

# Activités géométriques en formation d'enseignants de mathématiques au lycée – une étude de cas à l'école normale supérieure de Bamako

## Geometric Activities in the Formation of Mathematics High School Teachers: a Case Study at École Normale Supérieure from Bamako

---

MAMADOU SOULEYMANE SANGARÉ<sup>1</sup>

### Résumé

*Cet article présente certains résultats obtenus dans la réalisation à mi-parcours, d'un projet de recherche-développement, sur la formation des élèves-professeurs du lycée, option mathématiques de l'École Normale Supérieure de Bamako. Notre intérêt porte sur la problématique liée à la conception et à la mise en œuvre de dispositifs de formation en géométrie. L'objectif essentiel est de mener une étude réflexive sur la construction et la mise à l'épreuve de certains types d'activités en géométrie euclidienne plane, proposées depuis la rentrée 2013-2014. Deux activités de formation ont été proposées à des élèves-professeurs - option mathématiques – en géométrie euclidienne plane, dans une perspective de recherche des facteurs déterminants qui pourraient fonder leur pertinence en formation d'enseignants.*

**Mots clés:** *Activité géométrique. Formation d'enseignants. Didactique des mathématiques.*

### Abstract

*This article presents some results obtained halfway in the realization of a research project for the training of high school math teachers graduating from Ecole Normale Supérieure (High school professors training college) in Bamako. Our interest is on the conception and implementation of training mechanisms in geometry. The main objective is to do a reflexive study on the construction and the challenging of some types of activities in plane euclidian geometry proposed since the beginning the previous school year (2013-2014). Two training activities were proposed to some student teachers majoring in maths specializing in plane euclidian geometry with the aim to find out key factors that could prove their effectiveness in teachers training.*

**Key words:** *Geometrical activity. Teachers training. Didactic of mathematics.*

### INTRODUCTION

Ce travail est une synthèse du bilan à mi-parcours d'un projet de recherche-développement pour la formation initiale d'enseignants en mathématiques. L'étude porte sur la problématique de la formation en géométrie des élèves-professeurs qui à leur sortie, sont chargés d'enseigner les mathématiques au lycée. Les origines de cette étude

---

<sup>1</sup> Maître de Conférences - Équipe de Didactique des Mathématiques EDiMath  
École Normale Supérieure de Bamako, DER de Mathématiques, Mali.  
mamadoussangare@yahoo.fr

remontent à un questionnement sur la nature du contenu de formation en géométrie, pour de futurs professeurs de lycée, option mathématiques. De façon récurrente se pose la question liée aux approches d'élaboration de ce corpus géométrique et les méthodes de mise en œuvre avec les élèves-professeurs. Une première expérience ponctuelle de formation d'enseignants a été menée sur une caractérisation non usuelle des transformations géométriques du plan (Sangaré, 2010). Elle était centrée sur des questions relatives au rapport "savoir académique/savoir scolaire" à propos de la notion de modèle des marques d'une transformation géométrique du plan conçue initialement pour faire évoluer les conceptions d'élèves en début de lycée (Ibid., 2006). La séquence expérimentale mise en œuvre, a permis aux élèves-professeurs de prendre conscience de l'intérêt didactique lié à l'étude des interactions entre la géométrie académique où la figure n'a aucune forme facile à discerner et une géométrie du compas et de la règle où les premières connaissances sont le plus souvent de nature spatiale. La présente étude se propose d'élargir cette première expérience à deux types de d'activités géométriques que nous soumettons à l'épreuve à l'aide d'une séquence de formation. Le premier type d'activité est relatif à la mise en relation de trois types de tâches (Chevallard, 2001) : construire une figure, décrire une construction géométrique et justifier une construction géométrique. Le second type est relatif à une tâche de définition d'un objet mathématique (Ouvrier-Bufferet, 2013). L'approche méthodologique puise ses éléments structurants en conjuguant les aspects mathématiques, didactiques et professionnels en formation d'enseignants; elle prend «en compte la complexité des pratiques (Robert, 2010, p.87) ». Nous nous proposons de faire vivre cette complexité à l'élève-professeur en le situant comme un nœud d'un réseau de situations de formations dont les effets respectifs (en termes de compétences professionnelles) ne sont ni isolés ni superposés, mais intégrés les uns aux autres (Sangaré, 2006).

## **I. CONTEXTE DE L'ÉTUDE**

Ce travail est à considérer comme une recherche-développement; elle est menée au sein d'EDiMath<sup>2</sup>, dans un double contexte. Le premier concerne le basculement de l'École Normale Supérieure de Bamako vers le système Licence-Master-Doctorat (LMD) depuis 2011. Le second est relatif à la reformulation des contenus d'enseignement des lycées au Mali en termes «d'Approche Par Compétences (APC)». Ce basculement préconise une

---

<sup>2</sup> EDiMath: Équipe de Didactique des Mathématiques – DER de Mathématiques – ENSUP/Bamako

professionnalisation conséquente des parcours de formation exigeant en particulier, une mise en relation soutenue des formations mathématique, didactique et professionnelle. L'étude est menée en filière, "Professeurs d'Enseignement Secondaire (PES)<sup>3</sup>", option mathématiques, avec une durée de formation de deux ans et un profil d'entrée correspondant à une licence en mathématiques. La première année est consacrée à des compléments disciplinaires (algèbre, analyse, statistique et probabilités), à la didactique des mathématiques et aux types de formation appelés préprofessionnels tels que les modules intitulés «observation de classes» et «enseignement de la géométrie». La seconde année est réservée au stage en responsabilité et au mémoire professionnel. Les activités géométriques élaborées pour cette étude, ont eu pour public cible les élèves-professeurs de première année (PES1) de l'année 2013-2014 avec un effectif de 21 présents.

L'objet d'étude porte précisément sur le module intitulé «enseignement de la géométrie»; il vise un triple objectif afin de permettre aux élèves-professeurs:

- *de s'approprier le statut et les fonctions de la géométrie à travers les programmes, et leurs évolutions respectives du second cycle fondamental au lycée;*
- *d'appréhender la géométrie en tant que domaine de modélisation de problèmes connexes aux mathématiques (physique, chimie, etc.), ou de problèmes «concrets»;*
- *de construire des ressources pédagogiques en géométrie conformes au curriculum en vigueur, de les mettre l'épreuve de la pratique de classe et construire une attitude réflexive sur les résultats obtenus.*

La méthode de formation adoptée repose sur une recherche individuelle suivie d'un travail collaboratif en petits groupes autour d'activités dont la réalisation des tâches associées s'effectue en partie en classe et poursuivie en dehors de la classe. Un bilan public en sera fait pour toute la classe. Le module «enseignement de la géométrie» a un volume horaire annuel de 50 heures dans l'actuel système de formation.

