Concepciones sobre lugar geométrico en estudiantes de arquitectura
Architecture Students' Concepts on Geometric Locus

CECILIA GAITA[1]
TOMÁS ORTEGA[2]

Resumen

En este artículo partimos de la necesidad de rescatar el trabajo con construcciones de regla y compás relacionadas con la noción de lugar geométrico. En base a ello se desarrolla una investigación con estudiantes de arquitectura en un primer curso de matemáticas. Se presentan problemas que involucran dicho concepto, algunos de los cuales se resolvieron con apoyo de GeoGebra. Para cada tarea se describen los conocimientos previos y emergentes, se realiza el análisis previo y se presentan los comportamientos esperados. Los resultados obtenidos se explican teniendo como base elementos de la teoría de registros de representación semiótica. La introducción del lugar geométrico a través de situaciones en el marco geométrico favoreció que los alumnos adquirieran una concepción dinámica y global de este concepto.

Palabras-clave: Lugar geométrico. Geometría sintética. Registro figural.

Resumo

Neste artigo partimos da necessidade de resgatar o trabalho com construções de régua e compasso relacionadas com a noção de lugar geométrico. Baseado nisso se desenvolve uma investigação com estudantes de arquitetura em um primeiro curso de matemática. Se apresentam problemas que envolvem tal conceito, alguns dos quais se resolveram com apoio do Geogebra. Para cada tarefa se descrevem os conhecimentos prévios e emergentes, se realiza a análise prévia e se apresentam os comportamentos esperados. Os resultados obtidos se explicam tendo como base elementos da teoría de registros de representação semiótica. A introdução do lugar geométrico por meio de situações no marco geométrico favoreceu que os alunos adquirissem uma concepção dinámica e global deste conceito.

Palavras-chave: Lugar geométrico. Geometria sintética. Registro figural.

Introducción

La geometría constituyó el primer ejemplo de transcripción de un proceso espacial bi o tridimensional al lenguaje unidimensional de la escritura y es un intermediario natural entre el lenguaje habitual y el lenguaje formalizado característico de las matemáticas Piaget, Choquet, Dieudonné y Thom (1986). Dicho proceso no es trivial ya que conlleva una transformación explícita de cambio de registro de representación. Sin embargo, el

[1] Doctoranda en Didáctica de las Matemáticas-Universidad de Valladolid, Profesora del Departamento de Ciencias-PUCP, e-mail: cgaita@pucp.edu.pe
[2] Doctor en Matemáticas-UVA, Catedrático de Universidad de Valladolid, e-mail: ortega@am.uva.es

estudio de la geometría sintética, entendida como la geometría desarrollada por Euclides en la cual se emplean la regla y el compás de manera exacta para la resolución de problemas, estuvo por mucho tiempo fuera de los currículos de la educación básica y superior.

Vagn Lundsgaard Hansen (en MAMMANA; VILLANI, 1998, p.11) menciona que las construcciones con regla y compás han desaparecido de los programas de matemáticas de muchos países. Esta situación se ha dado pese a que muchas veces las técnicas de construcción pueden resultar una muy buena forma de aproximarse a una situación dada. Propone que muchos problemas sobre construcciones geométricas sean trasladados al lenguaje matemático moderno y se enfoquen desde nuevas perspectivas, de modo que puedan volver a despertar el interés.

En particular, uno de los tópicos geométricos que presenta un potencial muy grande para desarrollar el pensamiento geométrico es el de lugar geométrico. Dicho concepto fue fundamental en el desarrollo de la geometría, en particular en el desarrollo de la geometría analítica. El trabajo de Descartes en el siglo XVII constituyó un hito importante en el desarrollo de la geometría al vincular geometría y álgebra para resolver un problema sobre lugar geométrico, el problema de Pappus, (DESCARTES, 1954). En esa misma línea, Rey Pastor, Santaló y Balanzat (1957) señalan que la idea esencial de la geometría analítica no fue la representación de los puntos de un espacio mediante conjuntos de números llamados coordenadas, como se suele pensar, sino la representación de los lugares geométricos por ecuaciones y el estudio de las figuras asociadas a tales expresiones mediante el algoritmo algebraico.

