establece siempre entre dos o más elementos matemáticos que generalmente están coordinados de modo gráfico y algebraico, y en algunos casos se utiliza también el registro analítico; la condicional o implicación lógica es una relación que se establece vinculada a las propiedades de la integral definida, y la relación del contrario de la condicional es una relación que aparece asociada a la condición suficiente de existencia de la integral definida.

En cuanto a los sistemas de representación, algunos alumnos tienen dificultades con la representación gráfica de algunas funciones como es el caso de la función valor absoluto. En otras situaciones, para determinar el área de los rectángulos superiores o inferiores, necesitan establecer no solo la base sino también la altura; para ello deben coordinar el sistema gráfico y el algebraico, pero no son capaces de identificar la altura de los rectángulos a partir de la gráfica y de la expresión algebraica que representa la función, y como no coordinan el registro gráfico con el algebraico, aunque dibujan rectángulos inferiores, las áreas las calculan para rectángulos superiores.

De las consideraciones anteriores surgen ciertos interrogantes que desde una perspectiva de futuro podrían ser motivo de investigación: ¿cómo debe organizarse la enseñanza a partir de los resultados de esta investigación para mejorar el aprendizaje de este concepto matemático? ¿Cómo podemos ayudar a los alumnos a superar aquellas dificultades y/o concepciones erróneas que tienen en relación con los elementos matemáticos que constituyen el concepto de integral definida? Dado que el elemento matemático el "área como límite de una suma" es aquel en el que los alumnos muestran más dificultades por no tener encapsulado el concepto de límite como un objeto matemático ¿cómo podríamos profundizar en su aprendizaje? Este estudio se ha hecho con alumnos de licenciatura de Matemáticas, ¿cambiaría significativamente la caracterización del esquema de integral definida si los alumnos fuesen de otras titulaciones? ¿Cómo planear un diseño curricular que permita construir los conceptos previos y adquirir un aprendizaje duradero de aquellos elementos matemáticos que configuran el concepto de integral definida? Nuestro trabajo se ha basado en el desarrollo de la comprensión del concepto de la integral definida, mediante un estudio descriptivo y explicativo de los resultados obtenidos, a partir de los elementos matemáticos y de las relaciones lógicas establecidas entre dichos elementos matemáticos. De acuerdo con esta descripción del grado de comprensión que muestran los alumnos sobre la integral definida ¿cómo lograr que los alumnos adquieran una construcción/comprensión de forma consciente de este concepto matemático?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aldana, E. (2011). Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría "APOE". Tesis doctoral. Salamanca:Universidad de Salamanca España.

Aldana, E., & González, M. T. (2009). Comprensión del concepto de integral definida, el caso de un alumno universitario. (CD). XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación Matemática (SEIEM). Santander (España).

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Development in Ungraduate Mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education, 2, 1-32.

Calvo, C. (1997). Bases para una propuesta didáctica sobre integrales.Tesis de Maestría.Universitat Autónoma de Barcelona

Camacho, M., Depool, R. & Sabrina, G. (2008). Integral definida en diversos contextos. Un estudio de casos. Educación Matemática, 20, 3, 32-57.

Czarnocha, B., Dubinsky, E., Loch, S., Prabhu, Vrunda. & Vidakovic, D. (2000). Conceptions of Area: In Students and in History. College Mathematics Journal, 32, 2, 99-109.

Czarnocha, B., Dubinsky, E., Loch, S., Prabhu, Vrunda. & Vidakovic, D. (2000). Conceptions of Area: In Students and in History. College Mathematics Journal, 32, 2, 99-109.

Depool, R. A. (2004). La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un programa de cálculo simbólico (PCS). Tesis Doctoral. La Laguna: Universidad de La Laguna.

DeVries, D. J. (2001). RUMEC / APOS TheoryGlossary. Georgia Collage & State University.Milledgeville.http://www.cs.gsu.edu/~rumec/Papers/glossary.html. [Disponible el 18 de agosto de 2008]

Dreyfus, T. (1991). Advanced in Mathematical Thinking Processes. En D. Tall. (Ed.).Advanced in Mathematical Thinking (pp. 25-41). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, En D. Tall. (Ed.). Advanced Mathematical Thinking (pp. 95-123).Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetana a la educación matemática universitaria. Educación Matemática, 8, 3, 24-41.

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 3, 1, 47-70.

Dubinsky, E. & MacDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduated Mathematics Education Research. En D. Holton (Ed.),The teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study. 7 (pp. 273-280). Dordrecht: Kluwer Academia Publisher.

González-Martín, A. S. (2006). La generalización de la integral impropia desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y aprendizaje. Tesis doctoral. La Laguna: Universidad de la Laguna.

Ginsburg, H. P., Kossan, N. E., Schwartz, R. & Swanson, D. (1983). Protocol Methods in Research on Mathematical Thinking. En H. P. Ginsburg (Ed.): The Development of Mathematical Thinking. New York: Academic Press.

Mundy, J. (1984).Analysis of Errors of First Year Calculus Students. En A. Bell, B. Low, & J. Kilpatrick (Eds.). Theory Research and Practice inMathematics Education. Proceedings, ICME 5.Adelaide, Working group reports and collected papers, Shell Center. Nottingham.170-172.

Orton, A. (1983). Students' Understanding of Integration.Educational Studies in Mathematics.14, (1), 1-18.

Paschos, Th. & Faumak, V. (2006).The reflective abstraction in the construction of the concept of the definite integral. A case study. En J. Novotna; H. Moraova; M. Kretke; N. Stehlikova (eds.) Proceedings of the 30th Conference of Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education, (Vol. 4, pp. 337-344). Prague: Czech Republic.

Piaget, J.; García, R. (1982). Psicogénesis e historia de la ciencia. México, España, Argentina, Colombia. (Madrid): Siglo XXI.

Rasslan, S. & TalL, D. (2002). Definitions and Images for the Definite Integral Concept.Proceedings of the 26th PME. 4, 89-96.

Turégano, P. (1994). Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo infinitesimal. Tesis Doctoral. Valencia: Universitat De València.

Vinner, S. (1991).The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En D. Tall. (Ed.). Advanced Mathematical Thinking, 66-81. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.