## **II. CADRE CONCEPTUEL DE L'ÉTUDE**

### **II.1. SYNTHÈSE DES RECHERCHES RÉCENTES EN GÉOMÉTRIE**

Les dispositifs de formation en géométrie ont été l'objet de plusieurs travaux de recherche. A ce sujet, Kuzniak (2003) s'est penché sur la problématique liée à «la

---

<sup>3</sup> Au Mali, le Professeur d'Enseignement Secondaire enseigne au lycée.

construction d'une didactique de la géométrie pour la formation des enseignants». Cette construction recouvre à la fois deux principaux enjeux : un enjeu épistémologique qui s'appuie sur des jeux entre trois paradigmes associés à la géométrie élémentaire («géométrie naturelle (GI), géométrie axiomatique naturelle (GII) et géométrie axiomatique formaliste (GIII), (Ibid., pp. 17-21); un enjeu didactique fondé sur le concept d'Espace de Travail de la Géométrie (ETG). Nous nous intéresserons en particulier aux jeux entre la Géométrie I et la Géométrie II, car, le passage de la première à la seconde constitue un enjeu essentiel et préconisé explicitement, dans le curriculum du Mali, relativement à l'enseignement et à l'apprentissage de la géométrie au second cycle fondamental et au lycée<sup>4</sup>. En rapport avec la même approche, Houdement (2013) montre que la présence de ces trois géométries permet d'expliquer en partie les ruptures rencontrées dans l'enseignement, respectivement dans les transitions école/collège et collège/lycée. Elle provoque aussi au sein de la classe entre enseignant et élèves des malentendus pédagogiques dus à une différence de position épistémologique par rapport à la géométrie.

Parzysz (2006) s'appuie sur les résultats cités ci-dessus pour proposer un cadre théorique qui comporte un quatrième paradigme noté (G0) «qui n'est pas encore une géométrie car ses objets sont des réalisations matérielles avec toutes leurs caractéristiques... (Ibid. 2006, p.130). Il présente alors les différentes articulations entre ces quatre paradigmes à l'aide du Tableau ci-dessous.

**Tableau 1.**

	<b>Géométries non axiomatiques</b>		<b>Géométries axiomatiques</b>	
<b>Types de Géométrie</b>	Concrète (G0)	Spatio-graphique (G1)	Proto-axiomatique (G2)	Axiomatique (G3)
<b>Objets</b>	Physiques		Théoriques	
<b>Validations</b>	Perceptive-déductives		Hypothético-déductives	

Nous prenons appui également sur les travaux d'Ouvrier-Buffet sur «la modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve, (Ibid. p.5)». Au plan épistémologique, elle met en évidence «trois conceptions revisitées (Ibid. p.67)» sur l'activité de définition en formation d'enseignants; nous nous intéressons en particulier sur la «conception aristotélicienne, (Ibid. p.67)» qui est considéré comme assez

---

<sup>4</sup> Au Mali, le second cycle comprend trois années scolaires ; il correspond à peu près au collège en France (élèves 13 à 16 ans) et le lycée recouvre trois années scolaires finalisées par le baccalauréat (élèves de 16 à 19 ans).

pertinente sur les problèmes de géométrie plane. Par ailleurs, Proulx (2012) a ouvert un chantier encore d'actualité, sur le concept de «mathématiques de la didactique» en formation d'enseignants; selon ce point de vue, les articulations souhaitées entre formation mathématique et formation didactique dépendent essentiellement, des résultats de recherche sur ce concept. Pour cette étude, nous nous limiterons aux aspects liés à la géométrie en formation d'enseignants.

La réalisation de notre dispositif s'inscrit aussi dans le cadre des registres de représentation sémiotique développés par Duval (1995, et 2003). En effet, l'enseignement des mathématiques au second cycle fondamental puis au lycée, exige une «synergie, non naturelle, entre les registres de représentation sémiotique hétérogènes qui est évidemment fondamentale. Et la géométrie, à l'opposé de l'algèbre constitue le domaine où cela apparaît la plus spectaculaire. (Ibid. 2003, p. 54)». Par ailleurs, la conception de nos activités de formation en géométrie s'appuie aussi sur le point de vue développé par Bosch et Chevallard (1999) sur la dialectique de l'ostensif et du non-ostensif dans la réalisation de toute activité mathématique, particulièrement dans le domaine de la géométrie.

## **II.2. NOTRE POINT DE VUE**

Nous développons dans ce paragraphe deux notions encore en chantier, qui sont utilisées dans l'enseignement et dans l'apprentissage de la géométrie au second cycle fondamental et au lycée. La première est relative aux connaissances liées à la notion de registre gestuel, la seconde a trait à la notion de configuration. Leurs origines respectives résultent de constats observés lors des séances de formation suite à leur mise à l'épreuve dans des activités proposées aux élèves-professeurs.

### **II.2.1. Le registre gestuel en géométrie plane: registre de l'implicite et du malentendu**

L'incapacité de plusieurs élèves-professeurs face à des tâches de description d'une technique de construction géométrique<sup>5</sup> malgré une bonne maîtrise gestuelle de celle-ci, a retenu notre attention au cours de deux années consécutives d'observation (2012-2013 et 2013-2014). La réponse donnée en guise d'explication de ces faits peut être formulée comme ci-après: «j'ai toujours appris à le faire mais je ne peux l'expliquer et on m'a

---

<sup>5</sup> Par exemple, "construire avec le jeu d'instruments {règle non graduée ; équerre}, la parallèle à une droite donnée ( $D$ ) passant par un point  $A$  extérieure à ( $D$ ).

toujours noté à partir de la figure obtenue». Leur fréquence d'apparition a orienté notre réflexion vers une appréhension de ces faits en termes de problème pertinent de formation d'enseignants en géométrie. En effet, les connaissances engagées fonctionnent essentiellement de façon implicite dans la relation didactique; c'est ce que Brousseau (2008) cité par Bessot (2011), semble pointer comme ci-dessous en termes de connaissances *vs* savoir:

Par exemple, je connais un parcours pour me rendre à un certain endroit, je sais l'utiliser sans erreur. Mais je suis incapable de le décrire avec précision et certitude car j'utilise des informations que je ne reconnais que lorsque je les rencontre dans la situation, sans qu'il me soit nécessaire de les avoir identifiées. J'utilise un schéma simplifié qui est beaucoup plus économique pour me souvenir du trajet. Les informations du schéma général, identifiables, sûres et articulées sont des savoirs, elles ne sont suffisantes que grâce aux connaissances complémentaires. (Brousseau, 2008 a, p.6)

Notre point de vue est le suivant: si pour les premiers apprentissages en géométrie, les élèves peuvent être évalués quelques fois à partir de leur seule production en termes de dessin géométrique, en formation d'enseignants les activités géométriques doivent être beaucoup plus complexes pour ne pas restreindre les échanges en classe à de simples gestes professionnels qui pourraient engendrer des malentendus. Aussi, nous considérons que les gestes cordonnés effectués à l'aide d'instruments de géométrie (règle, compas équerre, rapporteur) pour réaliser certains types de tâche<sup>6</sup>, constituent un registre qui doit être mis en interrelation permanente avec les registres respectifs utilisés pour la description du dessin géométrique produit, et ceux utilisés pour expliciter la technologie associée à ces techniques. En cela, nous prenons appui sur le point de vue de Bosch et Chevallard (1999), énoncé comme ci-après:

La fonction sémiotique des ostensifs, leur capacité à produire du sens, ne peut être séparée de leur fonction instrumentale, de leur capacité à s'intégrer dans des manipulations techniques, technologiques, théoriques. Ibid., 1999, p. 95».