Consideramos que una primera asignatura de matemáticas dirigida a estudiantes de arquitectura constituye una oportunidad para desarrollar actividades que permitan reconocer construcciones exactas y adquirir estrategias para realizarlas. Si además dichas tareas se centran en la noción de lugar geométrico, se tendrá la posibilidad de establecer conexión entre dos campos del conocimiento generalmente abordados de manera aislada: la geometría sintética y la analítica, tal como señalan diversos investigadores (FONT, 1999; GASCÓN, 2002; ORTEGA; ORTEGA, 2004; WILHELMI, 2007).

Problema de investigación

Dada la naturaleza de la arquitectura, resulta indispensable que un estudiante de esta disciplina tenga sólidos conocimientos relacionados con la geometría sintética que servirá de base para el estudio de las formas. Sin embargo de la revisión del plan de estudios de estudiantes de arquitectura, se ha encontrado que las construcciones geométricas forman parte de asignaturas de dibujo arquitectónico pero no de las de matemáticas. De otro lado, experiencias previas muestran que un primer encuentro con la noción de lugar geométrico a través de contextos algebraicos es negativo. Ocasiona que los estudiantes se dediquen a realizar cálculos y no logren identificar dos elementos fundamentales del concepto: la dependencia entre cada punto generado y la condición geométrica dada, así como la necesidad de dar como respuesta todos los elementos del conjunto.

Se propone diseñar e implementar una propuesta didáctica que exija abordar problemas sobre lugar geométrico inicialmente desde el contexto, basada en construcciones geométricas. A partir de los resultados obtenidos se identificarán las concepciones que los estudiantes poseen sobre dicho concepto.

Elementos teóricos considerados

La teoría de registros de representación postula que en la actividad matemática se deben usar necesariamente representaciones semióticas, ya que los objetos de conocimiento matemático no son accesibles físicamente. Se entiende por representación semiótica a una representación constituida por el empleo de signos, ya sea una figura geométrica, un enunciado natural, una fórmula algebraica, una gráfica, etc. Así, una representación semiótica está subordinada a una representación mental, (DUVAL, 2006a).

De otro lado, se señala que no todos los sistemas semióticos se constituyen en registros, sólo lo serán aquellos que permitan la transformación de las representaciones. Dado que las representaciones semióticas son fundamentales para la actividad matemática, es necesario distinguir los sistemas semióticos de aquellos sistemas de signos que no lo son. A ellos se les denominará registros de representación semiótica, (DUVAL, 2006b), p.111).

En el contexto de esta investigación se considerarán los siguientes tipos de registros de representación semiótica:

- Lenguaje natural: corresponde a las condiciones matemáticas expresadas verbalmente.
- Representaciones figurales: aquellas que se realizan en el plano o en el espacio sin coordenadas, ya sea haciendo uso de instrumentos como regla y compás o de manera aproximada, y a partir de condiciones geométricas que definen a los objetos.
- Representaciones simbólicas: caracterizadas por una expresión simbólica que describe un conjunto de pares de puntos que satisfacen una determinada condición.

En particular, en geometría, Duval (1998) considera tres clases de procesos cognitivos que cumplen con funciones epistemológicas específicas, estos son:

- El proceso de visualización: que hace referencia a representaciones espaciales para ilustrar una proposición, para explorar, para verificar, etc.
- El proceso de razonamiento: que hace referencia a los procesos discursivos que acompañan al quehacer en geometría y que cumplen la función de explicar, demostrar, etc.
- El proceso de construcción mediante herramientas: que se refiere a construir configuraciones a partir de la observación de resultados que son producto de la acción sobre las representaciones de los objetos matemáticos.

En este trabajo pondremos especial énfasis en el tercer proceso cuando se realizan actividades de construcción de lugar geométrico, aunque los tres procesos están conectados y el desarrollo de todos ellos es necesario para la adquisición de la competencia geométrica.

De otro lado, para efectos de este trabajo, se considerará la definición de lugar geométrico en el contexto de geometría sintética presentada por Bouvier y George:

> A un conjunto de puntos de un espacio afín que posee una propiedad P, se le denomina lugar geométrico de los puntos que poseen la propiedad P. Por ejemplo, el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos puntos distintos A y B es la mediatriz del segmento AB. (BOUVIER; GEORGE, 1984, p.374).