Ce point de vue nous paraît pertinent surtout en géométrie plane au niveau du second cycle fondamental et au lycée. Par ailleurs, le paradigme (G0) proposé par Parysz n'est certes pas une géométrie, les objets en jeu sont matériels. Cependant, les connaissances gestuelles pour réaliser ces objets concrets demeurent le plus souvent implicites au niveau des pratiques enseignantes. Cette inhibition des connaissances liées aux pratiques

---

<sup>6</sup> Comme construire un dessin géométrique instrumenté, vérifier expérimentalement une propriété, comparer sur un dessin géométrique des gradeurs géométriques de même nature, etc.

ostensives dans l'enseignement de la géométrie, peut être vue comme un *vide didactique* ou encore comme une source de malentendu dans la relation didactique en classe. En conséquence, elle pourrait être considérée comme un problème de formation initiale des enseignants de mathématiques dans la recherche d'articulation entre les paradigmes (G0), G(1) et (G2).

## II.2.2. La notion de configuration géométrique – figure géométrique

Dans la littérature relative à la didactique des mathématiques et à la formation des enseignants en géométrie, la notion de configuration apparaît le plus souvent dans les recherches menées sur la problématique *dessin/figure* ou encore, *connaissances pratiques/connaissances théoriques*. Ainsi, Robert (1998) énonce que dans le vocabulaire courant au niveau de l'enseignement actuel de la géométrie, le terme " configuration " est utilisé pour remplacer celui de "figure", «notamment lorsque la figure concernée, d'usage fréquent, est souvent rencontrée par les élèves et doit leur devenir familière Ibid. 1995, p. 26». Pour Destainville (1990), le " dessin codé " peut être considéré comme la représentation spatio-graphique de propriété(s) géométrique(s) que l'on veut privilégier par rapport à d'autres à propos d'une figure géométrique de référence donnée.

Notre point de vue est le suivant: la notion de configuration relève de deux exigences de l'enseignement de la géométrie au second cycle fondamental et au lycée: l'une résulte de sa légitimité théorique par rapport aux mathématiques, l'autre relève de la recherche d'une *présentation ostensive minimale* pour assurer la réussite d'un apprentissage provoqué (Sangaré, 2000). Aussi, nous qualifions cette légitimité théorique de la notion de configuration par une des propriétés caractéristiques<sup>7</sup> de la figure géométrique concernée. En effet, l'intérêt d'une telle acception est multiple.

- Dans une démarche de résolution d'un problème de géométrie, la configuration géométrique initiale perçue sur le dessin géométrique peut ne pas être celle qui permet au résolveur d'appréhender une piste de résolution. Il s'avère alors nécessaire d'activer d'autres configurations liées à la même figure en espérant ouvrir des opportunités pour

---

<sup>7</sup> En référence au Dictionnaire des Mathématiques de Bouvier A., George M. Le Lionnais F. (1996) qui dit à propos de «Propriété caractéristique d'un objet mathématique» ce qui suit: «Lorsque plusieurs assertions sont équivalentes, si l'une d'entre elles est choisie comme définition d'un objet mathématique, les autres sont alors dites propriétés caractéristiques de cet objet. Ainsi, lorsque pour un triangle T, les assertions suivantes sont équivalentes: «T possède deux côtés isométriques» et «T possède deux angles de mesures égales». Usuellement, la première assertion est choisie comme définition d'un triangle isocèle; la seconde en est alors une propriété caractéristique. Ce choix est évidemment arbitraire et n'est motivé que pour des raisons psychologiques ou pédagogiques, non mathématiques. (1996, p. 115)

changer de point de vue, envisager d'autres pistes de résolution, à travers des opérations de reconfiguration (Duval, 2003).

La résolution du problème s'avère plus ardue lorsque pour la figure géométrique en jeu, la (ou les) configuration(s) les plus pertinente(s) sont les moins sollicitées dans les pratiques de classe comme l'illustre les exemples ci-dessous.

- Pour le triangle rectangle : *Un triangle dont le milieu d'un côté est équidistant de ses trois sommets est un triangle rectangle.*
- Pour le triangle équilatéral : *Un triangle qui a deux angles de même mesure de  $60^\circ$  est équilatéral.*
- Pour le rectangle: *Un quadrilatère dont les diagonales ont même longueur et même milieu est un rectangle.*

### III. APPROCHE MÉTHODOLOGIQUE

L'approche méthodologique s'inscrit dans un objectif de production de ressources pour les professeurs de mathématiques du lycée ou pour leur formation. Pour cela, nous nous inspirons du point de vue développé par Perrin-Glorian (2011, p. 69) sur «l'ingénierie didactique pour le développement et la formation (I.D.D.)». Les activités géométriques proposées dans cette étude résultent de certains choix dont la pertinence est examinée par rapport aux résultats escomptés sur les comportements des élèves-professeurs au cours de la réalisation des types de tâches liées à ces activités.

• Ces activités sont en rupture avec les expériences vécues par les élèves-professeurs lors de leur cursus au second cycle fondamental, au lycée et à l'université sur la géométrie. Ce choix doit a priori nous permettre de problématiser les acquisitions souhaitées au niveau de ces futurs enseignants, De ce point de vue, nous avons focalisé notre étude sur deux principaux types d'activités géométriques:

- Le premier type est lié à une réalisation articulée autour de trois types de tâche qui sont souvent présentées de façon isolée dans nos pratiques de classe; il s'agit d'activités *de construction géométrique instrumentée, de description sous forme de programme de construction du dessin géométrique obtenu, et de justification théorique associée à cette construction.*



- Des activités centrées sur le type de tâche relative à *la formulation et à la justification de définition(s) d'une figure géométrique*; les figures visées sont non usuelles dans nos pratiques de classe en géométrie.