Diseño de las situaciones

Se diseñó un conjunto de situaciones sobre lugar geométrico para ser desarrolladas por estudiantes de arquitectura que cursaban una primera asignatura de matemáticas.

Las situaciones fueron organizadas en base a condiciones geométricas que establecían relaciones entre la distancia entre tres puntos, de modo que la modificación de determinados parámetros en el enunciado generaba un cambio en la estrategia de solución.

Se presentan los enunciados de dos de las situaciones abordadas. A continuación se señalan las condiciones bajo las cuales se realizó su implementación, los conocimientos previos y emergentes, así como un análisis previo de la tarea y de los comportamientos esperados.

Enunciado 1: Consideren conocidos los puntos *A* y *B* del plano.

a) Construyan, haciendo uso de las herramientas de dibujo, un punto *P* tal que el triángulo *APB* sea recto en *P*.

b) ¿Es el punto P construido en a) único?

c) ¿Qué figura formarán todos los puntos *P* que satisfacen la condición geométrica descrita? Es decir, ¿cuál será el lugar geométrico descrito por *P*? ¿Por qué?

d) ¿Cómo garantizarían que no hay otros puntos del plano que forman parte del lugar geométrico?

Forma de trabajo: En parejas

Recursos disponibles: Lápiz y papel, regla y compás

Conocimiento previo: triángulo rectángulo, recta perpendicular, propiedad que satisface un triángulo inscrito en una circunferencia en el que un lado es el diámetro.

Conocimiento emergente: lugar geométrico como un conjunto de puntos.

Análisis previo de la tarea: La realización de la tarea, tal como está planteada, exige ubicar algunos puntos *P* que verifiquen la condición geométrica dada. Esto se hará construyendo rectas que pasen por *A* y luego trazando perpendiculares a cada una de dichas rectas de modo que éstas pasen por *B*. En la intersección de cada par de estas rectas, se ubicarán los puntos *P*.

Respecto a la identificación completa del lugar geométrico, se requiere realizar una transformación en el registro figural y reconocer que se puede trazar una circunferencia por la unión de los puntos construidos recientemente. Para ello se deberá recurrir a la propiedad que satisface un triángulo inscrito en una circunferencia en el que un lado es un diámetro. Esto permitirá concluir que el lugar geométrico es la circunferencia de diámetro *AB*, sin los puntos *A* y *B*.

Para la construcción de la circunferencia, bastará construir el punto medio del segmento *AB* y luego, con centro en ese punto y radio *AB*/2, trazar la circunferencia.

La justificación de este problema se puede brindar sólo con elementos de la geometría sintética y propiedades geométricas. No se hace necesario presentar argumentos en el contexto algebraico para garantizar la forma que el lugar geométrico adopta.

Comportamientos esperados: Algunos alumnos empezarán ubicando puntos particulares que satisfacen la condición. Por ejemplo, considerando que el segmento AB es la diagonal de un cuadrado, trazando la mediatriz de dicho segmento y marcando aquellos puntos que distan del punto medio del segmento en *AB*/2. Este último paso lo harán trasladando distancias con el compás. Luego, usando como argumento la propiedad del ángulo inscrito, considerarán suficiente trazar una circunferencia de diámetro a *AB* y afirmar que todos los puntos sobre dicha circunferencia, excepto quizás *A* y *B*, corresponden a lugar geométrico pedido.

Es probable que otros alumnos identifiquen directamente la propiedad de la circunferencia (todo triángulo que tiene dos vértices como extremo de un diámetro de la circunferencia *C* y el tercer vértice sobre la circunferencia *C* será recto en este último vértice). Así, señalarán sin una exploración previa, que el lugar geométrico es una circunferencia de diámetro *AB*.

Se espera que la mayoría de estudiantes no excluyan los puntos *A* y a *B* ya que no verificarán la condición de que se genere un triángulo.

Enunciado 2: Consideren conocidos los puntos *A* y *B* del plano y un segmento de longitud $k \neq d(A, B)$. Haciendo uso de las herramientas de dibujo que ofrece GeoGebra, realicen las siguientes actividades:

a) Construyan un punto *P* en el plano de modo que la diferencia de los cuadrados de las distancias de *P* a *A* y de *P* a *B* sea k^2. ¿Es el punto *P* único?

b) La unión de todos los puntos *P* que satisfacen la condición anterior, ¿corresponderá a alguna figura conocida? Comentar su respuesta.

Forma de trabajo: En parejas

Recursos disponibles: Programa de geometría dinámica

Conocimiento previo: traslado de distancias, construcción de triángulos rectángulos conociendo un cateto, teorema de Pitágoras.

Conocimiento emergente: un punto del lugar geométrico como una intersección de dos figuras, el lugar geométrico como traza.

Análisis previo de la tarea: Para la realización de la tarea se deberán ubicar dos puntos *A* y *B* en el plano de dibujo. Luego, se tendrá que reconocer que la ubicación de *P* está relacionada con la construcción de un triángulo rectángulo que no es *APB*. Aquí se debe asociar la expresión *la diferencia de los cuadrados de las distancias* con el teorema de Pitágoras en el que un cateto mide *k* y el otro cateto tiene una longitud cualquiera, *n.* Con estos dos valores, quedará fijo el valor de la hipotenusa, *m*.

Dicha actividad requerirá convertir del registro dado por la lengua natural al simbólico, reconociendo en la propiedad de los cuadrados de las distancias que se debe construir un triángulo rectángulo. Esto llevará a una nueva actividad de conversión del registro simbólico al figural.

Para la ubicación de *P* se seguirá la misma estrategia que en el problema anterior que consiste en construir dos lugares. Así, se deberán trasladar las distancias consideradas para la hipotenusa *m* y para el cateto *n* a un dibujo que incluya los puntos *A* y *B*. Con centro en *A* y radio la longitud de la hipotenusa, se deberá construir una circunferencia; con centro en *B* y radio la longitud del cateto, se construirá otra circunferencia.

Para generar el lugar geométrico es preciso notar que *P* no es único; esto se hará evidente al buscar otros puntos *P* variando los valores para *m* y *n*. Aquí se deberá establecer una conexión entre dichos cambios y las nuevas circunferencias que deberán construirse e intersectarse. Esta actividad implicará realizar varias conversiones y por tanto también será considerada compleja.

Por otro lado, se deberá concebir al lugar geométrico como el conjunto formado por *todos* los puntos que satisfacen la condición dada. Para que esto ocurra, se deberá variar continuamente uno de los vértices del triángulo rectángulo de cateto *k* e intuir que la forma global del lugar geométrico corresponderá a un objeto geométrico estudiado previamente: la recta. Aunque la justificación formal de que dicho lugar geométrico es una recta perpendicular al segmento *AB* puede basarse únicamente en argumentos propios de la geometría sintética, esto no será trivial ya que no es una demostración constructiva, recurre a la inclusión de conjuntos: si un punto *P* pertenece al lugar geométrico, entonces cualquier punto que se encuentre sobre la recta perpendicular al segmento *AB* que pase por *P*, también estará en el lugar geométrico.

Comportamientos esperados: Se espera que algunos alumnos consideren que la distancia *k* es la distancia entre *A* y *B* y formen el triángulo rectángulo con *A*, *B* y *P*. En ese caso, darán por respuesta una circunferencia, lo que no es correcto según las condiciones originales del problema.

En aquellos casos en los que interpreten correctamente los datos, será fundamental que transformen la condición dada verbalmente en la condición geométrica basada en el teorema de Pitágoras. El hecho que en el enunciado aparezcan expresiones como “la diferencia de los cuadrados de las distancias” deberá inducir a usar ese teorema. En términos cognitivos, eso corresponde a una conversión entre registros.

La construcción de puntos del lugar geométrico requiere “alejarse” del segmento *AB* y construir un triángulo rectángulo en otro lugar del plano para luego “regresar” a las ubicaciones originales de *A* y *B* y trasladar distancias. Además, se deberá ubicar al menos cuatro puntos del lugar geométrico de manera exacta para poder “intuir” que la forma global del lugar geométrico es la de una recta; de lo contrario, darán otra curva como lugar geométrico.