Le scénario de déroulement de ces activités repose sur le respect des consignes données pour leur accomplissement, dans une perspective de prise d'attitude réflexive sur les productions réalisées. Les activités géométriques sont menées par petits groupes de trois élèves-professeurs, avec l'exigence le plus souvent, de retravailler d'avantage les productions initiales après une séance de bilan à mi-parcours. La réalisation des activités géométriques proposées exige a priori des opérations de traitement et/ou de conversion dans les registres de représentation sollicités (Duval, 2003). Le respect des contraintes fixées doivent permettre l'émergence de conflits cognitifs et/ou sociocognitifs au sein des groupes ou au moment des séances de bilan à mi-parcours.

#### **IV. PRÉSENTATION DES ACTIVITÉS DE FORMATION**

##### **IV.1. Construction géométrique - configuration géométrique - figure géométrique**

###### **IV.1.1. Énoncé**

L'énoncé de la situation est formulé comme en (Annexe1).

###### **IV.1.2. Nos attentes par rapport à la situation**

En choisissant le jeu d'instruments {règle non graduée; compas}, nous espérons offrir plus d'opportunité aux élèves-professeurs en termes de procédures de constructions.<sup>8</sup> La situation proposée a un double objectif dans un enseignement de la géométrie en début de lycée.

- Permettre aux élèves-professeurs d'appréhender le statut et les fonctions de chacune des trois types de tâche comme indiqué ci-dessous.
- Produire un dessin géométrique codé à l'aide d'un jeu d'instruments de géométrie. La réalisation de ce type de tâche relève a priori du registre gestuel que nous situons dans le paradigme (G0): elle est finalisée par un dessin géométrique dont la légitimité est également attestée de façon expérimentale. Mais les connaissances utilisées pour produire le dessein géométrique demeurent le plus souvent implicites.

---

<sup>8</sup> Le jeu d'instruments {règle non graduée; compas} offre plus d'ouverture sur les procédures de construction de parallèle que le jeu {règle non graduée; équerre} par exemple.

- Décrire correctement la technique de construction permet a priori d'expliciter dans le registre de la langue (écrite ou orale), un programme de construction d'un dessin semblable au plan technique au dessin initial. L'attente explicite ici est relative à la communicabilité des acquis issus du registre gestuel vers le registre de la langue d'enseignement.
- Justifier la conformité du dessin géométrique obtenu à l'énoncé, en s'appuyant sur une argumentation de type «perceptivo-déductif» situé en (G1). Cette justification permet a priori de spécifier la (ou les) configuration(s) géométrique(s) attachée(s) au parallélisme de deux droites utilisée(s) pour la construction.
- Le quatrième type de tâche permet en enseignement de la géométrie, de donner du sens aux articulations possibles entre ces trois tâches; celles-ci s'appuient a priori, sur les interactions entre les paradigmes G(0) et G(1) (Tableau 1).
- Dans le triplet de types de tâche : construction de dessin géométrique à l'aide d'instruments – description du programme de construction – validation théorique, les articulations entre les trois premiers paradigmes du Tableau 1 ne sont pas innées: elles doivent être explicitées et étudiées, avant d'être retenues comme objet de formation d'enseignants.

#### **IV.1.3. Analyse des productions**

L'analyse des productions d'élèves-professeurs se focalise en particulier sur les argumentations développées par les groupes de travail au niveau de chacun des trois types de tâches, mais surtout au niveau du quatrième type de tâche à propos d'éventuelles retombées de l'activité sur l'enseignement de la géométrie dans la transition second cycle fondamental – lycée.

La majorité des dessins géométriques produits relèvent des procédures liées au parallélogramme ou au losange (5 groupes sur 7). Les descriptions sont sous forme de programme de construction; elles permettent pour la plupart, de produire un dessin *techniquement semblable* au dessin initial.

- Cependant, lors du bilan à mi-parcours, une question soulevée par le «Groupe 5» et mise en discussion s'est révélée assez significative par rapport aux malentendus liés à l'articulation des trois premières tâches. Elle a été formulée comme ci-après: *quel critère faut-il donner à des élèves de 10<sup>ème</sup> pour choisir l'un des points  $D_1$  et  $D_2$  tel que le quadrilatère correspondant soit un parallélogramme* (Annexe 2, Figure 1). En effet, la description attachée au dessin géométrique ne donne aucune raison du choix du point  $D_2$ ;

or on perçoit sur ce même dessin produit par ce groupe que,  $ABCD_1$  et  $ABCD_2$  sont deux quadrilatères qui répondent à la même propriété géométrique suivante: «*Les côtés opposés sont deux à deux de même longueur*»; mais perceptivement, le quadrilatère  $ABCD_1$  n'est pas solution car la droite ( $AD_1$ ) ne semble pas parallèle à la droite ( $A$ ). Suite à un bref débat au sein de la classe, le critère de «*convexité du quadrilatère-solution*» a émergé. Or nos pratiques de classes en géométrie font apparaître la convexité d'un quadrilatère comme une propriété implicite et anodine dans les activités géométriques. Cet épisode du bilan a permis de réécrire la description et de proposer la justification théorique suivante: «*un quadrilatère convexe qui a ses côtés opposés deux à deux de même mesure est parallélogramme*». Ce bilan permet également de percevoir la fonction heuristique du dessin géométrique dans l'articulation des trois types de tâches; nous l'interprétons comme ci-après:

- La construction effective du dessin géométrique a montré de visu, la présence des deux points  $D_1$  et  $D_2$ : nous sommes dans la réalisation de la Tâche1.
- La question sur le critère choix s'est posée lors de la recherche à partir du dessin géométrique, d'une description qui permet *le bon choix*: nous sommes dans la réalisation de la Tâche2.
- La justification théorique a été revue en donnant un statut explicite et significatif à la formulation du critère de choix : la convexité du quadrilatère-solution: nous sommes dans la réalisation de la Tâche3.

Cette interprétation peut être considérée aussi du point de vue des interactions nécessaires entre les paradigmes (G0), (G1) et (G2), dans un projet de formation d'enseignants en géométrie instrumentée en début de lycée.

• Une autre production effectuée par le (Groupe 2) a retenu notre attention (Annexe 2, Figure 2). Si la construction du dessin géométrique et la description de la technique associée semblent réussies, il n'en est pas de même pour la justification qui paraît inédite. En effet, cette justification est significative de la prégnance des figures familières utilisées dans nos pratiques de classes telles que le triangle isocèle<sup>9</sup>. Elle se situe aussi dans la dialectique «su/perçu (Parzysz, 2006, p. 137)» relative au passage G1→G2 dans une situation de production de preuve théorique d'une conjecture résultant de l'observation.