Los estudiantes podrán emplear la opción *lugar* y obtener la recta (o semirrecta en caso desplacen sólo un punto de corte) para dar respuesta a cuál es la forma global del lugar geométrico. Si proceden de esa manera, será una señal de que han comprendido la relación entre *m* y *n* y los puntos del lugar geométrico, es decir, habrán adquirido una concepción dinámica del concepto.

Análisis de resultados

La organización de las respuestas de los estudiantes para identificar la concepción que poseían en relación al lugar geométrico se hizo atendiendo a dos aspectos: garantizar que se daba como respuesta *todos* los elementos del conjunto y reconocer la relación de dependencia entre cada punto generado y las condiciones del problema.

El considerar a todos los elementos del conjunto se describió con la expresión *poseer una concepción global*, mientras que el reconocer la relación de dependencia se describió con la expresión *poseer una concepción dinámica*.

De esta manera, las posibles respuestas serían:

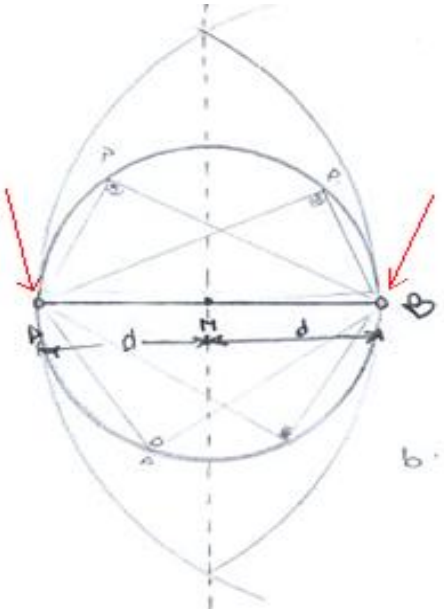
- Tiene una concepción dinámica y global de lugar geométrico ya que considera a todos los puntos que satisfacen la condición.
- Tiene una concepción dinámica de lugar geométrico pero no considera a todos los puntos que satisfacen la condición.
- Tiene una concepción dinámica de lugar geométrico pero una concepción equivocada de algún objeto geométrico.
- Tiene una concepción estática aunque global de lugar geométrico ya que considera a todos los que satisfacen la condición.
- Tiene una concepción estática de lugar geométrico y además considera sólo algunos puntos.
- Tiene una concepción estática de lugar y considera puntos que no corresponden al lugar geométrico.
- No tiene concepción alguna de lugar geométrico

Resultados del ejemplo 1

Esta tarea resultó estar al alcance de los estudiantes, ya que más del 70% encontró una estrategia de solución que les permitió identificar el lugar geométrico como una circunferencia. En algunos casos, justificaron formalmente su respuesta empleando el registro figural y simbólico para representar la propiedad que satisface un triángulo inscrito en una circunferencia que tiene uno de los lados como diámetro. En otros casos, las justificaciones no fueron explícitas.

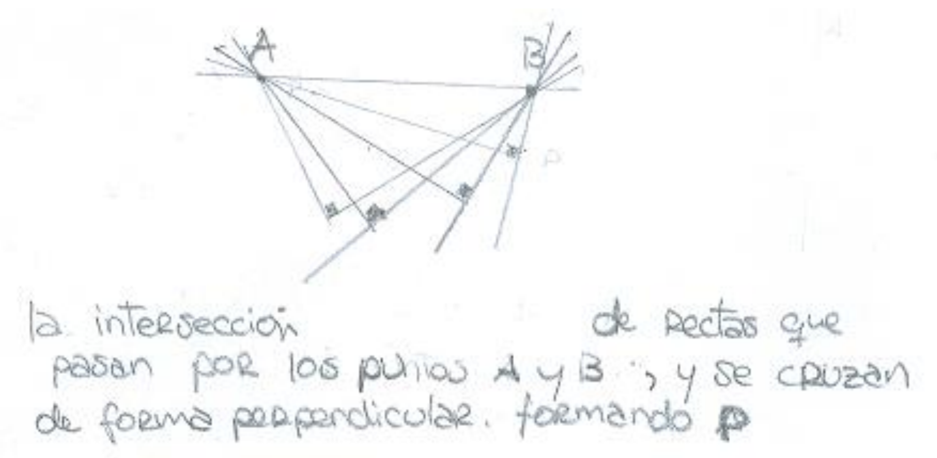
La figura 1 corresponde a la solución de una pareja de estudiantes que mostró tener una concepción dinámica de lugar geométrico y que consideró a todos los puntos que satisfacen la condición.

Figura 1. Concepción dinámica y global de lugar geométrico



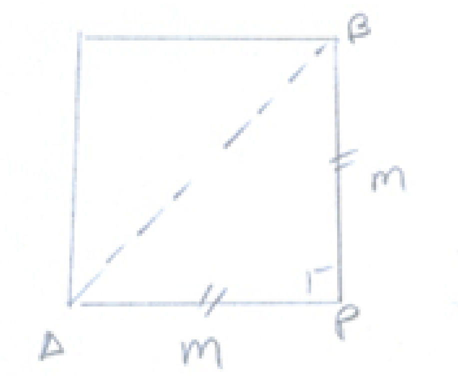
Se presenta la figura 2 para ilustrar la solución de una pareja de estudiantes que mostró tener una concepción dinámica de lugar geométrico pero que no consideró todos los elementos del conjunto.

Figura 2. Concepción dinámica de lugar geométrico



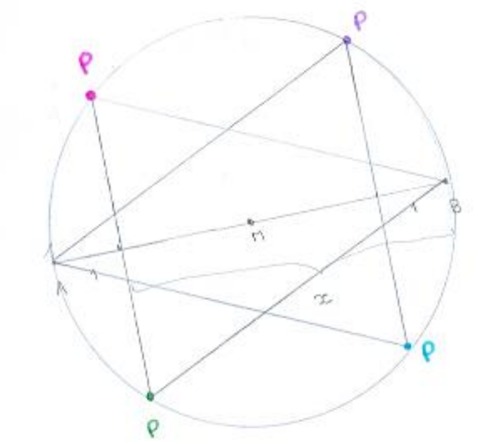
En la figura 3 se muestra la solución de una pareja de estudiantes que construyó un punto del lugar geométrico. Se consideró que estos estudiantes poseían una concepción estática y que solo considera algunos puntos sobre lugar geométrico.

Figura 3. Concepción estática y puntual



Y en la figura 4 se muestra la solución de una pareja de estudiantes que aparentemente construyó cuatro puntos del lugar geométrico; sin embargo, al analizar la construcción se observa que no reconocieron la condición geométrica que generaba a los puntos P pues los triángulos trazados no tienen vértices en A, P y B.

Figura 4. Concepción errónea de lugar geométrico

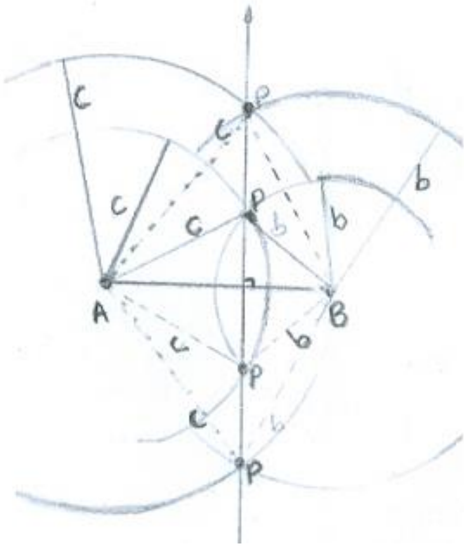


Resultados del ejemplo 2

Como se describió previamente, para estar tarea se sugirió emplear un programa de geometría dinámica. Pese a ello, solo el 50% de estudiantes pudo abordar el problema. Al parecer, les resultó complejo traducir la condición geométrica dada en lengua natural en una figura que la satisficiera.