---

<sup>9</sup> Le parallélogramme peut être également sollicité comme figure familière; pour cela, une reconfiguration du dessin initial est nécessaire. (Duval, 2003).

L'extrait ci-dessous du protocole des échanges entre le formateur et les élèves-professeurs est éclairant sur ce passage.

**Elève-Professeur Groupe2:** *Voici notre justification... Si deux triangles sont isométriques et leurs bases sont la même droite ( $\Delta$ ), alors leurs sommets sont sur une droite ( $\Delta'$ ) parallèle à ( $\Delta$ ).*

**Formateur :** *Personne ne met en doute cette propriété géométrique... Mais est-elle une propriété courante dans nos pratiques d'enseignement de la géométrie au lycée?*

**Elève-Professeur Groupe1:** *Les triangles isocèles isométriques sont comme des pieux qui maintiennent la même distance entre les deux droites comme des barres de fer... (Rires).*

**Formateur :** *Oui... vous êtes dans le concret d'après ce que vous venez de dire! Nous sommes en géométrie comment formuler cette propriété physique par une propriété théorique en géométrie?*

**Elève-Professeur Groupe2:** *Ah oui je vois! On trace les hauteurs des deux triangles isocèles qui sont les mêmes. Donc ( $\Delta'$ ) est l'ensemble des points du plan équidistants de ( $D$ ) de distance  $d = d((D), A)$ .*

Cet extrait montre également que les allers-retours entre les trois paradigmes (G0) (G1) et (G2) constituent un moyen pertinent pour construire le sens et expliciter les fonctions des objets utilisés ou produits pour réaliser chacun des trois premières tâches. Par exemple, le tracé des côtés de même mesure des deux triangles isocèles  $[AI]$ ,  $[AJ]$ ,  $[BK]$ ,  $[BL]$ , n'était pas nécessaire dès lors que le point  $A$  est donné et que le point  $B$  est construit. Pour autant, faudrait-il ne pas le faire pour ce niveau scolaire? Nous ne le pensons pas, car la reconfiguration permanente des dessins géométriques construits constitue un levier pertinent pour engager les élèves dans une exploration heuristique de la situation géométrique en jeu.

## **IV.2. Une situation de définition d'un objet géométrique**

### **IV.2.1. Origines de la situation**

Les origines de la situation de définition relèvent de considérations dont certaines sont d'ordre mathématique et d'autres relèvent de la didactique des mathématiques.

#### ***Origine mathématique:***

L'origine d'ordre mathématique remonte à une recherche documentaire sur le concept de *mathématiques de la didactique pour la formation d'enseignants*, et de façon spécifique sur la géométrie plane euclidienne. L'étude des travaux de Buekenhout et al. (2006) sur la «classification objective des quadrilatères ont constitué une source d'inspiration lors de la conception de ce type d'activité de formation.

Les auteurs proposent une classification qui se fonde sur trois critères cités ci-dessous (Ibid. 2006), p. 10):

- le groupe des isométries laissant invariant le quadrilatère en jeu;
- la configuration géométrique attachée aux deux diagonales du quadrilatère;

- la configuration géométrique attachée aux côtés opposés du quadrilatère.

L'identification du quadrilatère est alors réalisée à partir de la conjugaison de ces trois critères. Enfin, cette classification permet de mettre en évidence, une représentation sous forme de schéma, des liens logiques qui existent entre les quadrilatères du plan.

***Origine didactique:***

Les travaux effectués par Ouvrier-Buffer (2013) sur la modélisation des activités de définition en formation d'enseignants sont aussi à l'origine de cette deuxième situation de formation. Celle-ci s'inspire de la première des «trois conceptions épistémologiques revisitées pour décrire et analyser l'activité de définition (Ibid. pp. 66-69)» selon le «modèle cKç (Balacheff & Margolinas, 2003)»: il s'agit de la conception aristotélicienne. Parmi les catégories de problèmes sur lesquels cette conception est opératoire, figurent en bonne place les problèmes de «classification (l'exemple de la géométrie est donné), et plus généralement : tout problème où une délimitation (au sein d'un même genre par exemple) est possible. Ibid. 2013, p. 67)» Dans nos pratiques familières de classes en mathématiques, une définition est présentée de façon ostentatoire. L'activité d'enseignement se limite en général à une présentation de celles-ci comme une *donnée première*, suivie en général d'exemples et de contre exemples, dans les différents registres de représentation préconisés par les programmes. Considérée comme allant de soi, elle doit être comprise par les élèves en supposant que leur propre effort de construction du sens serait suffisant pour atteindre les apprentissages en jeu. En conséquence, la définition est rarement l'objet de problématisation dans le travail de l'enseignant de mathématiques encore moins dans celui de l'élève.

Nous nous intéressons en particulier à la définition des quadrilatères qui sont classés le plus souvent en trois catégories: quadrilatère convexe, quadrilatère croisé, quadrilatère non convexe et non croisé. L'intérêt didactique de cette classification recouvre plusieurs aspects.

- Les manuels et les pratiques de classes au lycée, semblent privilégier la catégorie des quadrilatères convexes par rapport aux deux autres. C'est le cas par exemple de la Collection Inter Africaine de Mathématiques (CIAM, 1997, p. 13)<sup>10</sup>: dans ce cas, les quadrilatères sont au service de la notion d'*angle inscrit* dont les acquis sont réinvesties pour aborder la notion de polygone régulier (voire Annexe 3); c'est ce qui

---

<sup>10</sup> Ce manuel est très sollicité dans les pratiques de classe au lycée.

semble ressortir de l'intention pédagogique des auteurs avec la phrase introductive: «Le tableau ci-dessous définit trois types de quadrilatères dont nous aurons besoin par la suite». De plus, sur 14 exercices sur les quadrilatères, 12 sont sur les quadrilatères convexes. Ainsi, les trois catégories de quadrilatères ne sont pas considérées comme objet d'enseignement mais plutôt comme outils (Douady, 1996).

- Les conséquences d'un tel choix didactique peuvent constituer un frein voir un facteur de blocage dans la construction du sens des *éléments définitoires* d'un quadrilatère à ce niveau scolaire (sommets consécutifs, sommets opposés; côtés consécutifs, côtés opposés; angles consécutifs, angles opposés; diagonales; etc.).

#### **IV.2.2. Énoncé et caractéristiques de la situation – Nos attentes**

##### **IV.2.2.1. Énoncé de la situation**

La situation présentée comporte deux items (voir Annexe 1, Situation 2).