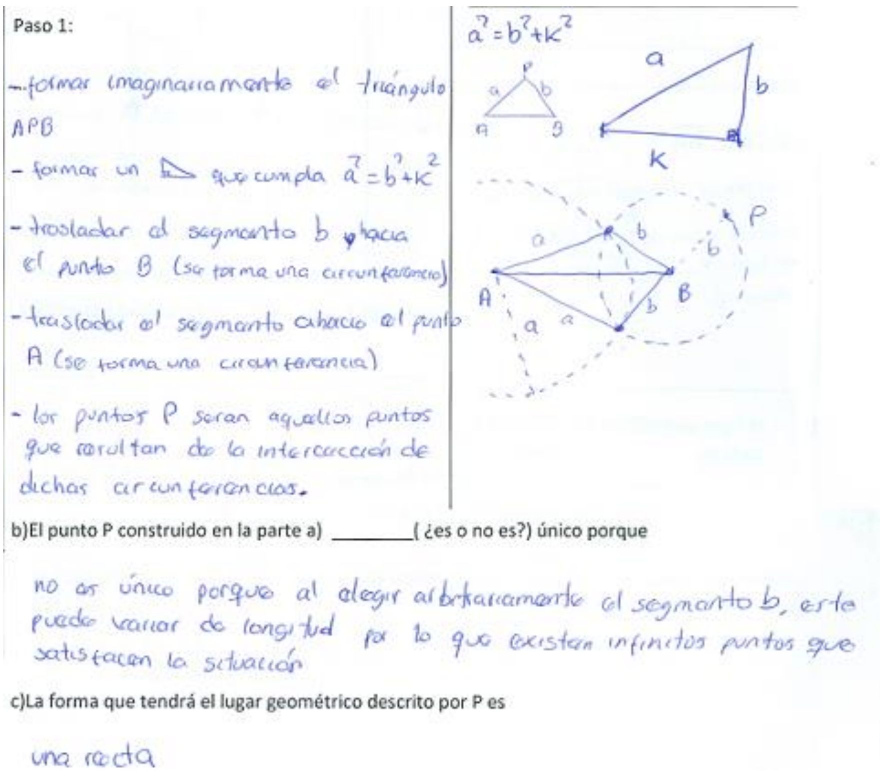
En la figura 5 se muestra la solución de una de las parejas que reconoció la forma global de la figura que se generaba, así como la relación de dependencia entre cada punto de intersección de las circunferencias y las longitudes *m* y *n* de la solución esperada, longitudes que ellos denotaron por *b* y *c*.

Figura 5. Solución global y dinámica



En la figura 6 se presenta la solución de una pareja de estudiantes que a partir de la construcción de dos puntos del lugar geométrico, identificó la forma global del mismo. Sin embargo, en su procedimiento de solución no hay evidencias de que reconocieran la dependencia entre los puntos hallados y las longitudes de a y b ya que el procedimiento de construcción solo se hizo para dos puntos.

Figura 6. Concepción global pero no dinámica



Paso 1:

- formar imaginariamente el triángulo APB
- formar un △ que cumpla $a^2=b^2+k^2$
- trasladar el segmento b hacia el punto B (se forma una circunferencia)
- trasladar el segmento a hacia el punto A (se forma una circunferencia)
- los puntos P serán aquellos puntos que resultan de la intersección de dichas circunferencias.

$a^2=b^2+k^2$

b)El punto P construido en la parte a) ________(¿es o no es?) único porque

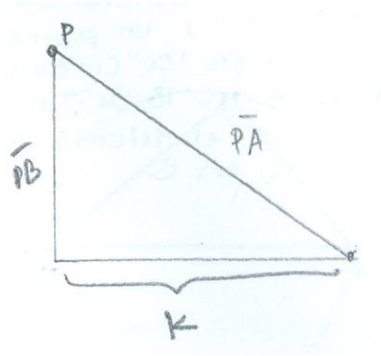
no es único porque al elegir arbitrariamente el segmento b, este puede variar de longitud por lo que existen infinitos puntos que satisfacen la situación

c)La forma que tendrá el lugar geométrico descrito por P es

una recta

La figura 7 corresponde a la de una pareja que muestra haber comprendido la condición geométrica dada; sin embargo que no pudo trasladar esta información a una figura en donde además aparecieran los puntos A, B y el segmento de longitud k.