##### **IV.2.2.2. Caractéristiques de la situation**

###### **• Item1:**

- *Au plan mathématique:* Le quadrilatère est croisé, il admet un centre de symétrie  $E$ , qui est aussi le milieu commun à deux côtés opposés.
- *Au plan didactique:* Le dessin géométrique codé dans le spatio-graphique fait ressortir de visu, l'essentiel des éléments définitoires du quadrilatère visé. L'un des enjeux de la situation réside dans les significations que les élèves-professeurs vont attribuer aux éléments définitoires de ce quadrilatère croisé par rapport à leurs significations respectives dans le parallélogramme qui est une figure familière dans nos pratique de classes.

Sous l'hypothèse de la stabilité du parallélogramme, dans les manuels et dans les pratiques de classes, nous espérons que ces facteurs seront pertinents pour que la situation soit réellement problématique pour les élèves-professeurs. Le quadrilatère en question est souvent appelé *papillon-parallélogramme*.

###### **• Item2:**

- *Au plan mathématique:* Le quadrilatère non convexe et non croisé, admet un axe de symétrie *passant par deux sommets opposés* dont l'angle en l'un de ces sommets mesure  $270^\circ$ . On peut en déduire plusieurs propriétés de la figure en jeu ("les diagonales n'ont pas de point commun et la droite-support de l'une est la médiatrice de l'autre", "les côtés consécutifs sont deux à deux de même mesure", "la figure admet un axe de symétrie passant par deux sommets opposés" etc.)

- *Au plan didactique:* Le dessin géométrique non codé dans le spatio-graphique fait ressortir de visu, l'essentiel des éléments définitoires du quadrilatère visé. L'enjeu principal réside dans le fait que cette figure est peu familière.

Nous espérons mettre les élèves professeurs face une situation de définition inédite où les élèves-professeurs ne peuvent référer la figure géométrique en jeu à un quadrilatère familier dans nos manuels et nos pratiques de classes. Cette figure est appelée dès fois *delta-plane*; celle présentée ici est un *delta-plane* particulier, un de ses angles mesure  $270^\circ$ .

### **IV.2.3. Analyse des productions**

#### **IV.2.3.1. Analyse de l'Item1**

Nous présentons deux productions de groupes qui nous semblent significatives de l'acuité de la rupture entre les situations familières et celle proposée dans ces activités.

- **Groupe 4:**

La proposition de définition est fondée sur les éléments de symétrie de la figure au vu du dessin géométrique (présence d'un centre de symétrie). Elle ne prend pas en compte la classification en trois catégories des quadrilatères. De plus, aucun élément définitoire n'est utilisé dans la formulation de la définition proposée. Ce groupe n'a pas tenu compte du fait qu'une définition en mathématique est associée à un seul objet mathématique, même si plusieurs propriétés caractéristiques équivalentes peuvent définir le même objet mathématique.

- **Groupe 7:**

La définition proposée par ce groupe fait ressortir comme figure de référence le parallélogramme; les traits en pointillés sont des indices pertinents qui renvoient à ce choix de formulation. En conséquence, les éléments définitoires utilisés (*diagonales*, *côtés opposés*) sont toujours considérés comme ceux du parallélogramme, ils n'ont pas changé de statut dans la figure en jeu même si celle-ci est quadrilatère croisé. Nous interprétons cette production comme étant le résultat d'un travail interactif entre les paradigmes (G0) et (G1): l'expression «avec ses diagonales et on a enlevé deux côtés opposés» semble significative de ce fait.

#### **IV.2.3.2. Analyse de l'Item2**

- **Groupe 2:**

La proposition faite par ce groupe s'apparente plus à une description qu'à une définition : les informations données dans le deuxième paragraphe permettent à priori de reproduire

un dessin géométrique semblable. La production peut être considérée comme le fruit d'une reconfiguration de la figure en jeu à partir de sa représentation dans le spatio-graphique. L'opération utilisée est une décomposition (en deux triangles isocèles, dont l'un est rectangle, et qui sont encore des figures familières); elle est ensuite combinée à un critère d'ordre topologique entre les parties. Nous l'interprétons comme le résultat d'un travail interactif entre les paradigmes (G0) et (G1). Par ailleurs, les *éléments définitoires* ont été peu sollicités.

• **Groupe 5:**

C'est l'un des rares groupes ayant utilisé des *éléments définitoires* de la figure en jeu (*côtés consécutifs; diagonales du quadrilatère*). Cependant, leur production résulte a priori d'un conflit sociocognitif survenu pendant sa réalisation et non tranché? En effet, l'usage du caractère convexe au début de la formulation puis son rejet à la fin nous semble significatif de l'existence de ce conflit. A défaut d'une issue heureuse pour une première proposition, le groupe propose une définition non formulée, qui s'appuie sur le théorème de Thalès et cette deuxième tentative n'aboutit pas. Nous l'interprétons comme un indice significatif par rapport au rôle joué par cette figure pour rendre la situation problématique pour ce groupe.

## CONCLUSION

Des productions faites par les 7 groupes de travail, certaines nous semblent assez symptomatiques des difficultés qu'éprouvent les élèves-professeurs à s'approprier certains enjeux des activités géométriques pour des niveaux scolaires allant du second cycle fondamental au lycée. Un premier enjeu est celui relatif aux trois tâches – *construction géométrique instrumentée – description d'une construction – justification théorique de la construction*: elles doivent être vues comme une et même activité dans laquelle le dessin joue un rôle central en interaction permanente avec les deux autres; elle offre ainsi des possibilités de construction du sens de chacune d'elles. Le second enjeu est relatif à la classification des quadrilatères. Les manuels et les pratiques de classes présentent le plus souvent les trois catégories de quadrilatère de façon juxtaposée. Cette disposition ne semble pas pertinente pour rendre problématique une activité de définition. Une présentation simultanée de deux (ou des trois) catégories de quadrilatères pourrait être assez consistante pour problématiser l'activité de définition en mathématiques pour les élèves-professeurs. En formation d'enseignants, des combinaisons entre ces trois



catégories d'une part, et des combinaisons entre le registre spatio-graphique et celui de la langue d'enseignement d'autre part, pourraient favoriser la mobilité des significations d'un élément définitoire quelconque d'un quadrilatère. L'usage des paradigmes (G0), (G1), (G2) à travers leurs interactions deux à deux, s'est avéré opératoire dans la conception la réalisation et la mise en œuvre d'activités géométriques pertinentes pour la formation d'enseignants. Cependant, les résultats obtenus sont parcellaires, il faut les consolider dans la durée.

## BIBLIOGRAPHIE

- BALACHEFF, N. & MARGOLINAS, C. (2005). cK $\phi$  Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds), *Balises pour la didactique des mathématiques* (p. 1-32). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BESSOT A. (2011). L'ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations. In *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, (Coordonné par Margolinas et al.), pp. 29-56. XV<sup>e</sup> école d'été de didactique des mathématiques, Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme) –Du 16 au 23 août 2009. Volume 1, La Pensée Sauvage éditions.
- BOSCH M. et CHEVALLERD Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Volume 19/1, pp. 77-123, La Pensée Sauvage – Éditions.
- BOUVIER A., GEORGE M., LE LIONNAIS F. (1996). *Dictionnaire des mathématiques*. Presses Universitaires de France.
- BUEKENHOUT F. et al. (2006). Classification objective des quadrilatères. *Les Cahiers du CeDoP* à l'adresse: [http://www.ulb.ac.be./cedop/index\\_12.html](http://www.ulb.ac.be./cedop/index_12.html)
- CHEVALLERD Y. (2001). Organiser l'étude. 1. Structures & fonctions. In Dorier et al. *Actes de la 11<sup>e</sup> école d'été de didactique de mathématiques*, pp. 3-22, La Pensée Sauvage – Éditions.
- DESTAINVILLE, B. (1990), Transformations et configurations du Collège à la Seconde. In *Bulletin INTER-IREM*, (1989-1990), pp.119-124
- DOUADY R. (1996). L'ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir en mathématiques collège-seconde. In *L'enseignement de mathématiques: des repères entre savoirs, programmes & pratiques*. TOPIQUES éditions pp. 241-256.
- DUVAL R. (2003). Décrire, visualiser ou raisonner: "quels apprentissages premiers" de l'activité mathématique? *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*. Volume 8- pp. 13-62.
- DUVAL R. (1995). "Sémiosis et pensée humaine – Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels", Peter Lang.
- HOUEMENT C. (2013). Au milieu du gué: entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques. Note de Synthèse, en vue de l'Habilitation à Diriger des Recherches. Université Diderot, Paris 7.
- KUZNIAK A. (2003). Paradigmes et espaces géométriques. Note pour l'habilitation à diriger des recherches. Université Paris 7, Denis Diderot.

OUVRIER-BUFFET (2013). Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve - Étude épistémologique et enjeux didactiques. Habilitation à diriger des recherches, Université Paris Diderot.

PARZYSZ B. (2006). La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, N17, 2006, pp. 128-151

PERRIN-GLORIAN M-J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formation des enseignants. In *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, (Coordonné par Margolinas et al.), pp. 57-78. XV<sup>e</sup> école d'été de didactique des mathématiques, Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme) –Du 16 au 23 août 2009. Volume 1, La Pensée Sauvage éditions.

PROUXL J. (2012). Didactique des mathématiques ou mathématiques de la didactique? Réflexions par le calcul mental de fonctions, les lois des exposants et d'autres concepts. Actes EMF2012 – GT1

ROBERT A. (2010). Formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré: un point de vue didactique prenant en compte la complexité des pratiques. *Repères* 80, 87-102.

ROBERT A. (1998), L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES de mathématiques, I. Géométrie, 2<sup>e</sup> édition, ellipses.

SANGARÉ M. (2010). Une caractérisation non usuelle des transformations géométriques du plan pour une formation d'enseignants. *Petit x*, 82, pp. 31-54.

SANGARÉ M. (2006). La marque d'une transformation géométrique : un exemple de modélisation didactique, *Educacão Matemática Pesquisa*, Educ. Math. Pesqui, São Paulo, v.8, n.2, pp.225-266.

SANGARÉ M. (2000). La rotation: approche cognitive – approche didactique. Une étude de cas au Mali. Thèse de doctorat Université du Mali

SANGARÉ M.S. (2006) - (Page consultée le 02 juin 2011). Modèle méthodologique sur les «pratiques de classes»: Etude de cas à l'Ecole Normale Supérieure de Bamako. In *Proceedings of the fourth Mali Symposium on Applied Sciences*, Université de Bamako; pp. 171-174. [En ligne].

Adresse URL: [http://www.msas.maliwatch.org/msas-2006/msas2006\\_pp171-174.pdf](http://www.msas.maliwatch.org/msas-2006/msas2006_pp171-174.pdf)

**ANNEXES**  
**Annexe 1: Activité1 - Activité2**

**Situation 1**

«*Construction Géométrique, Description, Justification*»

**Consignes**

- Toute tâche de construction géométrique doit s'effectuer sur une feuille A4 non quadrillée.
- Les descriptions et les justifications doivent être rédigées sur la feuille de rédaction.

**Tâches**

Une droite ( $\Delta$ ) est donnée ainsi qu'un point  $A$  extérieur à ( $D$ ).


1. Construire la parallèle à ( $\Delta$ ) passant par  $A$  par deux techniques différentes.  
Jeu d'instruments: {règle non graduée; compas}.
2. Décrire chacune des deux techniques de construction.
3. Justifier chaque technique de construction.
4. Comment envisageriez-vous des articulations entre les trois premières tâches dans un enseignement de la géométrie en 10<sup>ème</sup><sup>11</sup> ? Et pourquoi?

\*\*\*\*\*


**Situation 2**

**Activité de définition**

**Item1.**

<p>La figure représentée par le dessin ci-contre, <math>E</math> est milieu de <math>[AB]</math> et de <math>[CD]</math>. La tâche consiste à définir cette figure pour des élèves de 10<sup>ème</sup> commune.</p> <p><b>Tâche 1:</b> Formulez une définition de cette figure. Justifiez votre réponse</p> <p><b>Tâche 2:</b> Formulez deux autres définitions équivalentes à celle formulée ci-dessus. Justifiez votre réponse.</p> <p>Vous pouvez travailler sur le dessin représentant chacune des deux figures</p>	
---	--

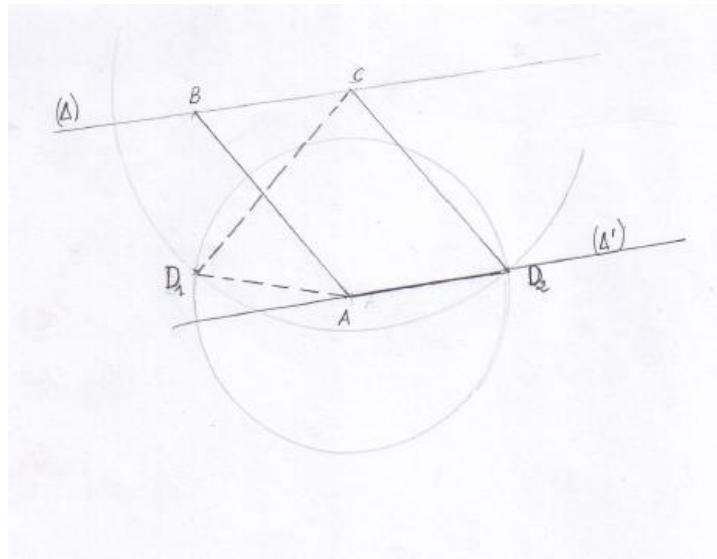
**Item2.**

<p>La tâche consiste à définir cette figure pour des élèves de 10<sup>ème</sup> commune.</p> <p><b>Tâche 1:</b> Formulez une définition de cette figure. Justifiez votre réponse</p> <p><b>Tâche 2:</b> Formulez deux autres définitions équivalentes à celle formulée ci-dessus. Justifiez votre réponse.</p> <p>Vous pouvez travailler sur le dessin représentant chacune des deux figures</p>	
--	--