Figura 7. Solución en donde no se reconoce el lugar geométrico



Conclusiones

En general, las tareas propuestas permitieron que los estudiantes concibieran al lugar geométrico como un conjunto de puntos que se generaba por una condición dinámica.

Consideramos que el haber trabajado con la construcción de una circunferencia a partir de su diámetro en problemas de construcciones abordados previamente, contribuyó a que los estudiantes identificaran la forma que adoptaba el lugar del ejemplo 1.

Tareas como la del ejemplo 2 resultaron estar un poco más lejos del alcance de los estudiantes. Consideramos que esto se debe fundamentalmente a que la técnica de solución según la cual se debe construir una figura auxiliar ubicada en una región del área de dibujo donde no están los datos, y luego se deban trasladar distancias, exige realizar reconfiguraciones, actividad de alta complejidad cognitiva.

En esos casos, la incorporación de una herramienta informática favoreció la adquisición de una concepción dinámica del concepto lugar geométrico. Así, el que los estudiantes identificaran uno a uno los puntos como intersección de circunferencias específicas y luego pudieran estudiar su comportamiento a través del arrastre contribuyó a identificar la dependencia entre los puntos del lugar geométrico y las condiciones del problema.

Otro aspecto positivo del uso del programa de geometría dinámica fue que permitió a los alumnos llevar adelante una estrategia de solución sin tener que preocuparse por la exactitud de sus construcciones; a cambio, los obligó a reconocer los datos y la condición geométrica que había sido dada.

Se valora positivamente la introducción del lugar geométrico a través de situaciones en el marco geométrico ya que ello favoreció que los alumnos adquirieran una concepción dinámica y global de este concepto.

El proceso de instrucción implementado favoreció la construcción de una concepción más completa de lugar geométrico. De esta manera se ha cumplido con un requisito fundamental para abordar posteriormente problemas más complejos de lugar geométrico, en particular, de aquellos que permitirán justificar la introducción de la geometría analítica.

Referencias

BOUVIER, A.; GEORGE, M. (1984). Diccionario de Matemáticas. Madrid, Akal Editor.

DESCARTES, R. (1954). The Geometry of Rene Descartes. (David Eugene Smith; Marcia L. Lathan, trad.). Nueva York, Dover Publications, Inc.

DUVAL, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En MAMMAMA, C.; VILLANI, E. (Eds.). Perspective on the teaching of geometry for the 21st Century. New ICMI Study Series. Vol. 5 (pp. 29-37). Dordrecht. Netherlands, Kluwer Academic Publisher.

DUVAL, R. (2006a). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la RSME, 9(1), pp. 143-168.

DUVAL, R. (2006). A cognitive analisis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics. 61, pp. 103-161.

FONT, V. (1999). Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de grafiques. Aplicaciones a las derivadas. Tesis doctoral em Matemáticas, Universidad de Barcelona.

GASCÓN, J. (2002). Geometría sintética en la E.S.O. y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? SUMA, 39, pp. 13-25.

MAMMANA, C. Y VILLANI, V. (1998). Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century: an ICMI Study. Kluwer Academic Publishers.

ORTEGA, I. y ORTEGA, T. (2004). Los diez problemas de Apolonio. SUMA, 46, pp. 59-70.

PIAGET, J., CHOQUET, G., DIEUDONNÉ, J. Y THOM, R. (1986). La enseñanza de las matemáticas modernas. Madrid, Alianza Editorial.

REY PASTOR, J.; SANTALÓ, L.A.; BALANZAT, M. (1957). Geometría analítica. Buenos Aires, Editorial Kapelusz.

WILHELMI, M. (2007). El momento del trabajo de la técnica en la evolución de un proceso de estudio: el caso de la determinación de una circunferencia. En HIGUERAS, J., ESTEPA, A.; GARCÍA, F. (Coords.) Sociedad, escuela y matemáticas: aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico. Universidad de Jaén, pp. 177-200.

Recebido em: 01/10/2014 Aceito em: 01/12/2014