<sup>11</sup> La 10<sup>ème</sup> correspond à la première année du lycée au Mali, la 2<sup>e</sup> en France

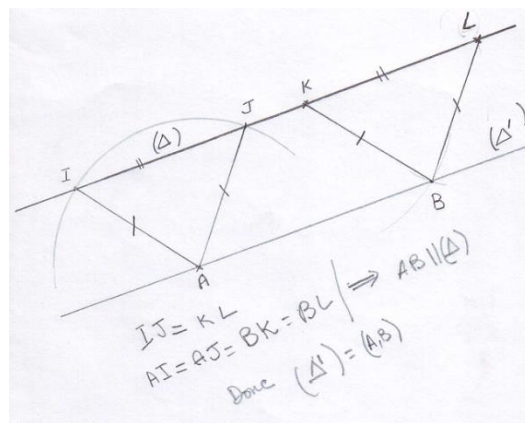
**Annexe 2: Productions issues de l'activité 1**

**Figure 1: Dessin Géométrique produit par le Groupe 5**



\*\*\*\*\*

**Figure 2: Dessin Géométrique produit par le Groupe 2**



\*\*\*\*\*

**Annexe 3: Copie de l'extrait du manuel Collection Inter Africaine de Mathématiques (CIAM)**

### 3 Quadrilatères inscrits

#### 3.1. Quadrilatère convexe, croisé

Le tableau ci-dessous définit trois types de quadrilatères dont nous aurons besoin par la suite.

Convexe	Croisé	Non convexe, non croisé
<p>Pour le quadrilatère ABCD :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Les sommets opposés A et C n'appartiennent pas à un même demi-plan de frontière (BD).</li> <li>• Les sommets opposés B et D n'appartiennent pas à un même demi-plan de frontière (AC).</li> </ul>	<p>Pour le quadrilatère ABCD :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Les sommets opposés A et C appartiennent à un même demi-plan de frontière (BD).</li> <li>• Les sommets opposés B et D appartiennent à un même demi-plan de frontière (AC).</li> </ul>	<p>Pour le quadrilatère ABCD :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Les sommets opposés A et C appartiennent à un même demi-plan de frontière (BD).</li> <li>• Les sommets opposés B et D n'appartiennent pas à un même demi-plan de frontière (AC).</li> </ul>

Angles inscrits et polygones réguliers 13

## Annexe 4: Productions issues de l'activité 2

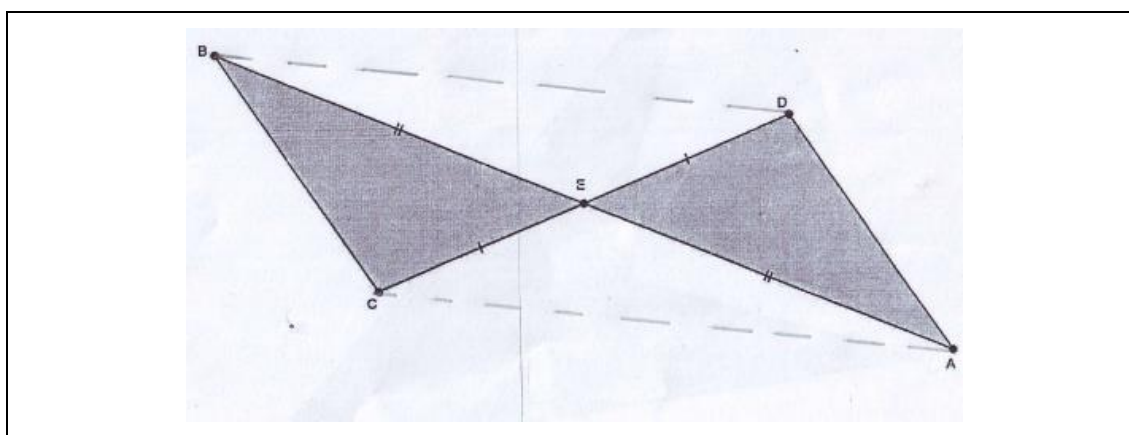
### Item 1:

#### Production du Groupe 4

GROUPE 4  
La figure peut être définie comme un quadrilatère qui a un centre de symétrie

\*\*\*\*\*

#### Production du Groupe 7



Groupe 7  
Ce dessin géométrique représente une figure géométrique qui peut être définie comme un parallélogramme avec ses diagonales et on a enlevé deux côtés opposés.

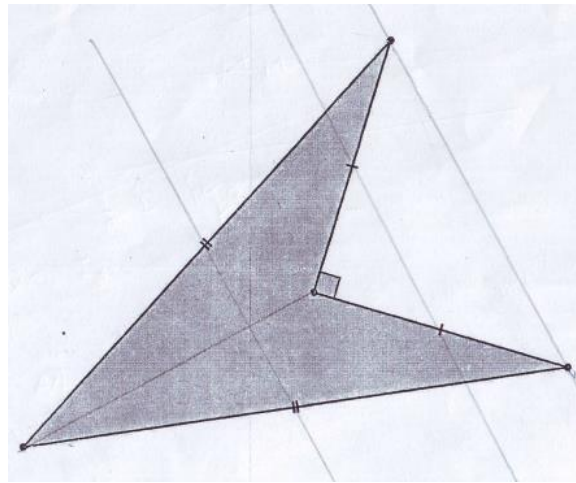
\*\*\*\*\*

#### Production du Groupe 2

Groupe 2  
La figure se compose de 2 triangles isocèles de même base; l'un des 2 triangles isocèles est rectangle et il est contenu dans l'autre.  
Base commune [BD];  $\widehat{BAD}$  isocèle en A et  $\widehat{BCD}$  isocèle rectangle en C. De plus  $\widehat{BCD} \subset \widehat{BAD}$ .

\*\*\*\*\*

*Production du Groupe 5*



Groupe 5

Définition 1: ABCD est quadrilatère convexe dont les côtés consécutifs sont à à 2 de même mesure, mais une des diagonales est hors du quadrilatère. Donc non convexe

Définition 2: Il peut être défini aussi par le théorème de Thalès.

Recebido em: 01/10/2014

Aceito em: 01/12/2014